CAPS UITGAWE

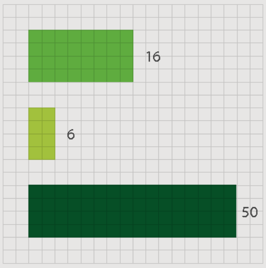
GRAAD 11 WISKUNDE

GESKRYF DEUR VRYWILLIGERS

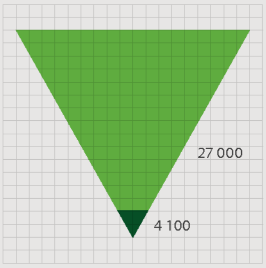
EVERYTHING MATHS DEUR

SIYAVULA

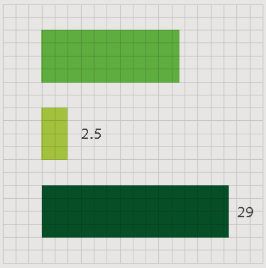
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING



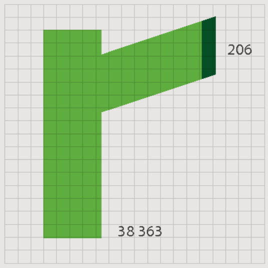
- Algebra oefeninge in hierdie boek
- Trigonometrie oefeninge in hierdie boek
- Meetkunde oefeninge in hierdie boek



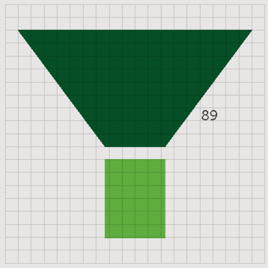
- Liters ink gebruik in al hierdie Graad 10,11 en 12 boeke
- Liters gom gebruik in al hierdie Graad 10,11 en 12 boeke



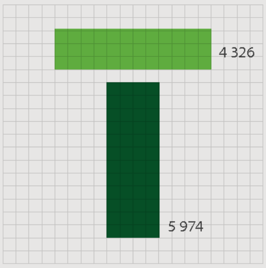
- Breedte van die boek (cm)
- Dikte van die boek (cm)
- Lengte van die boek (cm)



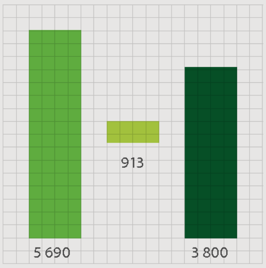
- Hoeveelheid woorde gebruik in hierdie boek
- Hoeveelheid bladsye



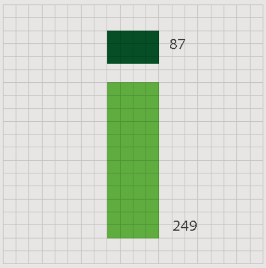
- Hoeveelheid ure spandeer aan onderrig uit hierdie boek
- Hoeveelheid ure spandeer aan huiswerk uit hierdie boek



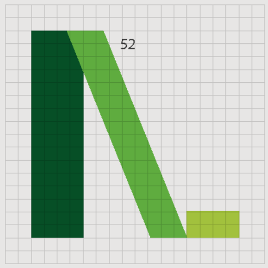
- Lengte van die bladsye (sy aan sy)
- Lengte van die bladsye (kop aan kop)



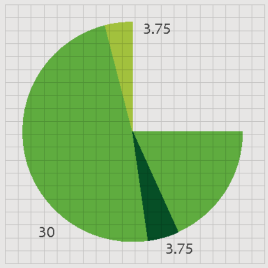
- Aantal kere wat leerders hul kop krap terwyl hul hierdie boek lees
- Aantal kere wat leerders in hul neus krap terwyl hul hierdie boek lees
- Aantal kere wat leerders pen kliek terwyl hul hierdie boek lees



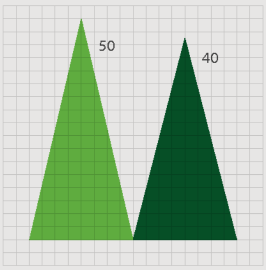
- Hoeveelheid vrouens wat hierdie boek help skryf het
- Hoeveelheid mans wat hierdie boek help skryf het



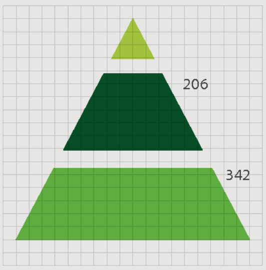
- Meesters-studente wat tot hierdie boek bygedra het
- Honneurs-studente wat tot hierdie boek bygedra het
- Voorgraadse studente wat tot hierdie boek bygedra het



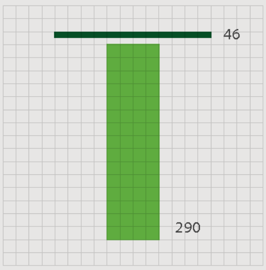
- Ure spandeer om hierdie boek skool toe te neem per week
- Ure spandeer om hierdie boek huis toe te neem per week
- Ure spandeer met hierdie boek in klaskamer per week



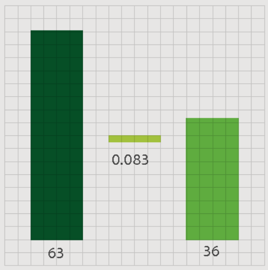
- Gemiddelde grootte van klas wat onderrig word uit hierdie boek
- Gemiddelde ouderdom van onderwyser wat onderrig uit hierdie boek



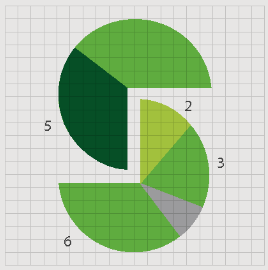
- Aantal teorie bladsye in Graad 12 Wiskunde boek
- Aantal teorie bladsye in Graad 11 Wiskunde boek
- Aantal teorie bladsye in Graad 10 Wiskunde boek



- Aantal Afrikaanse vrywilligers wat hierdie boek help skryf het
- Aantal Engelse vrywilligers wat hierdie boek help skryf het



- Aantal ure spandeer om die voorblad te konseptualiseer
- Aantal ure spandeer aan die vervaardiging van hierdie boek
- Aantal ure spandeer om die omslag te ontwerp



- Weeklikse beplanningsessies by UCT wat tot hierdie boek bygedra het
- Dinkskrums in kantoor verband wat tot hierdie boek bygedra het
- Afrikaanse vertalingsessies wat tot hierdie boek bygedra het
- Virtuele werksessies wat tot hierdie boek bygedra het

basic education
Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

METROPOLITAN

EVERYTHING MATHS

GRAAD 11 WISKUNDE

WEERGAWE 1 CAPS

DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

KOPIEREG KENNISGEWING

Jou wetlike vryheid om hierdie boek te kopieer

LYS VAN SKRYWERS

Siyavula Onderwys

Siyavula Onderwys is a sosiale onderneming wat in 2012 met kapitaal en ondersteuning van die **PSG Group Beperk** en die **Shuttleworth Stigting** gestig is. Die Everything Maths and Science reeks is deel van 'n groeiende versameling van hulpbronne geskep en vryliks beskikbaar gestel is deur Siyavula. Vir meer inligting oor die skryf en verspreiding van hierdie titels besoek :

www.siyavula.com
info@siyavula.com
021 469 4771

Siyavula Skrywers

Alison Jenkin; Marina van Zyl; Dr. Carl Scheffler

Siyavula en DBE span

Neels van der Westhuizen; Leonard Gumani Mudau; Ewald Zietsman; Bridget Nash; Pertunia Mpho Letwaba; Josephine Mamaroke Phatlane; William Buthane Chauke; Nicola du Toit; Heather Williams

Siyavula en Free High School Science Text bydraers

Dr. Mark Horner; Dr. Samuel Halliday; Dr. Sarah Blyth; Dr. Rory Adams; Dr. Spencer Wheaton

Iesrafeel Abbas; Sarah Abel; Dr. Rory Adams; Andrea Africa; Wiehan Agenbag; Matthew Amundsen; Ben Anhalt; Prashant Arora; Amos Baloyi; Bongani Baloyi; Raymond Barbour; Caro-Joy Barendse; Richard Baxter; Tara Beckerling; Tim van Beek; Mariaan Bester; Jennifer de Beyer; Dr. Sarah Blyth; Sebastian Bodenstein; Martin Bongers; Thinus Booysen; Gareth Boxall; Stephan Brandt; Hannes Breytenbach; Alexander Briell; Wilbur Britz; Graeme Broster; Craig Brown; Michail Brynard; Deanne de Bude; Richard Burge; Bianca Bˆhmer; Jan Buys; George Calder-Potts; Eleanor Cameron; Mark Carolissen; Shane Carollisson; Richard Case; Sithembile Cele; Alice Chang; Richard Cheng; Fanny Cherblanc; Dr. Christine Chung; Brett Cocks; RochÈ Compaan; Willem Conradie; Stefaan Conradie; Rocco Coppejans; Tim Craib; Andrew Craig; Tim Crombie; Dan Crytser; Jock Currie; Dr. Anne Dabrowski; Laura Daniels; Gareth Davies; Sandra Dickson; Sean Dobbs; Buhle Donga; William Donkin; Esmi Dreyer; Matthew Duddy; Christel Durie; Fernando Durrell; Dr. Dan Dwyer; Frans van Eeden; Alexander Ellis; Tom Ellis; Andrew Fisher; Giovanni Franzoni; Olivia Gillett; Ingrid von Glehn; Tamara von Glehn; Lindsay Glesener; Kevin Godby; Dr. Vanessa Godfrey; Terence Goldberg; Dr. Johan Gonzalez; Saaligha Gool; Hemant Gopal; Dr. Stephanie Gould; Umeshree Govender; Heather Gray; Lynn Greeff; Jaco Greyling; Martli Greyvenstein; Carine Grobbelaar; Suzanne GrovÈ; Dr. Tom Gutierrez; Brooke Haag; Kate Hadley; Alex Hall; Dr. Sam Halliday; Asheena Hanuman; Dr. Melanie Dymond Harper; Ebrahim Harris; Dr. Nicholas Harrison; Neil Hart; Nicholas Hatcher; Jason Hayden; Laura Hayward; Dr. William P. Heal; Pierre van Heerden; Dr. Fritha Hennessy; Dr. Colleen Henning; Shaun Hewitson; Millie Hilgart; Grant Hillebrand; Nick Hobbs; Chris Holdsworth; Dr. Benne Holwerda; Dr. Mark Horner; Robert Hovden; Mfandaidza Hove; Jennifer Hsieh; George Hugo; Laura Huss; Prof. Ed Jacobs

Hester Jacobs; Stefan Jacobs; Rowan Jelley; Grant Jelley; Clare Johnson; Francois Jooste; Luke Jordan; Tana Joseph; Corli Joubert; Dr. Fabian Jutz; Brian Kamanzi; Herman Kamper; Dr. Lutz Kampmann; Simon Katende; Natalia Kavalenia; Rabia Khan; Nothando Khumalo; Paul Kim; Lizl King; Melissa Kistner; Dr. Jennifer Klay; Andrea Koch; Grove Koch; Bishop Komolafe; Dr. Timo Kriel; Lara Kruger; Sihle Kubheka; Andrew Kubik; Luca Lategan; Dr. Jannie Leach; Nkoana Lebaka; Dr. Marco van Leeuwen; Dr. Tom Leinster; Ingrid Lezar; Henry Liu; Christopher Loetscher; Linda Loots; Michael Loseby; Bets Lourens; Chris Louw; Amandla Mabona; Malothe Mabutho; Stuart Macdonald; Dr. Anton Machacek; Tshepo Madisha; Batsirai Magunje; Dr. Komal Maheshwari; Michael Malahe; Masoabi Malunga; Kosma von Maltitz; Masilo Mapaila; Bryony Martin; Nicole Masureik; Jacques Masuret ; John Mathew; Dr. Will Matthews; Chiedza Matuso; JoEllen McBride; Nikolai Meures; Margaretha Meyer; Riana Meyer; Filippo Miatto; Jenny Miller; Rossouw Minnaar; Abdul Mirza; Colin Mkhize; Mapholo Modise; Carla Moerdyk; Tshwarelo Mohlala; Relebohile Molaoa; Marasi Monyau; Asogan Moodaly; Jothi Moodley; Robert Moon; Calvin Moore; Bhavani Morarjee; Kholofelo Moyaba; Nina Gitau Muchunu; Christopher Muller; Helgard Muller; Johan Muller; Caroline Munyonga; Alban Murewi; Kate Murphy; Emmanuel Musonza; Tom Mutabazi; David Myburgh; Johann Myburgh; Kamie Naidu; Nolene Naidu; Gokul Nair; Vafa Naraghi; Bridget Nash; Eduan NaudÈ; Tyrone Negus; Theresa Nel; Huw Newton-Hill; Buntu Ngcebetsha; Towan Nothling; Dr. Markus Oldenburg; Adekunle Oyewo; Thomas OíDonnell; Dr. Jaynie Padayachee; Poveshen Padayachee; Masimba Paradza; Quinton Paulse; Dave Pawson; Justin Pead; Carli Pengilly; Nicolette Pekeur; Joan Pienaar; Petrus Pieter; Sirika Pillay; Jacques Plaut; Jaco du Plessis; Barry Povey; Barry Povey; Andrea Prinsloo; David Prinsloo; Joseph Raimondo; Sanya Rajani; Alastair Ramlakan; Thinus Ras; Dr. Matina J. Rassias; Ona Rautenbach; Dr. Jocelyn Read; Jonathan Reader; Jane Reddick; Robert Reddick; Dr. Matthew Reece; Chris Reeders; Razvan Remsing; Laura Richter; Max Richter; Sean Riddle; Dr. David Roberts; Christopher Roberts; Helen Robertson; Evan Robinson; Christian Roelofse; Raoul Rontsch; Dr. Andrew Rose; Katie Ross; Jeanne-MariÈ Roux; Karen Roux; Mark Roux; Bianca Ruddy; Heinrich Rudman; Nitin Rughoonauth; Katie Russell; Steven Sam; Jason Avron Samuels; Dr. Carl Scheffler; Nathaniel Schwartz; Duncan Scott; Christo van Schalkwyk; Rhoda van Schalkwyk; Helen Seals; Relebohile Sefako; Prof. Sergey Rakityansky; Sandra Serumaga-Zake; Paul Shangase; Cameron Sharp; Ian Sherratt; Dr. James Short; Cho Hee Shrader; Roger Sieloff; Brandon Sim; Bonga Skozana; Clare Slotow; Bradley Smith; Greg Solomon; Nicholas Spaull; Hester Spies; Dr. Andrew Stacey; Dr. Jim Stasheff; Mike Stay; Nicol Steenkamp; Dr. Fred Strassberger; Mike Stringer; Stephanie Strydom; Abdulhuck Suliman; Masixole Swartbooi; Tshenolo Tau; Tim Teatro; Ben Thompson; Shen Tian; Xolani Timbile; Liezel du Toit; Nicola du Toit; Dr. Francois Toerien; RenÈ Toerien; Dr. Johan du Toit; Robert Torregrosa; Jimmy Tseng; Pieter Vergeer; Rizmari Versfeld; Nina Verwey; Mfundo Vezi; Mpilonhle Vilakazi; Wetsie Visser; Alexander Volkwyn; Mia de Vos; Dr. Karen Wallace; John Walmsley; Helen Waugh; Leandra Webb; Dr. Dawn Webber; Michelle Wen; Dr. Rufus Wesi; Francois Wessels; Wessel Wessels; Neels van der Westhuizen; Sabet van der Westhuizen; Dr. Alexander Wetzler; Dr. Spencer Wheaton; Vivian White; Dr. Gerald Wigger; Harry Wiggins; Heather Williams; Wendy Williams; Julie Wilson; Timothy Wilson; Andrew Wood; Emma Wormauld; Dr. Sahal Yacoob; Jean Youssef; Ewald Zietsman; Johan Zietsman; Marina van Zyl

TITEL BORG

Hierdie handboek is ontwikkel met ‘n borgskap van MMI Holdings.

MMI FOUNDATION

Goedgestruktureerde, betekenisvolle korporatiewe sosiale beleggings kan op ‘n positiewe manier bydra tot nasiebou en só lei tot positiewe veranderings in gemeenskappe. MMI se verbintenis tot beleggings in die gemeenskap beteken ons is deurentyd op soek na geleenthede waarop ons sommige van Suid-Afrika se mees weerlose burgers kan help en ondersteun om hul horisonne te verbreed en om groter toegang te kry tot al die geleenthede wat die lewe bied.

Dit beteken ons beskou nie beleggings wat in die gemeenskap gemaak word as net ‘n bonus of bemarkingstrategie of borgskap nie. Ons beskou dit as ín kritieke en noodsaaklike deel in ons bydrae tot die samelewing. Die samesmelting tussen Metropolitan en Momentum is geprys omdat hierdie twee maatskappye mekaar goed aanvul. Die goeie samewerking kom ook duidelik na vore in die fokusgebiede van die korporatiewe sosiale beleggingsprogramme waarin Metropolitan en Momentum gesamentlik belê in sowel die belangrikste bedrywe as daar waar die grootste behoefte is in terme van sosiale deelname.

MIV/vigs raak toenemend ‘n bestuurbare siekte in baie ontwikkelde lande, maar in ‘n land soos ons sín is dit steeds ín toestand waaraan mense steeds onnodig sterf. Metropolitan se ander fokusgebied is opvoeding en dit bly die hoeksteen van ekonomiese vooruitgang in ons land.

Momentum se fokus op mense met gestremdhede verseker dat hierdie gemeenskap ingesluit is by en toegelaat word om hul bydrae tot die samelewing te lewer. Weerlose en weeskinders is nog ín fokusgebied vir Momentum en projekte wat deur hulle ondersteun word verseker dat kinders die kans kry om veilig groot te word sodat hulle saam met alle

momentum METROPOLITAN

EVERYTHING MATHS AND SCIENCE

Die Everything Mathematics en Science-reeks sluit handboeke in vir Wiskunde, Wiskundige Geletterdheid, Fisiese Wetenskappe en Lewenswetenskappe.

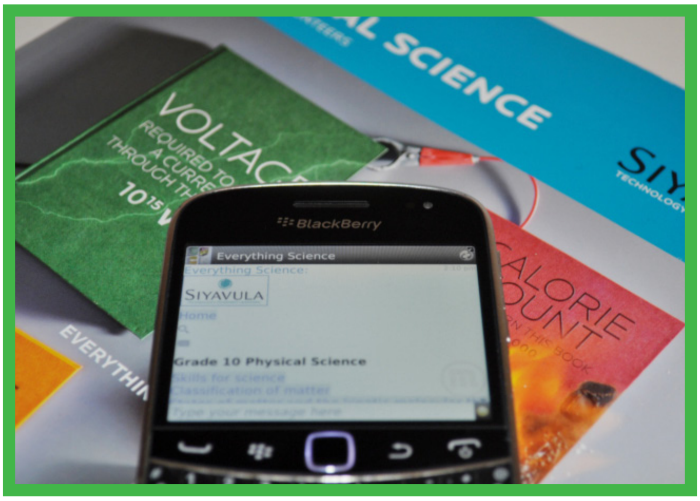
Die Siyavula Everything Science Fisiese Wetenskappe-handboeke

Die Siyavula Everything Maths Wiskunde-handboeke

LEES OP JOU SELFOON

- ## *MOBI WEBBLAD*

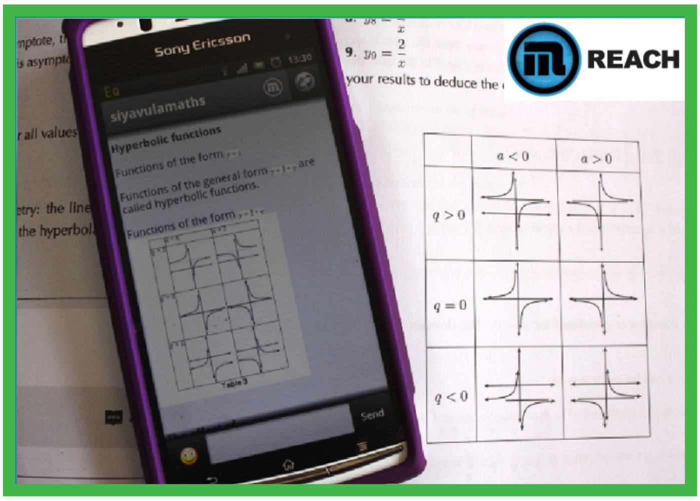
Jy kan hierdie boek en al die ander titels in die Everything Maths en Science-reeks op jou selfoon lees. Besoek die webblad by:



m.everythingmaths.co.za en ***m.everythingscience.co.za***

- ## *MXIT*

Alle Mxit-gebruikers kan hierdie handboeke op Mxit lees deur Everything Maths en Everything Science by hulle lys van kontakte te voeg of dit binne Mxit Reach kry.

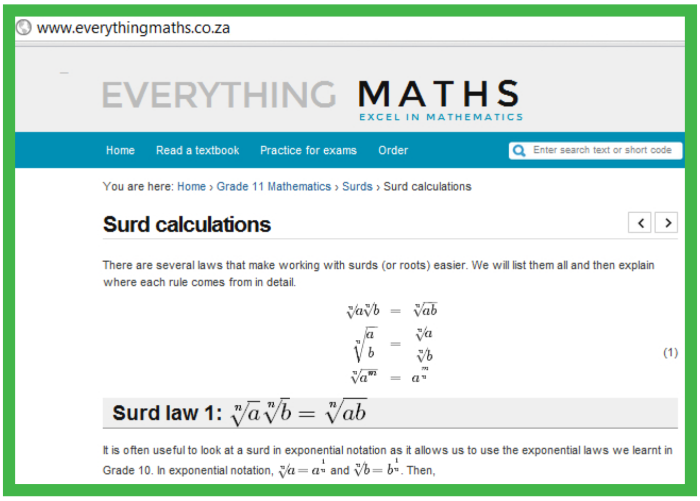


mxit>tradepost>reach>education>everything maths of ***everything science***

DIGITALE HANDBOEKE

- ## *LEES AANLYN*

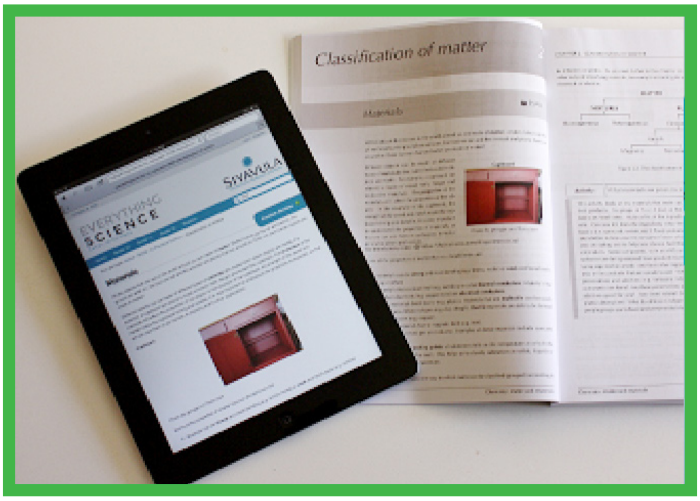
Die aanlynweergawe van die handboek bevat videos, aanbiedings, simulasies en ten volle uitgewerkte oplossings vir die vrae en oefeninge in die boek.



www.everythingmaths.co.za en ***www.everythingscience.***

- ## *LAAI OP JOU TABLET AF*

Jy kan 'n digitale weergawe van die Everything Series-handboeke aflaai om aflyn te lees op jou persoonlike rekenaar, tabletrekenaar, iPad of Kindle. Besoek Everything Maths en Everything Science se webblaaie om die boek af te laai.

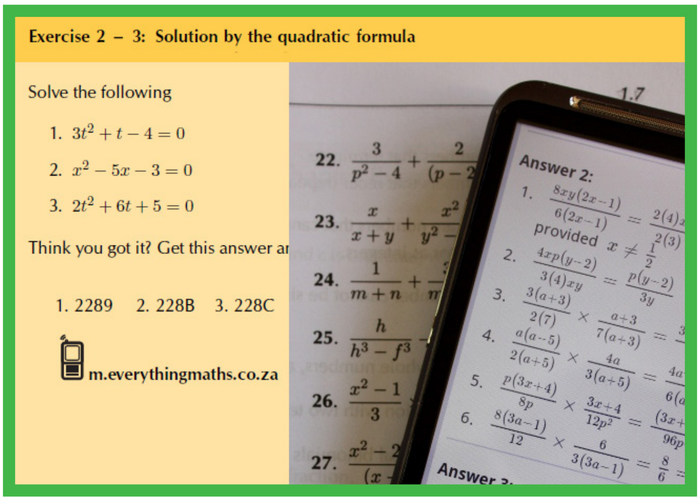


www.everythingmaths.co.za en ***www.everythingscience.co.za***

OEFEN SLIM

• *GAAN JOU ANTWOORDE OP JOU SELFOON*

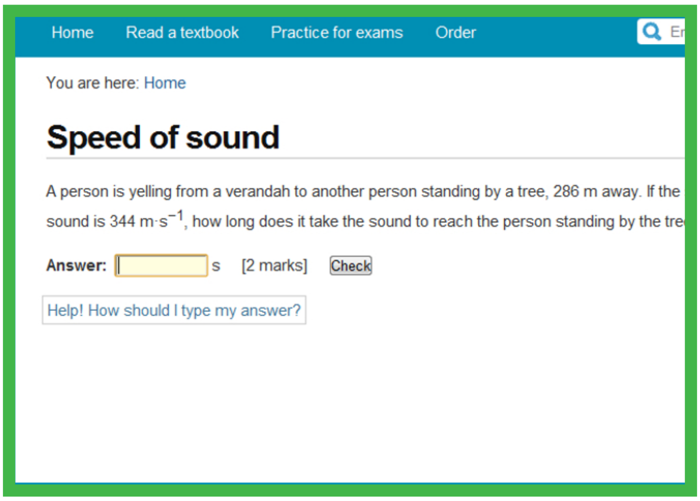
Jy kan jou antwoorde vir enige van die vrae in hierdie handboek op jou selfoon nagaan deur die kode vir die oefening in te tik op die mobi of webblad.



m.everythingmaths.co.za en ***m.everythingscience.co.za***

• *OEFEN VIR TOETSE EN EKSAMENS OP JOU SELFOON*

Jy moet oefen om goed te kan doen in toetse en eksamens. Gebruik die oefeninge in hierdie handboek, en ook die bykomende oefeninge en vorige eksamenvrae wat beskikbaar is op ***m.everythingmaths.co.za*** en ***m.everythingscience.co.za*** en Mxit Reach.

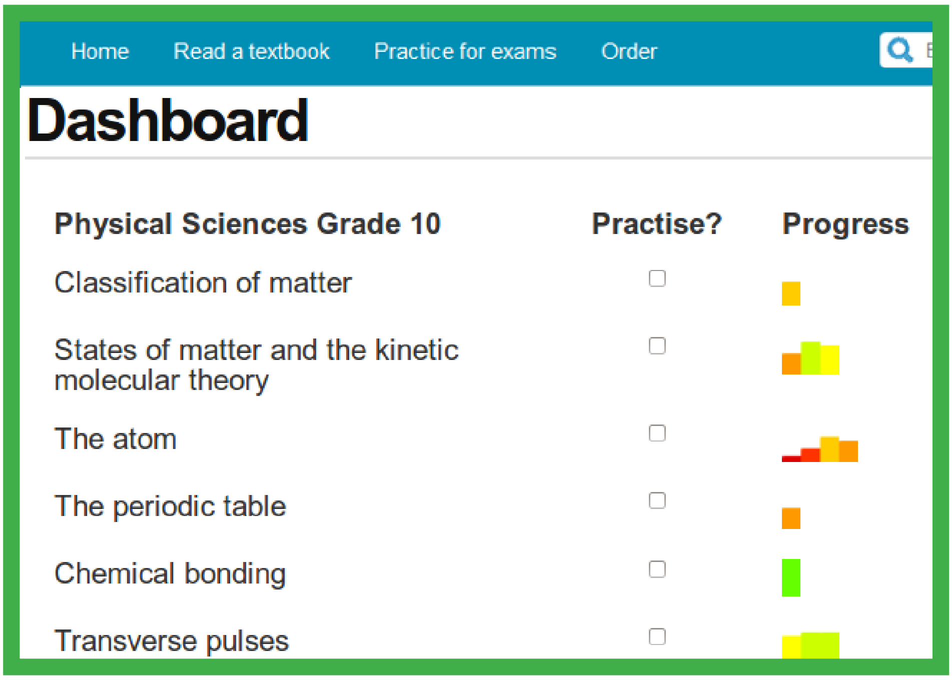


m.everythingmaths.co.za en ***m.everythingscience.co.za***

BESTUUR JOU STUDIES

- ## *JOU 'DASHBOARD'*

Indien jy jou huiswerk en oefenvrae op ***m.everythingmaths.co.za*** or ***m.everythingscience.co.za*** voltooi, sal dit namens jou rekord hou. Jy sal op jou 'dashboard' kan sien hoe jy vorder, hoe jy elke onderwerp in die boek bemeester het en dit sal jou help om jou studies te bestuur.



SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

EVERYTHING MATHS

Ons dink oor die algemeen aan Wiskunde as 'n vak oor getalle, maar eintlik is Wiskunde 'n taal. As ons dié taal leer praat en verstaan kan ons baie van die natuur se geheime ontdek. Net soos ons iemand se taal moet verstaan om meer van hom/haar te leer, moet ons wiskunde gebruik om meer te leer van alle aspekte van die wêreld 'n of dit nou fisiese wetenskappe, lewenswetenskappe of selfs finansies of ekonomie is.

Die vernaamste skrywers en digters het 'n gawe om woorde só te gebruik dat hulle mooi en inspirerende stories kan vertel. Net so kan ons wiskunde gebruik om konsepte te verduidelik en nuwe dinge te skep. Baie van die moderne tegnologie wat ons lewens beter en makliker maak, is afhanklik van wiskunde. DVDs, Google soektogte en bankkaarte wat met 'n PIN werk, is maar net ën paar voorbeelde. Woorde het nie ontstaan om stories te vertel nie, maar die bestaan daarvan maak dit moontlik. Net so is die wiskunde wat gebruik is om hierdie tegnologie te ontwikkel, nie spesifiek vir hierdie doel ontwikkel nie. Die uitvinders kon egter bestaande wiskundige beginsels gebruik wanner en waar die toepassing daarvan nodig was.

Trouens is daar nie 'n enkele faset van die lewe wat nie deur wiskunde geraak word nie. Baie van die mees gesogte beroepe is afhanklik van wiskunde. Siviele ingenieurs gebruik wiskunde om te bepaal hoe om die beste, nuwe ontwerpe te maak. Ekonome gebruik wiskunde om te beskryf en voorspel hoe die ekonomie sal reageer op sekere veranderinge. Beleggers gebruik wiskunde om die prys van sekere soorte aandele te bepaal of om die risiko verbonde aan sekere beleggings te bereken. Wanneer sagteware-ontwikkelaars programme soos Google skryf, gebruik hulle baie van die wiskundige algoritmes om die programme bruikbaar maak.

Selfs in ons daaglikse lewens is wiskunde oral - in die afstand wat ons aflê, tyd en geld. Ons kan ook in kuns, ontwerp en musiek die invloed van wiskunde sien, veral in die proporsies en musikale klanke. Hoe beter ons vermoë om wiskunde te verstaan, hoe beter ons vermoë om die natuur en die skoonheid daarvan te waardeer. Wiskunde is daarom nie net 'n abstrakte dissipline nie, dit omarm logika, simmetrie, harmonie en tegnologiese vooruitgang. Meer as enige ander taal is wiskunde oral en universeel in sy toepassing.

SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

Inhoudsopgawe

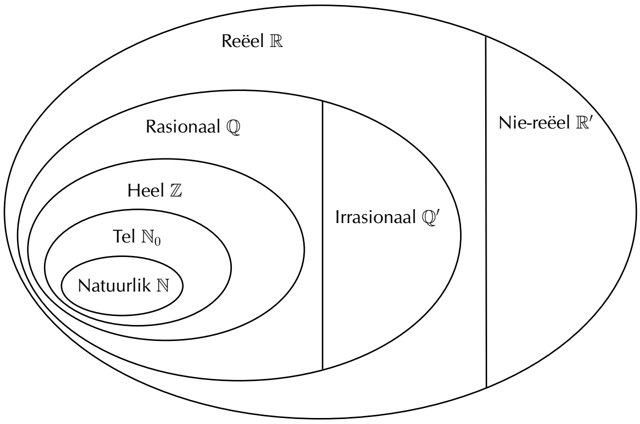
HOOFSTUK 1

Eksponente en wortels

1.1 Hersiening EME2

Die getallestelsel EME3

Die diagram hieronder wys die struktuur van die getallestelsel:



Sien video: 25B4 op www.everythingmaths.co.za

Ons gebruik die volgende definisies:

- $\mathbb{N}$: natuurlike getalle is $\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
- $\mathbb{N}_0$: telgetalle is $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
- $\mathbb{Z}$: heelgetalle is $\{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$: rasionale getalle is getalle wat geskryf kan word as $\frac{a}{b}$ waar a en b heelgetalle is en $b \neq 0$, of as 'n eindige of repeterende desimale getal.

  Voorbeelde: $-\frac{7}{2};\ -2{,}25;\ 0;\ \sqrt{9};\ 0{,}\dot{8};\ \frac{23}{1}$
- $\mathbb{Q}'$: irrasionale getalle is getalle wat nie geskryf kan word as 'n breuk (met die teller en noemer beide heelgetalle) nie. Irrasionale getalle sluit ook in desimale getalle wat nie termineer of repeteer nie.

  Voorbeelde: $\sqrt{3};\ \sqrt[5]{2};\ \pi;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 1{,}27548\ldots$
- $\mathbb{R}$: reële getalle sluit alle rasionale getalle en irrasionale getalle in.
- $\mathbb{R}'$: nie-reële getalle of imaginêre getalle is getalle wat nie reëel is nie.

  Voorbeelde: $\sqrt{-25};\ \sqrt[4]{-1};\ -\sqrt{-\frac{1}{16}}$

Sien video: 25B5 op www.everythingmaths.co.za

Oefening 1 – 1: Die getallestelsel

Gebruik die lys van woorde hieronder om elk van die onderstaande getalle te beskryf (in sommige gevalle sal meer as een woord pas):

- Natuurlik ($\mathbb{N}$)
- Tel ($\mathbb{N}_0$)
- Heel ($\mathbb{Z}$)
- Rasionaal ($\mathbb{Q}$)
- Irrasionaal ($\mathbb{Q}'$)
- Reëel ($\mathbb{R}$)
- Nie-reëel ($\mathbb{R}'$)

1. $\sqrt{7}$
2. $0{,}01$
3. $16\frac{2}{5}$
4. $\sqrt{6\frac{1}{4}}$
5. 0
6. 2π
7. $-5{,}3\dot{8}$
8. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$
9. $-\sqrt{-3}$
10. $(\pi)^2$
11. $-\frac{9}{11}$
12. $\sqrt[3]{-8}$
13. $\frac{22}{7}$
14. $2{,}45897\ldots$
15. $0{,}\overline{65}$
16. $\sqrt[5]{-32}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25B6 2. 25B7 3. 25B8 4. 25B9 5. 25BB 6. 25BC
7. 25BD 8. 25BF 9. 25BG 10. 25BH 11. 25BJ 12. 25BK
13. 25BM 14. 25BN 15. 25BP 16. 25BQ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Eksponentwette EME4

Ons gebruik eksponensiële notasie om aan te dui dat 'n getal of veranderlike 'n aantal kere met homself vermenigvuldig word. Die eksponent, ook genoem die indeks of mag, dui aan hoeveel kere die vermenigvuldiging herhaal word.

$$\text{basis} \longleftarrow a^{n} \longrightarrow \text{eksponent/indeks}$$

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a \quad (n \text{ kere}) \qquad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

Sien video: 25BR op www.everythingmaths.co.za

Voorbeelde:

1. $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$
2. $0{,}71 \times 0{,}71 \times 0{,}71 = (0{,}71)^3$
3. $(501)^2 = 501 \times 501$
4. $k^6 = k \times k \times k \times k \times k \times k$

Vir x^2, sê ons x word gekwadreer en vir y^3, sê ons y word verhef tot die derde mag. In die laaste voorbeeld het ons k^6; ons sê k is verhef tot die sesde mag.

Ons het ook die volgende definisies vir eksponente. Dit is belangrik om te onthou dat ons altyd die finale antwoord met 'n positiewe eksponent moet neerskryf.

- $a^0 = 1$ ($a \neq 0$ omdat 0^0 ongedefinieër is)
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$ omdat $\frac{1}{0}$ ongedefinieër is)

Voorbeelde:

1. $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$
2. $(-36)^0 x = (1)x = x$
3. $\dfrac{7p^{-1}}{q^3 t^{-2}} = \dfrac{7t^2}{pq^3}$

Ons gebruik die volgende reëls om met getalle in eksponentvorm te werk

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$

waar $a > 0$, $b > 0$ en $m, n \in \mathbb{Z}$.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Eksponentwette

VRAAG

Vereenvoudig die volgende:

1. $5(m^{2t})^p \times 2(m^{3p})^t$
2. $\dfrac{8k^3x^2}{(xk)^2}$

3. $\dfrac{2^2 \times 3 \times 7^4}{(7 \times 2)^4}$

4. $3(3^b)^a$

OPLOSSING

1. $5(m^{2t})^p \times 2(m^{3p})^t = 10m^{2pt+3pt} = 10m^{5pt}$

2. $\dfrac{8k^3x^2}{(xk)^2} = \dfrac{8k^3x^2}{x^2k^2} = 8k^{(3-2)}x^{(2-2)} = 8k^1x^0 = 8k$

3. $\dfrac{2^2 \times 3 \times 7^4}{(7 \times 2)^4} = \dfrac{2^2 \times 3 \times 7^4}{7^4 \times 2^4} = 2^{(2-4)} \times 3 \times 7^{(4-4)} = 2^{-2} \times 3 = \frac{3}{4}$

4. $3(3^b)^a = 3 \times 3^{ab} = 3^{ab+1}$

Uitgewerkte voorbeeld 2: Eksponentwette

VRAAG

Vereenvoudig: $\dfrac{3^m - 3^{m+1}}{4 \times 3^m - 3^m}$

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig na 'n vorm wat gefaktoriseer kan word

$$\frac{3^m - 3^{m+1}}{4 \times 3^m - 3^m} = \frac{3^m - (3^m \times 3)}{4 \times 3^m - 3^m}$$

Stap 2: Haal 'n gemene faktor uit

$$= \frac{3^m(1-3)}{3^m(4-1)}$$

Stap 3: Kanselleer die gemene faktor en vereenvoudig

$$\begin{aligned} &= \frac{1-3}{4-1} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Oefening 1 – 2: Eksponentwette

Vereenvoudig die volgende:

1. $4 \times 4^{2a} \times 4^2 \times 4^a$
2. $\dfrac{3^2}{2^{-3}}$
3. $(3p^5)^2$
4. $\dfrac{k^2k^{3x-4}}{k^x}$
5. $(5^{z-1})^2 + 5^z$
6. $(\frac{1}{4})^0$
7. $(x^2)^5$
8. $(\frac{a}{b})^{-2}$
9. $(m+n)^{-1}$
10. $2(p^t)^s$
11. $\dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}}$
12. $\frac{k^0}{k^{-1}}$
13. $\dfrac{-2}{-2^{-a}}$
14. $\dfrac{-h}{(-h)^{-3}}$
15. $\left(\dfrac{a^2b^3}{c^3d}\right)^2$
16. $10^7(7^0) \times 10^{-6}(-6)^0 - 6$
17. $m^3n^2 \div nm^2 \times \frac{mn}{2}$
18. $(2^{-2} - 5^{-1})^{-2}$
19. $(y^2)^{-3} \div \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-1}$
20. $\dfrac{2^{c-5}}{2^{c-8}}$
21. $\dfrac{2^{9a} \times 4^{6a} \times 2^2}{8^{5a}}$
22. $\dfrac{20t^5p^{10}}{10t^4p^9}$
23. $\left(\dfrac{9q^{-2s}}{q^{-3s}y^{-4a-1}}\right)^2$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25BT	2. 25BV	3. 25BW	4. 25BX	5. 25BY	6. 25BZ
7. 25C2	8. 25C3	9. 25C4	10. 25C5	11. 25C6	12. 25C7
13. 25C8	14. 25C9	15. 25CB	16. 25CC	17. 25CD	18. 25CF
19. 25CG	20. 25CH	21. 25CJ	22. 25CK	23. 25CM	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Sien video: 25BS op www.everythingmaths.co.za

1.2 Rasionale eksponente en wortels EME5

Die wette van eksponente kan uitgebrei word om ook die rasionale getalle in te sluit. ’n Rasionale getal is enige getal wat geskryf kan word as ’n breuk met ’n heelgetal teller en ’n heelgetal noemer. Ons het ook die volgende definisies vir werk met rasionale eksponente.

- As $r^n = a$, dan $r = \sqrt[n]{a} \quad (n \geq 2)$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{-\frac{1}{n}} = (a^{-1})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$
- $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

waar $a > 0$, $r > 0$ en $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Vir $\sqrt{25} = 5$, sê ons 5 is die vierkantswortel van 25 en vir $\sqrt[3]{8} = 2$, sê ons 2 is die derdemagswortel van 8. Vir $\sqrt[5]{32} = 2$, sê ons 2 is die vyfmagswortel van 32.

Wanneer ons met eksponente werk, verwys 'n wortel na 'n getal wat herhaaldelik met homself vermenigvuldig word om 'n nuwe getal te kry. 'n Wortel verwys na 'n getal wat geskryf word soos hieronder aangedui.

graad

wortelteken $\longrightarrow \sqrt[n]{a}$ } wortelvorm

determinant

Sien video: 25CN op www.everythingmaths.co.za

Die wortelteken en graad dui aan watter wortel word bepaal. Die determinant is die getal onder die wortelteken.

- As n 'n ewe natuurlike getal is, moet die determinant positief wees, anders sal die wortels nie-reëel wees. Byvoorbeeld, $\sqrt[4]{16} = 2$ as $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, maar die wortels van $\sqrt[4]{-16}$ is nie-reëel aangesien $(-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \neq -16$.
- As n 'n onewe natuurlike getal is, dan kan die determinant positief of negatief wees. Byvoorbeeld, $\sqrt[3]{27} = 3$ aangesien $3 \times 3 \times 3 = 27$ en $\sqrt[3]{-27} = -3$ aangesien $(-3) \times (-3) \times (-3) = -27$.

Dit is ook moontlik dat daar meer as een n^{de} wortel van 'n getal is. Byvoorbeeld, $(-2)^2 = 4$ en $2^2 = 4$, dus is beide -2 en 2 vierkantswortels van 4.

'n Wortelvorm gee 'n irrasionale getal as antwoord. Irrasionale getalle is getalle wat nie geskryf kan word as 'n breuk met 'n heelgetal as teller asook 'n heelgetal as noemer nie. Byvoorbeeld, $\sqrt{12}$, $\sqrt[3]{100}$, $\sqrt[5]{25}$ is wortelvorme.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Rasionale eksponente

VRAAG

Skryf elk van die volgende as 'n wortel en vereenvoudig waar moontlik:

1. $18^{\frac{1}{2}}$
2. $(-125)^{-\frac{1}{3}}$

3. $4^{\frac{3}{2}}$
4. $(-81)^{\frac{1}{2}}$
5. $(0{,}008)^{\frac{1}{3}}$

OPLOSSING

1. $18^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18}$
2. $(-125)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-125)^{-1}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{-125}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{(-5)^3}} = -\dfrac{1}{5}$
3. $4^{\frac{3}{2}} = (4^3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$
4. $(-81)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-81} = \text{not real}$
5. $(0{,}008)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{1000}} = \sqrt[3]{\dfrac{2^3}{10^3}} = \frac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$

Sien video: 25CP op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 4: Rasionale eksponente

VRAAG

Vereenvoudig sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

$$\left(\frac{5}{4^{-1} - 9^{-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die breuk met positiewe eksponente in die noemer

$$\left(\frac{5}{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Stap 2: Vereenvoudig die noemer

$$= \left(\frac{5}{\frac{9-4}{36}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{5}{\frac{5}{36}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(5 \div \frac{5}{36}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(5 \times \frac{36}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (36)^{\frac{1}{2}}$$

Stap 3: Neem die vierkantswortel

$$= \sqrt{36}$$

$$= 6$$

Oefening 1 – 3: Rasionale eksponente en wortels

1. Vereenvoudig die volgende en skryf die antwoorde met positiewe eksponente:

   a) $\sqrt{49}$

   b) $\sqrt{36^{-1}}$

   c) $\sqrt[3]{6^{-2}}$

   d) $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$

   e) $\sqrt[4]{(16x^4)^3}$

2. Vereenvoudig:

   a) $s^{\frac{1}{2}} \div s^{\frac{1}{3}}$

   b) $\left(64m^6\right)^{\frac{2}{3}}$

   c) $\dfrac{12m^{\frac{7}{9}}}{8m^{-\frac{11}{9}}}$

   d) $(5x)^0 + 5x^0 - (0{,}25)^{-0{,}5} + 8^{\frac{2}{3}}$

3. Gebruik die wette om die volgende uitdrukking te herskryf as 'n mag van x:

   $$x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25CR 1b. 25CS 1c. 25CT 1d. 25CV 1e. 25CW 2a. 25CX
2b. 25CY 2c. 25CZ 2d. 25D2 3. 25D3

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Vereenvoudiging van wortelvorme EME6

Ons het in die vorige voorbeelde en oefeninge gesien dat rasionale eksponente naby verwant is aan wortelvorme. Dit is gewoonlik sinvol om 'n wortelvorm in eksponent-notasie te skryf, aangesien dit jou toelaat om die eksponentwette te gebruik.

Gebruik die lys van woorde hieronder om elk van die volgende getalle te beskryf (in sommige gevalle sal meer as een woord pas).

- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

Sien video: 25CQ op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 5: Vereenvoudiging van wortelvorme

VRAAG

Dui aan dat:

1. $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

OPLOSSING

1. $$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} &= a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}\\ &= (ab)^{\frac{1}{n}}\\ &= \sqrt[n]{ab}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}\\ &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\end{aligned}$$

Voorbeelde:

1. $\sqrt{2} \times \sqrt{32} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8$
2. $\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
3. $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

Gelyksoortige en ongelyksoortige wortelvorme EME7

Twee wortelvorme $\sqrt[m]{a}$ en $\sqrt[n]{b}$ is gelyksoortige wortelvorme as $m = n$, anders word hulle ongelyksoortige wortelvorme genoem. Byvoorbeeld, $\sqrt{\frac{1}{3}}$ en $-\sqrt{61}$ is gelyksoortige wortelvorme aangesien $m = n = 2$. Voorbeelde van ongelyksoortige wortelvorme is $\sqrt[3]{5}$ en $\sqrt[5]{7y^3}$ aangesien $m \neq n$.

Eenvoudigste wortelvorm EME8

Ons kan soms wortelvorme vereenvoudig deur die determinant te skryf as 'n produk van faktore wat verder vereenvoudig kan word, deur gebruik te maak van $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$.

Sien video: 25D4 op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 6: Eenvoudigste wortelvorm

VRAAG

Skryf die volgende in die eenvoudigste wortelvorm $\sqrt{50}$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die determinant as 'n produk van priemfaktore

$$\begin{aligned} \sqrt{50} &= \sqrt{5 \times 5 \times 2} \\ &= \sqrt{5^2 \times 2} \end{aligned}$$

Stap 2: Vereenvoudig deur middel van $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} \\ &= 5 \times \sqrt{2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Some kan 'n wortelvorm nie vereenvoudig word nie. Byvoorbeeld, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{30}$ en $\sqrt[4]{42}$ is reeds in die eenvoudigste vorm.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Eenvoudigste wortelvorm

VRAAG

Skryf die volgende in die eenvoudigste wortelvorm $\sqrt[3]{54}$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die determinant as 'n produk van priemfaktore

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{54} &= \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 2} \\ &= \sqrt[3]{3^3 \times 2}\end{aligned}$$

Stap 2: Vereenvoudig deur middel van $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$$\begin{aligned}&= \sqrt[3]{3^3} \times \sqrt[3]{2} \\ &= 3 \times \sqrt[3]{2} \\ &= 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Eenvoudigste wortelvorm

VRAAG

Vereenvoudig: $\sqrt{147} + \sqrt{108}$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die determinantgetalle as 'n produk van priemfaktore

$$\begin{aligned}\sqrt{147} + \sqrt{108} &= \sqrt{49 \times 3} + \sqrt{36 \times 3} \\ &= \sqrt{7^2 \times 3} + \sqrt{6^2 \times 3}\end{aligned}$$

Stap 2: Vereenvoudig deur middel van $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{7^2} \times \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{6^2} \times \sqrt{3}\right) \\
&= \left(7 \times \sqrt{3}\right) + \left(6 \times \sqrt{3}\right) \\
&= 7\sqrt{3} + 6\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

Stap 3: Vereenvoudig en skryf die finale antwoord

$$13\sqrt{3}$$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Eenvoudigste wortelvorm

VRAAG

Vereenvoudig: $\left(\sqrt{20} - \sqrt{5}\right)^2$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die determinante waar moontlik

$$\left(\sqrt{20} - \sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{4 \times 5} - \sqrt{5}\right)^2$$

Stap 2: Vereenvoudig deur middel van $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{4} \times \sqrt{5} - \sqrt{5}\right)^2 \\
&= \left(2 \times \sqrt{5} - \sqrt{5}\right)^2 \\
&= \left(2\sqrt{5} - \sqrt{5}\right)^2
\end{aligned}
$$

Stap 3: Vereenvoudig en skryf die finale antwoord

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{5}\right)^2 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Uitgewerkte voorbeeld 10: Eenvoudigste wortelvorm met breuke

VRAAG

Skryf in die eenvoudigste wortelvorm: $\sqrt{75} \times \sqrt[3]{(48)^{-1}}$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die determinante waar moontlik

$$\begin{aligned} \sqrt{75} \times \sqrt[3]{(48)^{-1}} &= \sqrt{25 \times 3} \times \sqrt[3]{\frac{1}{48}} \\ &= \sqrt{25 \times 3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{8 \times 6}} \end{aligned}$$

Stap 2: Vereenvoudig deur middel van $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{25} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{6}} \\ &= 5 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2 \times \sqrt[3]{6}} \end{aligned}$$

Stap 3: Vereenvoudig en skryf die finale antwoord

$$\begin{aligned} &= 5\sqrt{3} \times \frac{1}{2\sqrt[3]{6}} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{6}} \end{aligned}$$

Oefening 1 – 4: Vereenvoudiging van wortelvorme

1. Vereenvoudig die volgende en skryf die antwoorde met positiewe eksponente:

   a) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4}$

   b) $\sqrt{a^2b^3} \times \sqrt{b^5c^4}$

   c) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

   d) $\sqrt{x^2y^{13}} \div \sqrt{y^5}$

2. Vereenvoudig die volgende:

a) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$

b) $\frac{b-a}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25D5 1b. 25D6 1c. 25D7 1d. 25D8 2a. 25D9 2b. 25DB

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Rasionalisering van die noemers EME9

Dit is gewoonlik makliker om te werk met breuke wat rasionale noemers het, eerder as wortelvormnoemers. Deur die noemer te rasionaliseer, verander ons 'n breuk met 'n wortelvorm in die noemer tot 'n breuk wat 'n rasionale noemer het.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Rasionalisering van die noemer

VRAAG

Rasionalisering van die noemer:

$$\frac{5x-16}{\sqrt{x}}$$

OPLOSSING

Stap 1: Vermenigvuldig die breuk met $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Let op dat $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$, dus het die waarde van die breuk nie verander nie.

$$\frac{5x-16}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(5x-16)}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}$$

Stap 2: Vereenvoudig die noemer

$$= \frac{\sqrt{x}(5x-16)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(5x-16)}{x}$$

Die term in die noemer is verander van 'n wortelvorm na 'n rasionale getal. Ons verkies om uitdrukkings te skryf met die wortelvorm in die teller.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Rasionalisering van die noemer

VRAAG

Skryf die volgende met 'n rasionale noemer:

$$\frac{y-25}{\sqrt{y}+5}$$

OPLOSSING

Stap 1: Vermenigvuldig die breuk met $\frac{\sqrt{y}-5}{\sqrt{y}-5}$

Om die wortelvorm uit die noemer te haal, moet ons eers die breuk vereenvoudig met 'n uitdrukking wat 'n verskil in vierkante in die noemer tot gevolg sal hê.

$$\frac{y-25}{\sqrt{y}+5} \times \frac{\sqrt{y}-5}{\sqrt{y}-5}$$

Stap 2: Vereenvoudig die noemer

$$\begin{aligned}
&= \frac{(y-25)(\sqrt{y}-5)}{(\sqrt{y}+5)(\sqrt{y}-5)} \\
&= \frac{(y-25)(\sqrt{y}-5)}{(\sqrt{y})^2-25} \\
&= \frac{(y-25)(\sqrt{y}-5)}{y-25} \\
&= \sqrt{y}-5
\end{aligned}$$

Sien video: 25DC op www.everythingmaths.co.za

Oefening 1 – 5: Rasionalisering van die noemer

Rasionaliseer die noemer in elk van die volgende:

1. $\frac{10}{\sqrt{5}}$
2. $\frac{3}{\sqrt{6}}$
3. $\frac{2}{\sqrt{3}} \div d\frac{\sqrt{2}}{3}$
4. $\frac{3}{\sqrt{5}-1}$
5. $\frac{x}{\sqrt{y}}$
6. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$
7. $\frac{3\sqrt{p}-4}{\sqrt{p}}$
8. $\frac{t-4}{\sqrt{t}+2}$
9. $(1+\sqrt{m})^{-1}$
10. $a\left(\sqrt{a} \div \sqrt{b}\right)^{-1}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25DD 2. 25DF 3. 25DG 4. 25DH 5. 25DJ 6. 25DK
7. 25DM 8. 25DN 9. 25DP 10. 25DQ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

1.3 Oplos van wortelvormvergelykings EMEB

Ons moet ook vergelykings wat wortelvorme bevat, kan oplos.

Sien video: 25DR op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 13: Vergelykings met wortelvorme

VRAAG

Los op vir x: $5\sqrt[3]{x^4} = 405$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf in eksponensiële notasie

$$\begin{aligned} 5\left(x^4\right)^{\frac{1}{3}} &= 405 \\ 5x^{\frac{4}{3}} &= 405 \end{aligned}$$

Stap 2: Deel beide kante van die vergelyking deur 5 en vereenvoudig

$$\begin{aligned} \frac{5x^{\frac{4}{3}}}{5} &= \frac{405}{5} \\ x^{\frac{4}{3}} &= 81 \\ x^{\frac{4}{3}} &= 3^4 \end{aligned}$$

Stap 3: Vereenvoudig die eksponente

$$\begin{aligned} \left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} &= \left(3^4\right)^{\frac{3}{4}} \\ x &= 3^3 \\ x &= 27 \end{aligned}$$

Stap 4: Kontroleer die oplossing deur die antwoord terug te stel in die oorspronklike vergelyking

$$
\begin{aligned}
\text{LK} &= 5\sqrt[3]{x^4} \\
&= 5(27)^{\frac{4}{3}} \\
&= 5(3^3)^{\frac{4}{3}} \\
&= 5(3^4) \\
&= 405 \\
&= \text{RK}
\end{aligned}
$$

Uitgewerkte voorbeeld 14: Vergelykings met wortelvorme

VRAAG

Los op vir z: $z - 4\sqrt{z} + 3 = 0$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer

$$
\begin{aligned}
z - 4\sqrt{z} + 3 &= 0 \\
z - 4z^{\frac{1}{2}} + 3 &= 0 \\
(z^{\frac{1}{2}} - 3)(z^{\frac{1}{2}} - 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Stap 2: Los op vir beide faktore

Die nulprodukwet bepaal: as $a \times b = 0$ dan $a = 0$ of $b = 0$.

$$(z^{\frac{1}{2}} - 3) = 0 \text{ of } (z^{\frac{1}{2}} - 1) = 0$$

Dus

$$
\begin{aligned}
z^{\frac{1}{2}} - 3 &= 0 \\
z^{\frac{1}{2}} &= 3 \\
\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 3^2 \\
z &= 9
\end{aligned}
$$

of

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} - 1 &= 0 \\ z^{\frac{1}{2}} &= 1 \\ \left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 1^2 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Stap 3: Kontroleer die oplossing deur beide antwoorde in die oorspronklike vergelyking te stel

As $z = 9$:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= z - 4\sqrt{z} + 3 \\ &= 9 - 4\sqrt{9} + 3 \\ &= 12 - 12 \\ &= 0 \\ &= \text{RK} \end{aligned}$$

As $z = 1$:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= z - 4\sqrt{z} + 3 \\ &= 1 - 4\sqrt{1} + 3 \\ &= 4 - 4 \\ &= 0 \\ &= \text{RK} \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die oplossing van $z - 4\sqrt{z} + 3 = 0$ is $z = 9$ of $z = 1$.

Uitgewerkte voorbeeld 15: Vergelykings met wortelvorme

VRAAG

Los op vir p: $\sqrt{p-2} - 3 = 0$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die vergelyking met slegs die wortelvorm aan die linkerkant

Gebruik die optellingsinverse om al die ander terme aan die regterkant en slegs die wortelvorm aan die linkerkant te kry.

$$\sqrt{p-2} = 3$$

Stap 2: Kwadreer beide kante van die vergelyking

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{p-2}\right)^2 &= 3^2\\ p-2 &= 9\\ p &= 11\end{aligned}$$

Stap 3: Kontroleer die oplossing deur die antwoord terug te stel in die oorspronklike vergelyking

As $p = 11$:

$$\begin{aligned}\text{LK} &= \sqrt{p-2} - 3\\ &= \sqrt{11-2} - 3\\ &= \sqrt{9} - 3\\ &= 3 - 3\\ &= 0\\ &= \text{RK}\end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die oplossing van $\sqrt{p-2} - 3 = 0$ is $p = 11$.

Oefening 1 – 6: Oplos van wortelvormvergelykings

Los die onbekende veranderlike op (onthou om te kontroleer dat die oplossing geldig is):

1. $2^{x+1} - 32 = 0$
2. $125\left(3^p\right) = 27\left(5^p\right)$
3. $2y^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{4}} + 1 = 0$
4. $t - 1 = \sqrt{7-t}$
5. $2z - 7\sqrt{z} + 3 = 0$
6. $x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} + 1\right) = 6$
7. $2^{4n} - \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = 0$
8. $\sqrt{31 - 10d} = 4 - d$
9. $y - 10\sqrt{y} + 9 = 0$
10. $f = 2 + \sqrt{19 - 2f}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25DS 2. 25DT 3. 25DV 4. 25DW 5. 25DX 6. 25DY
7. 25DZ 8. 25F2 9. 25F3 10. 25F4

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

1.4 Toepassings van eksponentuitdrukkings EMEC

Daar is baie regte wêreld toepassings wat eksponente bevat. Byvoorbeeld, eksponentuitdrukkings word gebruik om bevolkingsgroei te bepaal en hulle word ook gebruik in finansies om verskillende tipes rente te bereken.

Uitgewerkte voorbeeld 16: Toepassings van eksponentuitdrukkings

VRAAG

'n Soort bakterie het 'n baie hoë eksponensiële groeitempo teen 80% elke uur. As daar 10 bakterieë is, bepaal hoeveel daar sal wees na vyf uur, na een dag en na een week.

OPLOSSING

Stap 1: Eksponensiële groei formule

$$\text{finale bevolking} = \text{aanvanklike bevolking} \times (1 + \text{groeipersentasie})^{\text{tydsperiode in ure}}$$

Dus, in hierdie geval:

$$\text{finale bevolking} = 10\,(1{,}8)^n$$

waar n = aantal ure.

Stap 2: In 5 ure

finale bevolking $= 10\,(1{,}8)^5 \approx 189$

Stap 3: In 1 dag = 24 ure

finale bevolking $= 10\,(1{,}8)^{24} \approx 13\ 382\ 588$

Stap 4: in 1 week = 168 ure

finale bevolking $= 10\,(1{,}8)^{168} \approx 7{,}687 \times 10^{43}$

Let daarop dat die antwoord gegee word in wetenskaplike notasie aangesien dit 'n baie groot getal is.

Uitgewerkte voorbeeld 17: Toepassings van eksponentuitdrukkings

VRAAG

'n Baie seldsame spesie diepseevis het 'n besondere lang lewenssiklus en hulle teel baie selde aan. As daar 'n totaal van 821 van hierdie soort vis is en hulle aanwastempo is 2% elke maand, hoeveel van hierdie visse sal daar wees na 'n halwe jaar? Wat sal die visbevolking wees na tien jaar en na 'n honderd jaar?

OPLOSSING

Stap 1: Eksponensiële groei formule

$$\text{finale bevolking} = \text{aanvanklike bevolking} \times (1 + \text{groeipersentasie})^{\text{tydsperiode in ure}}$$

Dus,in hierdie geval:

$$\text{finale bevolking} = 821(1{,}02)^n$$

waar n = aantal maande.

Stap 2: 'n Halwe jaar = 6 maande

finale bevolking $= 821(1{,}02)^6 \approx 925$

Stap 3: In 10 jare = 120 maande

finale bevolking $= 821(1{,}02)^{120} \approx 8838$

Stap 4: In 100 jare = 1200 maande

finale bevolking $= 821(1{,}02)^{1200} \approx 1{,}716 \times 10^{13}$

Let daarop dat hierdie antwoord ook in wetenskaplike notasie gegee word aangesien dit 'n baie groot getal is.

Oefening 1 – 7: Toepassings van eksponentuitdrukkings

1. Nqobani belê R 5530 in 'n rekening wat 'n grootsom uitbetaal aan die einde van 6 jaar. As hy R 9622,20 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank hom aangebied? Gee jou antwoord korrek tot een desimale plek.
2. Die huidige bevolking van Johannesburg is $3\ 885\ 840$ en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika is $0{,}7\%$ p.a. Hoe groot kan die stadsbeplannners verwag sal die bevolking van Johannesburg wees na 13 jaar?
3. Abiona sit 3 boeke in 'n stapel op haar lessenaar. Die volgende dag tel sy die boeke in die stapel en sit dan nog net soveel boeke bo-op die stapel neer. Na hoeveel dae sal sy 'n stapel van 192 boeke hê?

4. 'n Tipe skimmel het 'n baie hoë eksponensiële groeitempo van 40% per uur. As daar aanvanklik 45 individuele skimmelselle in die bevolking is, bepaal dan hoeveel daar sal wees in 19 ure.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25F5 2. 25F6 3. 25F7 4. 25F8

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

1.5 Opsomming EMED

Sien aanbieding: 25F9 op www.everythingmaths.co.za

1. Die getalsisteem:
   - $\mathbb{N}$: natuurlike getalle is $\{1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
   - $\mathbb{N}_0$: telgetalle is $\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
   - $\mathbb{Z}$: heelgetalle is $\{\ldots;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots\}$
   - $\mathbb{Q}$: rasionale getall is getalle wat geskryf kan word as $\frac{a}{b}$ waar a en b heelgetalle is en $b \neq 0$, of as 'n eindigende of as 'n repeterende desimale getal.
   - $\mathbb{Q}'$: irrasionale getalle is getalle wat nie geskryf kan word as 'n breuk (met die teller en noemer beide heelgetalle) nie. Irrasionale getalle sluit ook in desimale getalle wat nie termineer nie, of nie repeteer nie.
   - $\mathbb{R}$: reële getalle sluit alle rasionale getalle en irrasionale getalle in.
   - $\mathbb{R}'$: nie-reële getalle of imaginêre getalle is getalle wat nie-reëel is.

2. Definisies:
   - $a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a \quad (n \text{ kere}) \qquad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$
   - $a^0 = 1 \qquad (a \neq 0$ omdat 0^0 ongedefiniëer is)
   - $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0$ omdat $\dfrac{1}{0}$ ongedefiniëer is)

3. Eksponentwette:
   - $a^m \times a^n = a^{m+n}$
   - $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
   - $(ab)^n = a^n b^n$
   - $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
   - $(a^m)^n = a^{mn}$

   waar $a > 0$, $b > 0$ en $m, n \in \mathbb{Z}$.

4. Rasionale eksponente en wortelvorme:

   - As $r^n = a$, dan $r = \sqrt[n]{a} \quad (n \geq 2)$
   - $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
   - $a^{-\frac{1}{n}} = (a^{-1})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}}$
   - $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

   waar $a > 0$, $r > 0$ en $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

5. Vereenvoudiging van wortelvorme:

   - $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
   - $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
   - $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Oefening 1 – 8: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Vereenvoudig so ver as moontlik:

   a) $8^{-\frac{2}{3}}$

   b) $\sqrt{16} + 8^{-\frac{2}{3}}$

2. Vereenvoudig:

   a) $\left(x^3\right)^{\frac{4}{3}}$

   b) $\left(s^2\right)^{\frac{1}{2}}$

   c) $\left(m^5\right)^{\frac{5}{3}}$

   d) $\left(-m^2\right)^{\frac{4}{3}}$

   e) $-\left(m^2\right)^{\frac{4}{3}}$

   f) $\left(3y^{\frac{4}{3}}\right)^4$

3. Vereenvoudig die volgende:

   a) $\dfrac{3a^{-2}b^{15}c^{-5}}{\left(a^{-4}b^3c\right)^{\frac{-5}{2}}}$

   b) $\left(9a^6b^4\right)^{\frac{1}{2}}$

   c) $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^{16}$

   d) $x^3\sqrt{x}$

   e) $\sqrt[3]{x^4b^5}$

4. Herskryf die volgende uitdrukking as 'n mag van x:

   $$\frac{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{x^2}$$

5. Brei uit:

   $\left(\sqrt{x} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)$

6. Rasionaliseer die noemer:

   $$\frac{10}{\sqrt{x} - \frac{1}{x}}$$

7. Skryf as 'n enkele term met 'n rasionale noemer:
$\frac{3}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$

8. Skryf in die eenvoudigste wortelvorm:

a) $\sqrt{72}$
b) $\sqrt{45} + \sqrt{80}$
c) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$
d) $\frac{\sqrt{18} \div \sqrt{72}}{\sqrt{8}}$
e) $\frac{4}{(\sqrt{8} \div \sqrt{2})}$
f) $\frac{16}{(\sqrt{20} \div \sqrt{12})}$

9. Brei uit en vereenvoudig:

a) $\left(2+\sqrt{2}\right)^2$
b) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{8}\right)$
c) $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)$

10. Vereenvoudig, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\sqrt{5}\left(\sqrt{45}+2\sqrt{80}\right)$
b) $\frac{\sqrt{98}-\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$

11. Vereenvoudig:
$\sqrt{98x^6} + \sqrt{128x^6}$

12. Rasionaliseer die noemer:

a) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}$
b) $\frac{y-4}{\sqrt{y}-2}$
c) $\frac{2x-20}{\sqrt{x}-\sqrt{10}}$

13. Evalueer sonder die gebruik van 'n sakrekenaar: $\left(2-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(2+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

14. Bewys (sonder die gebruik van 'n sakrekenaar):
$\sqrt{\frac{8}{3}} + 5\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{10\sqrt{15}+3\sqrt{6}}{6}$

15. Vereenvoudig volkome en toon al jou stappe (moenie 'n sakrekenaar gebruik nie):

$$3^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{12}+\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)}\right]$$

16. Vul die wortelvorm aan die regterkant in wat die volgende bewering sal waar maak: $-3\sqrt{6} \times -2\sqrt{24} = -\sqrt{18} \times \ldots$

17. Los op vir die onbekende veranderlike:

    a) $3^{x-1} - 27 = 0$

    b) $8^{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = 0$

    c) $27(4^{x}) = (64)3^{x}$

    d) $\sqrt{2x-5} = 2 - x$

    e) $2x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

18. a) Wys dat $\sqrt{\frac{3^{x+1} - 3^{x}}{3^{x-1}} + 3}$ gelyk is aan 3

    b) Los vervolgens op $\sqrt{\frac{3^{x+1} - 3^{x}}{3^{x-1}} + 3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25FB	1b. 25FC	2a. 25FD	2b. 25FF	2c. 25FG	2d. 25FH
2e. 25FJ	2f. 25FK	3a. 25FM	3b. 25FN	3c. 25FP	3d. 25FQ
3e. 25FR	4. 25FS	5. 25FT	6. 25FV	7. 25FW	8a. 25FX
8b. 25FY	8c. 25FZ	8d. 25G2	8e. 25G3	8f. 25G4	9a. 25G5
9b. 25G6	9c. 25G7	10a. 25G8	10b. 25G9	11. 25GB	12a. 25GC
12b. 25GD	12c. 25GF	13. 25GG	14. 25GH	15. 25GJ	16. 25GK
17a. 25GM	17b. 25GN	17c. 25GP	17d. 25GQ	17e. 25GR	18. 25GS

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 2

Vergelykings en ongelykhede

2.1 Hersiening EMEF

Die oplos van kwadratiese vergelykings deur faktorisering EMEG

Terminologie	
Uitdrukking	’n Uitdrukking is ’n term of groep terme bestaande uit getalle, veranderlikes en basiese operatore $(+, -, \times, \div, x^n)$.
Vergelyking	’n Wiskundige stelling wat sê dat twee uitdrukkings gelyk is.
Ongelykheid	’n Ongelykheid dui die verhouding tussen twee uitdrukkings aan $(>, <, \geq, \leq)$.
Oplossing	’n Waarde of stel waardes wat ’n vergelyking/ongelykheid bevredig.
Wortel	Die waarde van x wat so is dat $f(x) = 0$.

’n Kwadratiese vergelyking is ’n tweedegraadse vergelyking (een veranderlike het ’n eksponent van 2).

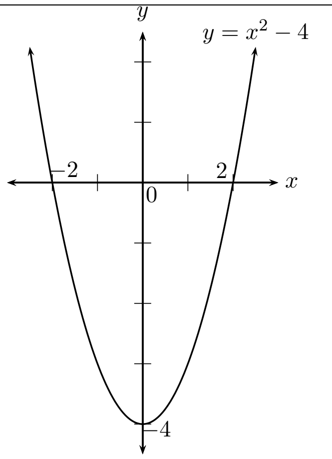
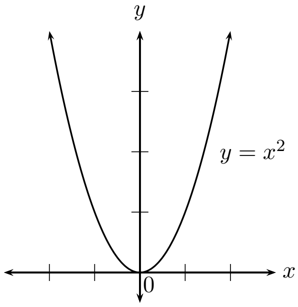
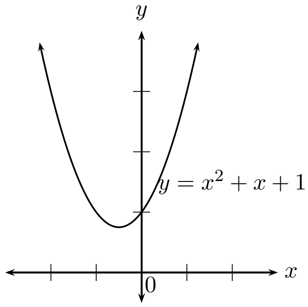
Die volgende is voorbeelde van kwadratiese vergelykings:

$$2x^2 - 5x = 12$$

$$a(a-3) - 10 = 0$$

$$\frac{3b}{b+2} + 1 = \frac{4}{b+1}$$

’n Kwadratiese vergelyking het die maksimum twee oplossings (of wortels). Daar is egter sommige gevalle waar die vergelyking slegs een of dalk geen oplossings het nie.

		
$y = (x-2)(x+2)$ $= x^2 - 4$ Die grafiek van 'n kwadratiese vergelyking met twee wortels: $x = -2$ en $x = 2$.	$y = x^2$ Die grafiek van 'n kwadratiese vergelyking met een wortel: $x = 0$.	$y = x^2 + x + 1$ Die grafiek van 'n kwadratiese vergelyking met geen reële wortels nie.

Een metode vir die oplos van kwadratiese vergelykings is faktorisering. Die standaardvorm van 'n kwadratiese vergelyking is $ax^2 + bx + c = 0$. Dit dien as die beginpunt vir die oplos van enige vergelyking m.b.v. faktorisering.

Dit is baie belangrik om te onthou dat een kant van die vergelyking gelyk aan nul moet wees.

Ondersoek: Nulprodukwet

Los die volgende vergelykings op:

1. $6 \times 0 = ?$
2. $-25 \times 0 = ?$
3. $0 \times 0{,}69 = ?$
4. $7 \times ? = 0$

Vind nou die waarde van veranderlike in elk van die volgende:

1. $6 \times m = 0$
2. $32 \times x \times 2 = 0$
3. $11(z - 3) = 0$
4. $(k + 3)(k - 4) = 0$

Om die twee wortels te kry, gebruik ons die feit dat indien $a \times b = 0$, is $a = 0$ en/of $b = 0$. Dit staan bekend as die Nulprodukwet.

Metode vir die oplos van kwadratiese vergelykings EMEH

1. Herskryf die vergelyking in die standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$.
2. Deel die hele vergelyking deur 'n gemene faktor van die koëffisiënte om 'n eenvoudiger uitdrukking te verkry in die vorm $ax^2 + bx + c = 0$, waar a, b en c geen gemeenskaplike faktore het nie.
3. Faktoriseer $ax^2 + bx + c = 0$ na die vorm $(rx + s)(ux + v) = 0$.
4. Die twee oplossings is

$$(rx + s) = 0 \qquad\qquad (ux + v) = 0$$

$$\text{Dus, } x = -\frac{s}{r} \qquad\qquad \text{Dus, } x = -\frac{v}{u}$$

5. Toets altyd jou antwoorde deur dit terug te stel in die oorspronklike vergelyking.

Sien video: 25GT op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Die oplos van kwadratiese vergelykings deur faktorisering

VRAAG

Los op vir x: $x(x-3) = 10$

OPLOSSING

Stap 1: Herskryf die vergelyking in die vorm $ax^2 + bx + c = 0$

Brei die hakies uit en trek 10 van beide kante van die vergelyking af $x^2 - 3x - 10 = 0$

Stap 2: Faktoriseer

$(x+2)(x-5) = 0$

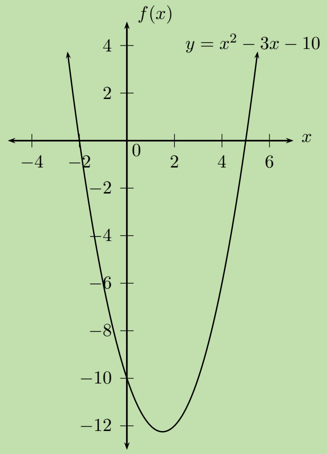
Stap 3: Los beide faktore op

$$\begin{aligned} x + 2 &= 0 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} x - 5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Die grafiek wys die wortels van die vergelyking $x = -2$ of $x = 5$. Hierdie grafiek vorm nie deel van die antwoord nie, dit word net getoon vir duidelikheid.



Stap 4: Toets die oplossing deur dit terug te stel in die oorspronklike vergelyking

Stap 5: Skryf die finale oplossing

$x = -2$ of $x = 5$

Uitgewerkte voorbeeld 2: Die oplos van kwadratiese vergelykings deur faktorisering

VRAAG

Los die vergelyking $2x^2 - 5x - 12 = 0$ op.

OPLOSSING

Stap 1: Daar is geen gemeenskaplike faktore nie

Stap 2: Die kwadratiese vergelyking is reeds in die standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$

Stap 3: Faktoriseer

Ons moet die kombinasie van faktore van 2 en 12 bepaal wat die middelterm 5 sal lewer.

Ons vind dat 2×1 en 3×4 lewer 'n middeltermkoëffisiënt van 5, so ons kan die vergelyking as volg faktoriseer

$$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

Stap 4: Vind beide wortels

Ons het

$$
\begin{aligned}
2x + 3 &= 0 \\
x &= -\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

of

$$
\begin{aligned}
x - 4 &= 0 \\
x &= 4
\end{aligned}
$$

Stap 5: Toets die oplossing deur dit terug te stel in die oorspronklike vergelyking

Stap 6: Skryf die finale oplossing

$x = -\frac{3}{2}$ of $x = 4$.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Die oplos van kwadratiese vergelykings deur faktorisering

VRAAG

Los op vir y: $y^2 - 7 = 0$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer deur verskil van vierkante

Ons weet dat

$$\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$$

Ons kan die vergelyking as

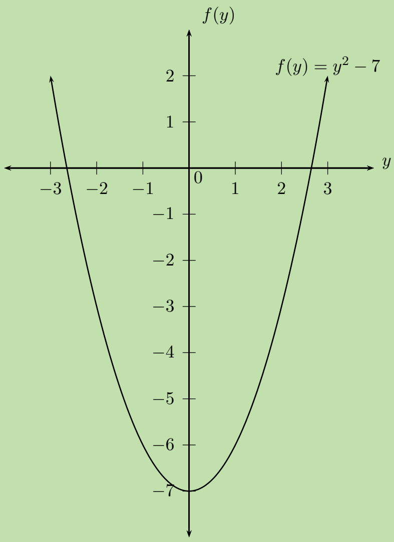
$$y^2 - (\sqrt{7})^2 = 0$$

skryf

Stap 2: Faktoriseer

$$
\begin{aligned}
(y - \sqrt{7})(y + \sqrt{7}) &= 0 \\
\therefore y = \sqrt{7} \text{ of } y &= -\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

Selfs al is daar nie vir 'n skets gevra nie, is dit dikwels baie handig om die grafiek te teken. Ons kan sê $f(y) = y^2 - 7$ en 'n rowwe sketsgrafiek maak om te sien waar die wortels lê.



Stap 3: Toets die oplossing deur dit terug te stel in die oorspronklike vergelyking

Stap 4: Skryf die finale oplossing

$y = \pm\sqrt{7}$

Uitgewerkte voorbeeld 4: Die oplos van kwadratiese vergelykings deur faktorisering

VRAAG

Los op vir b:

$$\frac{3b}{b+2} + 1 = \frac{4}{b+1}$$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die beperkings

Die beperkings is die waardes vir b wat daartoe sal lei dat die noemer gelyk is aan 0, en die breuk ongedefiniëerd sal maak. Daarom, $b \neq -2$ en $b \neq -1$.

Stap 2: Bepaal die kleinste gemene noemer

Bepaal die kleinste gemene noemer $(b+2)(b+1)$.

Stap 3: Vermenigvuldig elke term in die vergelyking met die kleinste gemene noemer en vereenvoudig

$$\frac{3b(b+2)(b+1)}{b+2} + (b+2)(b+1) = \frac{4(b+2)(b+1)}{b+1}$$

$$3b(b+1) + (b+2)(b+1) = 4(b+2)$$

$$3b^2 + 3b + b^2 + 3b + 2 = 4b + 8$$

$$4b^2 + 2b - 6 = 0$$

$$2b^2 + b - 3 = 0$$

Stap 4: Faktoriseer en los die vergelyking op

$$(2b+3)(b-1) = 0$$

$$2b + 3 = 0 \text{ of } b - 1 = 0$$

$$b = -\frac{3}{2} \text{ of } b = 1$$

Stap 5: Toets die oplossing deur dit terug te stel in die oorspronklike vergelyking

Stap 6: Skryf die finale oplossing

$b = -1\frac{1}{2}$ of $b = 1$

Uitgewerkte voorbeeld 5: Kwadreer beide kante van die vergelyking

VRAAG

Los op vir m: $m + 2 = \sqrt{7 + 2m}$

OPLOSSING

Stap 1: Kwadreer beide kante van die vergelyking

Voor ons beide kante van die vergelyking kwadreer, moet ons seker maak dat die wortel die enigste term aan die een kant van die vergelyking is en al die ander terme aan die ander kant, anders word die vergelyking net meer ingewikkeld om op te los.

$$(m+2)^2 = \left(\sqrt{7+2m}\right)^2$$

Stap 2: Brei die hakies uit en vereenvoudig

$$\begin{aligned}(m+2)^2 &= \left(\sqrt{7+2m}\right)^2 \\ m^2+4m+4 &= 7+2m \\ m^2+2m-3 &= 0\end{aligned}$$

Stap 3: Faktoriseer en los op vir m

$$\begin{aligned}(m-1)(m+3) &= 0 \\ \therefore m &= 1 \text{ of } m = -3\end{aligned}$$

Stap 4: Toets die oplossing deur dit terug te stel in die oorspronklike vergelyking

Om die oplossing te vind, het ons beide kante van die vergelyking gekwadreer. Deur 'n uitdrukking te kwadreer verander ons negatiewe waardes na positiewe waardes wat ongeldige antwoorde by die oplossing kan voeg. Daarom is dit baie belangrik om te toets dat al die antwoorde geldig is deur dit terug te stel in die oorspronklike vergelyking.

As $m = 1$:

$$\begin{aligned}\text{RK} &= \sqrt{7+2(1)} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \\ \text{LK} &= 1+2 \\ &= 3 \\ \text{LK} &= \text{RK}\end{aligned}$$

$\therefore m = 1$ is geldig.

As $m = -3$:

$$\begin{aligned}\text{RK} &= \sqrt{7+2(-3)} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \\ \text{LK} &= -3+2 \\ &= -1 \\ \text{LK} &\neq \text{RK}\end{aligned}$$

$\therefore m = -3$ is nie geldig nie.

Stap 5: Skryf die finale oplossing

$m = 1$

Sien video: 25GV op www.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 1: Oplossing deur faktorisering

Los die volgende kwadratiese vergelykings op deur faktorisering. Antwoorde mag in wortelvorm gelos word waar nodig.

1. $7t^2 + 14t = 0$
2. $12y^2 + 24y + 12 = 0$
3. $16s^2 = 400$
4. $y^2 - 5y + 6 = 0$
5. $y^2 + 5y - 36 = 0$
6. $4 + p = \sqrt{p + 6}$
7. $-y^2 - 11y - 24 = 0$
8. $13y - 42 = y^2$
9. $(x - 1)(x + 10) = -24$
10. $y^2 - 5ky + 4k^2 = 0$
11. $2y^2 - 61 = 101$
12. $2y^2 - 10 = 0$
13. $-8 + h^2 = 28$
14. $y^2 - 4 = 10$
15. $\sqrt{5 - 2p} - 4 = \frac{1}{2}p$
16. $y^2 + 28 = 100$
17. $f(2f + 1) = 15$
18. $2x = \sqrt{21x - 5}$
19. $\dfrac{5y}{y - 2} + \dfrac{3}{y} + 2 = \dfrac{-6}{y^2 - 2y}$
20. $\dfrac{x + 9}{x^2 - 9} + \dfrac{1}{x + 3} = \dfrac{2}{x - 3}$
21. $\dfrac{y - 2}{y + 1} = \dfrac{2y + 1}{y - 7}$
22. $1 + \dfrac{t - 2}{t - 1} = \dfrac{5}{t^2 - 4t + 3} + \dfrac{10}{3 - t}$
23. $\dfrac{4}{m + 3} + \dfrac{4}{4 - m^2} = \dfrac{5m - 5}{m^2 + m - 6}$
24. $5\sqrt{5t + 1} - 4 = 5t + 1$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25GW	2. 25GX	3. 25GY	4. 25GZ	5. 25H2	6. 25H3
7. 25H4	8. 25H5	9. 25H6	10. 25H7	11. 25H8	12. 25H9
13. 25HB	14. 25HC	15. 25HD	16. 25HF	17. 25HG	18. 25HH
19. 25HJ	20. 25HK	21. 25HM	22. 25HN	23. 25HP	24. 25HQ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.2 Vierkantsvoltooiing EMEJ

Ondersoek: Vierkantsvoltooiing

Kan jy elk van die onderstaande vergelykings oplos deur twee verskillende metodes te gebruik?

1. $x^2 - 4 = 0$
2. $x^2 - 8 = 0$
3. $x^2 - 4x + 4 = 0$

4. $x^2 - 4x - 4 = 0$

Faktorisering van die laaste vergelyking is nogal moeilik. Gebruik die vorige voorbeelde as 'n wenk en probeer om die verskil tussen twee vierkante te verkry.

Sien video: 25HR op www.everythingmaths.co.za

Ons het gesien dat uitdrukkings van die vorm $x^2 - b^2$ as die verskil van vierkante bekend staan en as volg gefaktoriseer word $(x - b)(x + b)$. Hierdie eenvoudige faktorisering lei tot 'n verdere tegniek vir die oplos van kwadratiese vergelykings wat as vierkantsvoltooiing bekend staan.

Beskou die vergelyking $x^2 - 2x - 1 = 0$. Ons kan nie maklik hierdie vergelyking faktoriseer nie. Wanneer ons die volgende volkome vierkant $(x - 1)^2$ uitbrei en die terme beskou, sien ons dat $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

Indien ons die twee vergelykings vergelyk, sien ons dat slegs die konstante terme verskil. Ons kan 'n volkome vierkant skep deur dieselfde hoeveelheid by die oorspronklike vergelyking by te tel en af te trek:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 &= 0 \\ (x^2 - 2x + 1) - 1 - 1 &= 0 \\ (x^2 - 2x + 1) - 2 &= 0 \\ (x - 1)^2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Metode 1: Vind die vierkantswortel aan beide kante van die vergelyking om vir x op te los.

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - 2 &= 0 \\ (x - 1)^2 &= 2 \\ \sqrt{(x - 1)^2} &= \pm\sqrt{2} \\ x - 1 &= \pm\sqrt{2} \\ x &= 1 \pm \sqrt{2} \\ \text{Dus } x &= 1 + \sqrt{2} \text{ of } x = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Baie belangrik: Onthou om altyd 'n positiewe en negatiewe antwoord in te sluit as jy 'n vierkantswortel neem, aangesien $2^2 = 4$ en $(-2)^2 = 4$.

Metode 2: Faktoriseer die uitdrukking as verskil van vierkante deur gebruik te maak van $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2$.

Ons kan skryf

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - 2 &= 0 \\ (x - 1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 &= 0 \\ \left((x - 1) + \sqrt{2}\right)\left((x - 1) - \sqrt{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Die oplossing is dan

$$
\begin{aligned}
(x-1)+\sqrt{2} &= 0 \\
x &= 1-\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

of

$$
\begin{aligned}
(x-1)-\sqrt{2} &= 0 \\
x &= 1+\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

Metode vir die oplos van kwadratiese vergelykings deur vierkantsvoltooiing

1. Skryf die vergelyking in die standaardvorm $ax^2+bx+c=0$.
2. Maak die koëffisiënt van die x^2-term gelyk aan 1 deur die hele vergelyking te deel met a.
3. Neem die helfte van die koëffisiënt van die x term en kwadreer dit; tel dit nou by en trek dit van die vergelyking af sodat dit wiskundig korrek bly. In bostaande voorbeeld het ons 1 bygetel om die vierkant te votooi en toe 1 afgetrek, sodat die vergelyking waar bly.
4. Skryf die linkerkant as die verskil van twee vierkante.
5. Faktoriseer die vergelyking in terme van die verskil van vierkante en los vir x op.

Sien video: 25HS op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 6: Los die kwadratiese vergelykings op deur vierkantsvoltooiing

VRAAG

Los op deur die vierkant te voltooi: $x^2-10x-11=0$

OPLOSSING

Stap 1: Die vergelyking is reeds in die vorm $ax^2+bx+c=0$

Stap 2: Verseker dat die koëffisiënt van die x^2 term is gelyk aan 1

$$x^2-10x-11=0$$

Stap 3: Neem die helfte van die koëffisiënt van die x term en kwadreer dit; tel by en trek af

Die koëffisiënt van die x term is -10. Gevolglik, sal die helfte van die koëffisiënt van die x term -5 wees en die kwadraat sal dan 25 wees. Dus $x^2-10x+25-25-11=0$.

Stap 4: Skryf die drieterm as 'n volkome vierkant

$$
\begin{aligned}
(x^2 - 10x + 25) - 25 - 11 &= 0 \\
(x - 5)^2 - 36 &= 0
\end{aligned}
$$

Stap 5: Metode 1: Neem die vierkantswortel aan beide kante van die vergelyking

$$
\begin{aligned}
(x - 5)^2 - 36 &= 0 \\
(x - 5)^2 &= 36 \\
x - 5 &= \pm\sqrt{36}
\end{aligned}
$$

Belangrik: wanneer die vierkantswortel bepaal word, onthou dat daar beide 'n positiewe en negatiewe antwoord is want $(6)^2 = 36$ en $(-6)^2 = 36$.

$$x - 5 = \pm 6$$

Stap 6: Bepaal vir x

$$x = -1 \text{ of } x = 11$$

Stap 7: Metode 2: Faktoriseer as die verskil tussen twee kwadrate

$$
\begin{aligned}
(x - 5)^2 - (6)^2 &= 0 \\
[(x - 5) + 6]\,[(x - 5) - 6] &= 0
\end{aligned}
$$

Stap 8: Vereenvoudig en bepaal vir x

$$
\begin{aligned}
(x + 1)(x - 11) &= 0 \\
\therefore x = -1 &\text{ of } x = 11
\end{aligned}
$$

Stap 9: Skryf die finale oplossing

$$x = -1 \text{ of } x = 11$$

Let op dat beide metodes dieselfde antwoord lewer. Hierdie wortels is rasionaal aangesien 36 'n volkome vierkant is.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Los die kwadratiese vergelykings op deur vierkantsvoltooiing

VRAAG

Bepaal deur kwadraatsvoltooiing: $2x^2 - 6x - 10 = 0$

OPLOSSING

Stap 1: Die vergelyking is reeds in die standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$

Stap 2: Verseker dat die koëffisiënt van die x^2 term gelyk is aan 1

Die koëffisiënt van die x^2 term is 2. Deel dus die hele vergelyking deur 2:

$$x^2 - 3x - 5 = 0$$

Stap 3: Neem die helfte van die koëffisiënt van die x term, kwadreer dit; tel by en trek af

Die koëffisiënt van die x term is -3, dus $\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$:

$$\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 5 = 0$$

Stap 4: Skryf die drieterm as 'n volkome vierkant

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{20}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} = 0$$

Stap 5: Metode 1: Neem die vierkantswortel aan beide kante van die vergelyking

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{29}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{29}{4}}$$

Onthou: Wanneer die vierkantswortel bepaal word, is daar positiewe en negatiewe antwoorde.

Stap 6: Bepaal vir x

$$
\begin{aligned}
x - \frac{3}{2} &= \pm\sqrt{\frac{29}{4}} \\
x &= \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{29}}{2} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}
\end{aligned}
$$

Stap 7: Metode 2: Faktoriseer as die verskil tussen twee kwadrate

$$
\begin{aligned}
\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{29}{4} &= 0 \\
\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{29}{4}}\right)^2 &= 0 \\
\left(x - \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{29}{4}}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{29}{4}}\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Stap 8: Bepaal vir x

$$
\left(x - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right) = 0
$$

$$
\therefore x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} \text{ of } x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}
$$

Let op dat die wortels irrasionaal is aangesien 29 nie 'n volkome vierkant is nie.

Sien video: 25HT op www.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 2: Oplossing deur kwadraatsvoltooiing

1. Los die volgende vergelykings op deur kwadraatsvoltooiing:

a) $x^2 + 10x - 2 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $p^2 - 5 = -8p$

d) $2(6x + x^2) = -4$

e) $x^2 + 5x + 9 = 0$

f) $t^2 + 30 = 2(10 - 8t)$

g) $3x^2 + 6x - 2 = 0$

h) $z^2 + 8z - 6 = 0$

i) $2z^2 = 11z$

j) $5 + 4z - z^2 = 0$

2. Bepaal k in terme van a: $k^2 + 6k + a = 0$

3. Bepaal y in terme van p, q en r: $py^2 + qy + r = 0$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25HV	1b. 25HW	1c. 25HX	1d. 25HY	1e. 25HZ	1f. 25J2
1g. 25J3	1h. 25J4	1i. 25J5	1j. 25J6	2. 25J7	3. 25J8

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.3 Kwadratiese vergelykings EMEK

Dit is nie altyd moontlik om 'n kwadratiese vergelyking op te los deur faktorisering nie en kwadraatsvoltooiing kan baie tyd in beslag neem. Die metode van kwadraatsvoltooiing lewer wel 'n formule wat gebruik kan word om enige kwadratiese vergelyking vinning en maklik op te los.

Beskou die standaardvorm van die kwadratiese vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$. Deel aan beide kante met a $(a \neq 0)$ om die koëffisiënt van x^2 een te maak

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

Deur gebruik te maak van kwadraatsvoltooiing, halveer ons die koëffisiënt van x en kwadreer dit. Ons tel $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ by en trek dit af, sodat die oorblywende vergelyking waar bly.

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} &= 0 \end{aligned}$$

Ons tel die konstante by aan weerskante van vergelyking en bepaal die vierkantswortel aan beide kante. Hou in gedagte dat positiewe en negatiewe antwoorde ingesluit word.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Gevolglik kan ons die twee wortels van enige kwadratiese vergelyking $ax^2+bx+c=0$ bepaal as

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ of } x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dit is belangrik om daarop op te let dat die uitdrukking b^2-4ac groter of gelyk aan nul moet wees vir die wortels van die kwadraat om reëel te wees. Indien die uitdrukking onder die vierkantswortel kleiner as nul is, is die wortels nie-reëel (imaginêr).

Sien video: 25J9 op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 8: Gebruik van die kwadratiese formule

VRAAG

Bepaal vir x en vereenvoudig tot eenvoudigste vorm as: $2x^2+3x=7$

OPLOSSING

Stap 1: Kontroleer of die vergelyking gefaktoriseer kan word

Die vergelyking kan nie gefaktoriseer word nie, gevolglik moet die algemene kwadratiese formule gebruik word.

Stap 2: Skryf die vergelyking in die standaardvorm $ax^2+bx+c=0$

$$2x^2+3x-7=0$$

Stap 3: Identifiseer die koëffisiënte in die formule

$$a=2; \qquad b=3; \qquad c=-7$$

Stap 4: Pas die kwadratiese formule toe

Skryf altyd eers die formule neer en vervang dan die waardes van a, b en c.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-7)}}{2(2)} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{65}}{4} \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale oplossing

Die twee wortels is $x = \frac{-3 + \sqrt{65}}{4}$ of $x = \frac{-3 - \sqrt{65}}{4}$.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Gebruik van die kwadratiese vergelyking

VRAAG

Vind die wortels van die funksie $f(x) = x^2 - 5x + 8$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die wortels

Om die wortels van $f(x)$ te bepaal, stel ons $x^2 - 5x + 8 = 0$.

Stap 2: Kontroleer of die vergelyking gefaktoriseer kan word

Die vergelyking kan nie gefaktoriseer word nie, gevolglik moet die algemene kwadratiese formule gebruik word.

Stap 3: Identifiseer die koëffisiënte en vervang in die formule

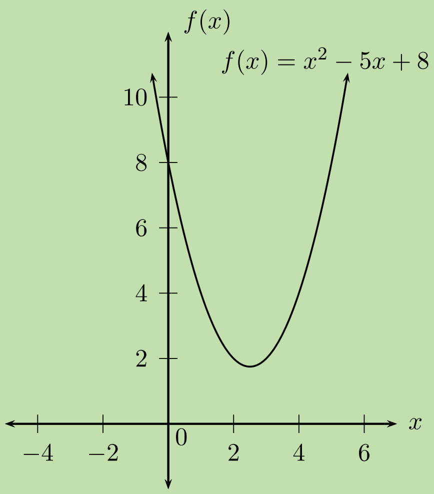
$$a = 1; \qquad b = -5; \qquad c = 8$$

Stap 4: Pas die kwadratiese formule toe

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(8)}}{2(1)} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{-7}}{2} \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale oplossing

Daar is geen reële wortels vir $f(x) = x^2 - 5x + 8$ nie aangesien die uitdrukking onder die vierkantswortel negatief is ($\sqrt{-7}$ is 'n nie-reële getal). Dit beteken dat die grafiek van die kwadratiese funksie geen x-afsnit het nie; die hele grafiek lê dus bo die x-as.



Sien video: 25JB op www.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 3: Oplossing met kwadratiese formule

Bepaal die oplossing van die volgende kwadratiese vergelykings met die kwadratiese formule:

1. $3t^2 + t - 4 = 0$
2. $x^2 - 5x - 3 = 0$
3. $2t^2 + 6t + 5 = 0$
4. $2p(2p + 1) = 2$
5. $-3t^2 + 5t - 8 = 0$
6. $5t^2 + 3t - 3 = 0$
7. $t^2 - 4t + 2 = 0$
8. $9(k^2 - 1) = 7k$
9. $3f - 2 = -2f^2$
10. $t^2 + t + 1 = 0$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25JC 2. 25JD 3. 25JF 4. 25JG 5. 25JH 6. 25JJ
7. 25JK 8. 25JM 9. 25JN 10. 25JP

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.4 Substitusie

Dit help soms om ’n substitusie te doen vir ’n uitdrukking binne in die kwadratiese vergelyking. Dit maak die vergelyking eenvoudiger en makliker om op te los.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Oplossing deur substitusie

VRAAG

Los op vir x: $x^2 - 2x - \frac{3}{x^2 - 2x} = 2$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die beperkings vir x

Die beperkings is die waardes van x wat veroorsaak dat die noemer gelyk is aan 0. Dit sal die breuk ongedefiniëerd maak. Dus $x \neq 0$ en $x \neq 2$.

Stap 2: Substitusie van ’n herhaalde uitdrukking deur ’n enkele veranderlike

Let op dat $x^2 - 2x$ dan herhaal word en gevolglik stel ons $k = x^2 - 2x$. Die vergelyking word dan

$$k - \frac{3}{k} = 2$$

Stap 3: Bepaal die beperkings vir k

Die beperkings is die waardes van k wat veroorsaak dat die noemer gelyk is aan 0. Dit sal die breuk ongedefiniëerd maak. Dus $k \neq 0$.

Stap 4: Bepaal vir k

$$\begin{aligned} k - \frac{3}{k} &= 2 \\ k^2 - 3 &= 2k \\ k^2 - 2k - 3 &= 0 \\ (k+1)(k-3) &= 0 \\ \therefore k = -1 &\text{ of } k = 3 \end{aligned}$$

Ons kontroleer die twee wortels teen die beperkings op k en bevestig dat hulle geldig is.

Stap 5: Gebruik waardes soos bepaal vir k om die oorspronklike veranderlike x te bepaal

Vir $k = -1$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x &= -1 \\
x^2 - 2x + 1 &= 0 \\
(x-1)(x-1) &= 0 \\
\therefore x &= 1
\end{aligned}
$$

Vir $k = 3$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x &= 3 \\
x^2 - 2x - 3 &= 0 \\
(x+1)(x-3) &= 0 \\
\therefore x &= -1 \text{ of } x = 3
\end{aligned}
$$

Ons kontroleer die wortels teen die beperkings van x en bevestig dat al drie geldig is.

Stap 6: Skryf die finale oplossing

Die wortels van die vergelyking is $x = -1$, $x = 1$ en $x = 3$.

Oefening 2 – 4:

Bepaal die oplossing van die volgende kwadratiese vergelykings deur substitusie:

1. $-24 = 10(x^2 + 5x) + (x^2 + 5x)^2$
2. $(x^2 - 2x)^2 - 8 = 7(x^2 - 2x)$
3. $x^2 + 3x - \dfrac{56}{x(x+3)} = 26$
4. $x^2 - 18 + x + \dfrac{72}{x^2 + x} = 0$
5. $x^2 - 4x + 10 - 7(4x - x^2) = -2$
6. $\dfrac{9}{x^2 + 2x - 12} = x^2 + 2x - 12$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25JQ 2. 25JR 3. 25JS 4. 25JT 5. 25JV 6. 25JW

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

2.5 Vind die vergelyking

EMEN

Ons het gesien dat die wortels die oplossings is van 'n kwadratiese vergelyking. Indien die wortels gegee word, kan ons terugwerk en die oorspronklike kwardatiese vergelyking bepaal.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Bepaling van vergelyking wanneer wortels gegee word

VRAAG

Vind die vergelyking met wortels 13 en -5.

OPLOSSING

Stap 1: Ken 'n veranderlike toe en skryf as twee vergelykings

$$x = 13 \text{ of } x = -5$$

Gebruik optellingsinverse om nul aan die regterkant te kry.

$$x - 13 = 0 \text{ of } x + 5 = 0$$

Stap 2: Skryf die produk van die twee faktore neer

$$(x - 13)(x + 5) = 0$$

Let op dat die tekens binne die hakies, die teenoorgestelde is van die gegewe wortels.

Stap 3: Doen hakie uitbreiding

$$x^2 - 8x - 65 = 0$$

Wanneer elke term in die vergelyking vermenigvuldig word met 'n konstante, kan daar baie moontlike vergelykings ontstaan met dieselfde wortels. Byvoorbeeld:

Vermenigvuldig met 2:

$$2x^2 - 16x - 130 = 0$$

Vermenigvuldig met -3:

$$-3x^2 + 24x + 195 = 0$$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Bepaling van 'n vergelyking wanneer die wortels breuke is

VRAAG

Vind 'n vergelyking met die wortels $-\frac{3}{2}$ en 4.

OPLOSSING

Stap 1: Ken 'n veranderlike toe en skryf as twee vergelykings

$$x = 4 \text{ of } x = -\frac{3}{2}$$

Gebruik optellingsinverse om nul aan die regterkant te kry

$$x - 4 = 0 \text{ of } x + \frac{3}{2} = 0$$

Ons vermenigvuldig die tweede vergelyking met 2 om die breuk uit te skakel.

$$x - 4 = 0 \text{ of } 2x + 3 = 0$$

Stap 2: Skryf die produk van twee faktore neer

$$(2x + 3)(x - 4) = 0$$

Stap 3: Doen hakie uitbreiding

Die kwadratiese vergelyking is $2x^2 - 5x - 12 = 0$.

Oefening 2 – 5: Vind die vergelyking

1. Bepaal 'n kwadratiese vergelyking vir die grafiek met die wortels 3 en -2.
2. Vind 'n kwadratiese vergelyking vir grafiek met x-afsnitte $(-4; 0)$ en $(4; 0)$.
3. Bepaal die kwadratiese vergelyking van die vorm $ax^2 + bx + c = 0$, waar a, b en c heeltallig is, met wortels $-\frac{1}{2}$ en 3.
4. Bepaal die waarde van k en die ander wortel van 'n kwadratiese vergelyking $kx^2 - 7x + 4 = 0$, as gegee word dat een van die wortels $x = 1$ is.
5. Een wortel van die vergelyking $2x^2 - 3x = p$ is $2\frac{1}{2}$. Vind p en die ander wortel.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25JX 2. 25JY 3. 25JZ 4. 25K2 5. 25K3

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Oefening 2 – 6: Gemengde oefeninge

Bepaal die oplossing van elk van die volgende kwadratiese vergelykings deur gebruik te maak van faktorisering, of die kwadratiese formule of kwadraatsvoltooiing:

- Probeer altyd om eers te faktoriseer; gebruik die formule as die drieterm nie faktoriseer nie.
- Gebruik kwadraatsvoltooiing slegs wanneer daarvoor gevra word.
- Gee antwoord in wortelvorm of in desimale vorm.

1. $24y^2 + 61y - 8 = 0$
2. $8x^2 + 16x = 42$
3. $9t^2 = 24t - 12$
4. $-5y^2 + 0y + 5 = 0$
5. $3m^2 + 12 = 15m$
6. $49y^2 + 0y - 25 = 0$
7. $72 = 66w - 12w^2$
8. $-40y^2 + 58y - 12 = 0$
9. $37n + 72 - 24n^2 = 0$
10. $6y^2 + 7y - 24 = 0$
11. $3 = x(2x - 5)$
12. $-18y^2 - 55y - 25 = 0$
13. $-25y^2 + 25y - 4 = 0$
14. $8(1 - 4g^2) + 24g = 0$
15. $9y^2 - 13y - 10 = 0$
16. $(7p - 3)(5p + 1) = 0$
17. $-81y^2 - 99y - 18 = 0$
18. $14y^2 - 81y + 81 = 0$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25K4	2. 25K5	3. 25K6	4. 25K7	5. 25K8	6. 25K9
7. 25KB	8. 25KC	9. 25KD	10. 25KF	11. 25KG	12. 25KH
13. 25KJ	14. 25KK	15. 25KM	16. 25KN	17. 25KP	18. 25KQ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.6 Aard van wortels EMEP

Ondersoek:

1. Gebruik die kwadratiese formule om die wortels te bepaal van onderstaande kwadratiese vergelyking en gee aandag aan:
   - die teken van die uitdrukking onder die vierkantswortel
   - die tipe getal vir die finale antwoord (rasionaal/irrasionaal/reëel/nie-reëel)

   a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - 4x + 3 = 0$

c) $x^2 - 4x - 3 = 0$

d) $x^2 - 4x + 7 = 0$

2. Kies die gepaste woorde uit die tabel wat die wortels van bostaande vergelykings beskryf.

rasionaal	ongelyk	reëel
imaginêr	nie volkome vierkant	gelyk
volkome vierkant	irrasionaal	ongedefinëerd

3. Die uitdrukking onder the vierkantswortel, $b^2 - 4ac$, word die diskriminant genoem. Kan jy 'n vermoede of 'n hipotese formuleer oor die verband tussen die diskriminant en die wortels van 'n kwadratiese vergelyking?

Die diskriminant EMEQ

Die diskriminant word gedefiniëer as $\Delta = b^2 - 4ac$.

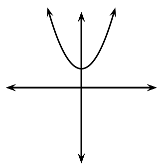
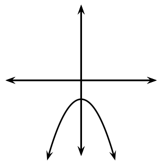
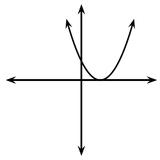
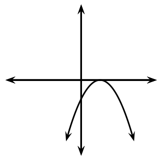
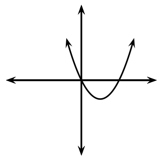
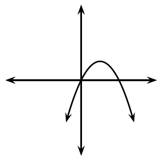
Dit is die uitdrukking onder die vierkantswortel in die kwadratiese formule. Die diskriminant bepaal die "aard" van die wortels van die kwadratiese vergelyking. Die woord "aard" verwys na die tipe getalle wat die wortels kan wees: reëel, rasionaal, irrasionaal of imaginêr. Δ is die Griekse simbool vir die letter D.

Vir 'n kwadratiese funksie $f(x) = ax^2 + bx + c$, word die oplossing van die $f(x) = 0$ gegee deur die formule $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

- Indien $\Delta < 0$, dan is die wortels imaginêr (nie-reëel) en buite die bestek van hierdie boek.
- Indien $\Delta \geq 0$, dan is die uitdrukking onder die vierkantswortel positief en die wortels is daarom reëel. Vir reële wortels is daar verdere moontlikhede.
- Indien $\Delta = 0$, dan is die wortels gelyk en kan ons sê dat daar slegs een wortel is.
- Indien $\Delta > 0$, dan is daar twee moontlikhede vir wortels wat nie gelyk is nie.
- Δ is die vierkant van 'n rasionale getal: die wortels is rasionaal.
- Δ is nie 'n volkome vierkant nie: die wortels is irrasionaal en kan in desimale- of wortelvorm uitgedruk word.

Δ

- $\Delta < 0$: **imaginêre/nie-reële wortels**
- $\Delta \geq 0$: **reële wortels**
  - $\Delta > 0$ ongelyke wortels
    - Δ 'n volkome vierkant: rasionale wortels
    - Δ is nie 'n volkome vierkant nie: irrasionale wortels
  - $\Delta = 0$ gelyke wortels

Aard van wortels	**Diskriminant**	$a > 0$	$a < 0$
Wortels is nie-reëel.	$\Delta < 0$		
Wortels is reëel en gelyk.	$\Delta = 0$		
Wortels is reëel en ongelyk: • Rasionale wortels • Irrasionale wortels	$\Delta > 0$ • $\Delta =$ 'n vierkant rasionaal • $\Delta =$ nie 'n vierkant rasionaal		

Sien video: 25KR op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 13: Aard van die wortels

VRAAG

Toon aan dat die wortels van $x^2 - 2x - 7 = 0$ irrasionaal is.

OPLOSSING

Stap 1: Interpreteer die vraag

Om aan te toon dat die wortels reëel en irrasionaal is, moet ons Δ bereken en wys dat dit groter as nul is en nie 'n volkome vierkant nie.

Stap 2: Maak seker dat die vergelyking in die standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$ is

$$x^2 - 2x - 7 = 0$$

Stap 3: Identifiseer die koëffisiënte wat ingestel moet word in die uitdrukking vir die diskriminant

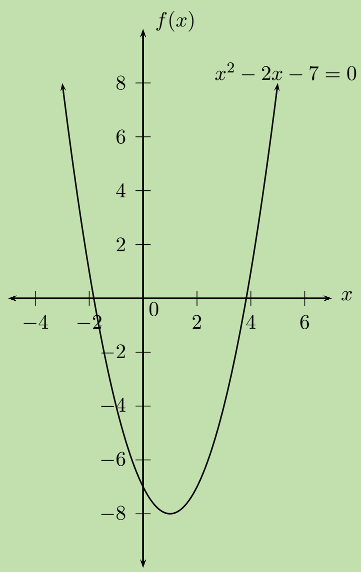
$$a = 1; \qquad b = -2; \qquad c = -7$$

Stap 4: Skryf die uitdrukking neer en stel die waardes in

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-2)^2 - 4(1)(-7) \\ &= 4 + 28 \\ &= 32 \end{aligned}$$

Ons weet dat $32 > 0$ en dit is nie 'n volkome vierkant nie.

Onderstaande grafiek toon die wortels vir die vergelyking $x^2 - 2x - 7 = 0$. Let op dat die grafiek nie deel vorm van die antwoord nie. Dit is slegs ingesluit vir verduideliking.



Stap 5: Skryf die finale oplossing

Ons het bereken dat $\Delta > 0$ en dat dit nie 'n volkome vierkant is nie, daarom is ons gevolgtrekking dat die wortels **reëel, ongelyk** en **irrasionaal** is.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Aard van die wortels

VRAAG

Vir watter waarde(s) van k sal die wortels van $6x^2 + 6 = 4kx$ reëel en gelyk wees?

OPLOSSING

Stap 1: Interpreteer die vraag

Vir die wortels om reëel en gelyk te wees, moet ons die waarde(s) van k bepaal sodat $\Delta = 0$.

Stap 2: Maak seker dat die vergelyking in die standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$ is

$$6x^2 - 4kx + 6 = 0$$

Stap 3: Identifiseer die koëffisiënte wat ingestel moet word in die uitdrukking vir die diskriminant

$$a = 6; \qquad b = -4k; \qquad c = 6$$

Stap 4: Skryf die uitdrukking neer en stel die waardes in

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4k)^2 - 4(6)(6) \\ &= 16k^2 - 144 \end{aligned}$$

Vir wortels om reëel en gelyk te wees, $\Delta = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta &= 0 \\ 16k^2 - 144 &= 0 \\ 16(k^2 - 9) &= 0 \\ (k-3)(k+3) &= 0 \end{aligned}$$

Daarom $k = 3$ of $k = -3$.

Stap 5: Toets beide antwoorde deur hulle in te stel in die oorspronklike vergelyking

Vir $k = 3$:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 4(3)x + 6 &= 0 \\ 6x^2 - 12x + 6 &= 0 \\ x^2 - 2x + 1 &= 0 \\ (x-1)(x-1) &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \end{aligned}$$

Ons sien dat vir $k = 3$ het die kwadratiese vergelyking reële, gelyke wortels $x = 1$.

Vir $k = -3$:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 4(-3)x + 6 &= 0 \\ 6x^2 + 12x + 6 &= 0 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)(x+1) &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \\ \therefore x &= -1 \end{aligned}$$

Ons sien dat vir $k = -3$ het die kwadratiese vergelyking reële, gelyke wortels $x = -1$.

Stap 6: Skryf die finale oplossing

Vir die wortels van die kwadratiese vergelyking om **reëel** en **gelyk** te wees, moet $k = 3$ of $k = -3$.

Uitgewerkte voorbeeld 15: Aard van die wortels

VRAAG

Toon aan dat die wortels van $(x + h)(x + k) = 4d^2$ reëel is vir alle reële waardes van h, k en d.

OPLOSSING

Stap 1: Interpreteer die vraag

Om aan te toon dat die wortels reëel is, moet ons Δ bereken en wys dat $\Delta \geq 0$ vir alle reële waardes van h, k en d.

Stap 2: Maak seker dat die vergelyking in die standaardvorm $ax^2 + bx + c = 0$ is

Brei die hakies uit en groepeer soortgelyke terme.

$$
\begin{aligned}
(x+h)(x+k) &= 4d^2 \\
x^2+hx+kx+hk-4d^2 &= 0 \\
x^2+(h+k)x+(hk-4d^2) &= 0
\end{aligned}
$$

Stap 3: Identifiseer die koëffisiënte wat ingestel moet word in die formule vir die diskriminant

$$
a=1; \qquad b=h+k; \qquad c=hk-4d^2
$$

Stap 4: Skryf die formule neer en stel die waardes in

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2-4ac \\
&= (h+k)^2-4(1)(hk-4d^2) \\
&= h^2+2hk+k^2-4hk+16d^2 \\
&= h^2-2hk+k^2+16d^2 \\
&= (h-k)^2+(4d)^2
\end{aligned}
$$

Vir wortels om reëel te wees moet $\Delta \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\text{Ons weet dat } (4d)^2 &\geq 0 \\
\text{en } (h-k)^2 &\geq 0 \\
\therefore (h-k)^2+(4d)^2 &\geq 0 \\
\therefore \Delta &\geq 0
\end{aligned}
$$

Stap 5: Skryf die finale oplossing

Ons het aangetoon dat $\Delta \geq 0$, daarom is die wortels **reëel** vir alle reële waardes van h, k en d.

Oefening 2 – 7: Uit vorige vraestelle

1. Bepaal die aard van die wortels vir elk van die volgende vergelykings:

   a) $x^2+3x=-2$

   b) $x^2+9=6x$

   c) $6y^2-6y-1=0$

   d) $4t^2-19t-5=0$

   e) $z^2=3$

   f) $0=p^2+5p+8$

   g) $x^2=36$

   h) $4m+m^2=1$

   i) $11-3x+x^2=0$

   j) $y^2+\dfrac{1}{4}=y$

2. Gegee: $x^2+bx-2+k\left(x^2+3x+2\right)=0$, $(k \neq -1)$

   a) Toon aan dat die diskriminant gegee word deur: $\Delta = k^2+6bk+b^2+8$

b) Indien $b = 0$, bespreek die aard van die wortels van die vergelyking.

c) Indien $b = 2$, vind die waarde(s) van k waarvoor die wortels gelyk is.

[IEB, Nov. 2001, HG]

3. Toon aan dat $k^2x^2 + 2 = kx - x^2$ nie-reëele wortels het vir alle waardes van k.

   [IEB, Nov. 2002, HG]

4. Die vergelyking $x^2 + 12x = 3kx^2 + 2$ het reële wortels.

   a) Vind die grootste waarde van k sodat $k \in \mathbb{Z}$.

   b) Vind een rasionale waarde van k waarvoor bostaande vergelyking rasionale wortels het.

   [IEB, Nov. 2003, HG]

5. Beskou die volgende vergelyking:

$$k = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

   waar $x \neq \frac{5}{2}$.

   a) Vind 'n waarde vir k waarvoor die wortels gelyk is.

   b) Vind 'n heelgetal k waarvoor die wortels van die vergelyking rasionaal en ongelyk sal wees.

   [IEB, Nov. 2004, HG]

6. a) Bewys dat die wortels van die vergelyking $x^2 - (a + b)x + ab - p^2 = 0$ reëel is vir alle reële waardes van a, b en p.

   b) Wanneer sal die wortels van die vergelyking gelyk wees?

   [IEB, Nov. 2005, HG]

7. Indien b en c slegs die waardes 1, 2 of 3 kan hê, bepaal alle getallepare $(b; c)$ sodat $x^2 + bx + c = 0$ reële wortels het.

   [IEB, Nov. 2005, HG]

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25KS	1b. 25KT	1c. 25KV	1d. 25KW	1e. 25KX	1f. 25KY
1g. 25KZ	1h. 25M2	1i. 25M3	1j. 25M4	2. 25M5	3. 25M6
4. 25M7	5. 25M8	6. 25M9	7. 25MB		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.7 Kwadratiese ongelykhede

EMER

Kwadratiese ongelykhede kan die volgende vorme aanneem:

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Om 'n kwadratiese ongelykheid grafies op te los, moet ons bepaal watter deel van die grafiek van die kwadratiese funksie bo of onder die x-as lê. 'n Ongelykheid kan daarom opgelos word deur gebruik te maak van 'n grafiek, of kan algebraïes opgelos word deur gebruik te maak van 'n tabel van tekens (getallelyne) wat aantoon waar die funksie positief en negatief is.

Uitgewerkte voorbeeld 16: Oplos van kwadratiese ongelykhede

VRAAG

Los op vir x: $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die kwadratiese uitdrukking

$$(x - 3)(x - 2) \geq 0$$

Stap 2: Bepaal die kritiese waardes van x

Vanuit die gefaktoriseerde kwadratiese vergelyking kan ons sien dat die waardes waarvoor die ongelykheid nul is, is $x = 3$ en $x = 2$. Hierdie word die kritiese waardes van die ongelykheid genoem en hulle word gebruik om 'n tabel van tekens te voltooi.

Stap 3: Voltooi 'n tabel van tekens

Ons moet bepaal waar elke faktor van die ongelykheid positief en negatief is op die getallelyn:

- aan die linkerkant (in 'n negatiewe rigting) van die kritiese waarde
- gelyk aan die kritiese waarde
- aan die regterkant (in 'n positiewe rigting) van die kritiese waarde

In die laaste ry van die tabel bepaal ons waar die ongelykheid positief en negatief is deur die produk te bepaal van die faktore en hul onderskeie tekens.

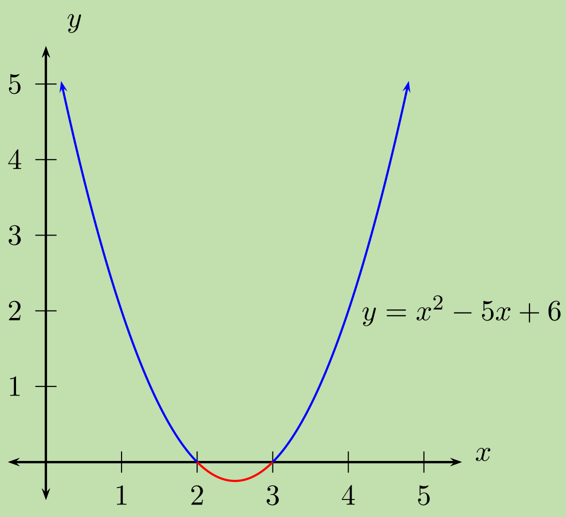
Kritiese waardes		$x = 2$		$x = 3$	
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x - 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) = (x-3)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

In die tabel sien ons $f(x)$ is groter as of gelyk aan nul vir $x \leq 2$ of $x \geq 3$.

Stap 4: 'n Rowwe skets van die grafiek

'n Grafiek van die kwadratiese funksie help ons om die antwoord van die ongelykheid te bepaal. Ons kan die antwoord grafies aflees deur te kyk waar die grafiek bo die x-as lê.

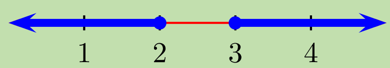
- Vanuit die standaardvorm, $x^2 - 5x + 6$, $a > 0$ en daarom is die grafiek 'n "glimlag" en het dit 'n minimum draaipunt.
- Vanuit die gefaktoriseerde form, $(x-3)(x-2)$, weet ons dat die x-afsnitte is $(2;0)$ en $(3;0)$.



Die grafiek is bo of op die x-as vir $x \leq 2$ of $x \geq 3$.

Stap 5: Skryf die finale antwoord en stel dit op 'n getallelyn voor

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \text{ vir } x \leq 2 \text{ of } x \geq 3$$



Uitgewerkte voorbeeld 17: Oplos van kwadratiese ongelykhede

VRAAG

Los op vir x: $4x^2 - 4x + 1 \leq 0$

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die kwadratiese vergelyking

$$\begin{aligned}(2x-1)(2x-1) &\leq 0\\ (2x-1)^2 &\leq 0\end{aligned}$$

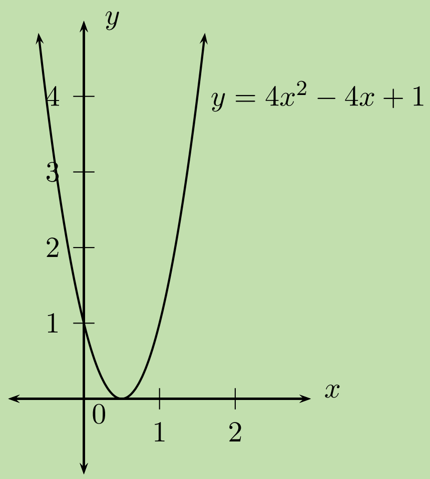
Stap 2: Bepaal die kritiese waardes van x

Vanuit die gefaktoriseerde kwadratiese vergelyking sien ons dat die waarde waarvoor die ongelykheid gelyk is aan nul, is $x = \frac{1}{2}$. Ons weet dat $a^2 > 0$ vir enige reële getal $a, a \neq 0$, en daarom sal $(2x-1)^2$ nooit negatief wees nie.

Stap 3: 'n Rowwe skets van die grafiek

Onderstaande grafiek is nie deel van die antwoorde nie en word slegs getoon as deel van die verduideliking.

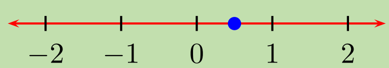
- Vanuit die standaardvorm, $4x^2 - 4x + 1$, $a > 0$ en daarom is die grafiek "glimlag" en het dit 'n minimum draaipunt.
- Vanuit die gefaktoriseerde form, $(2x-1)(2x-1)$, weet ons dat die x-afsnitte is $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.



Let op dat geen deel van die grafiek onder die x-as lê nie.

Stap 4: Skryf die finale antwoord en stel dit op 'n getallelyn voor

$$4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \text{ vir } x = \frac{1}{2}$$



Uitgewerkte voorbeeld 18: Oplos van kwadratiese ongelykhede

VRAAG

Los op vir x: $-x^2 - 3x + 5 > 0$

OPLOSSING

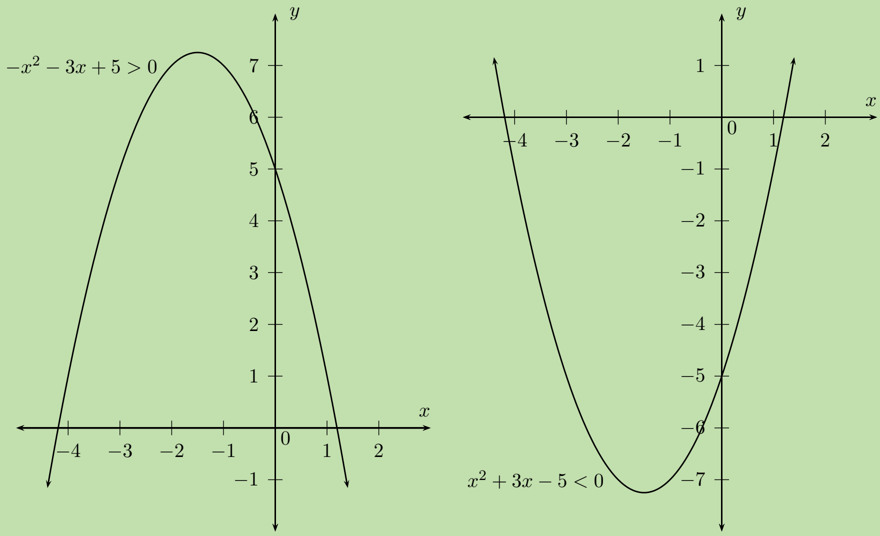
Stap 1: Ondersoek die vorm van die ongelykheid

Let daarop dat die koëffisiënt van die x^2 term -1 is. **Onthou** dat as ons 'n ongelykheid vermenigvuldig of deel met 'n negatiewe getal, dan draai die rigting van die ongelykheidsteken om. Dus kan ons dieselfde ongelykheid op verskillende maiere skryf en steeds dieselfde antwoord kry, soos hieronder aangetoon.

$$-x^2 - 3x + 5 > 0$$

Vermenigvuldig met -1 en verander die rigting van die ongelykheidsteken

$$x^2 + 3x - 5 < 0$$



Ons kan sien vanaf hierdie rowwe skets dat beide ongelykhede dieselfde oplossing verskaf; die waardes van x wat tussen die twee x-afsnitte lê.

Stap 2: Faktoriseer die kwadratiese vergelyking

Ons let op dat $-x^2 - 3x + 5 > 0$ nie maklik gefaktoriseer kan word nie. Dus laat $-x^2 - 3x + 5 = 0$ en gebruik die kwadratiese formule om die wortels van die vergelyking te bepaal.

$$-x^2 - 3x + 5 = 0$$
$$x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$$
$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{29}}{2} \approx -4{,}2$$
$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{29}}{2} \approx 1{,}2$$

Dus kan ons skryf, korrek tot een desimale plek,

$$x^2 + 3x - 5 < 0$$
$$\text{as } (x - 1{,}2)(x + 4{,}2) < 0$$

Stap 3: Bepaal die kritiese waardes van x

Vanuit die gefaktoriseerde kwadraat sien ons dat die kritiese waardes is $x = 1{,}2$ en $x = -4{,}2$.

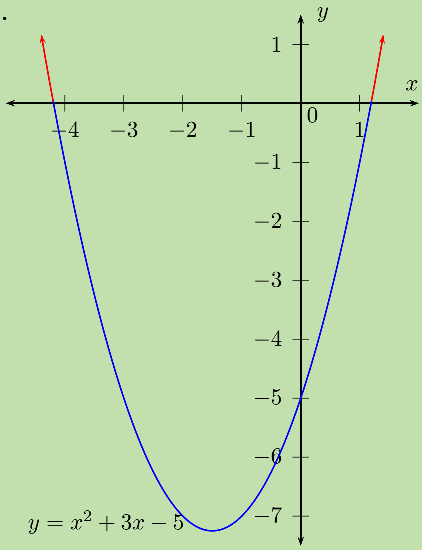
Stap 4: Voltooi 'n tabel van tekens

Kritiese waardes		$x = -4{,}2$		$x = 1{,}2$	
$x + 4{,}2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1{,}2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = (x + 4{,}2)(x - 1{,}2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vanuit die tabel sien ons die funksie is negatief vir $-4{,}2 < x < 1{,}2$.

Stap 5: 'n Skets van die grafiek

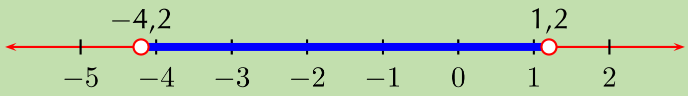
- Vanuit die standaardvorm, x^2+3x-5, $a > 0$ en daarom is die grafiek 'n "glimlag" en het dit 'n minimum draaipunt.
- Vanuit die gefaktoriseerde vorm, $(x - 1{,}2)(x + 4{,}2)$, weet ons die x-afsnitte is $(-4{,}2; 0)$ en $(1{,}2; 0)$.



Vanaf die grafiek sien ons die funksie lê onder die x-as tussen $-4{,}2$ en $1{,}2$.

Stap 6: Skryf die finale antwoord en stel dit op 'n getallelyn voor

$$x^2 + 3x - 5 < 0 \text{ vir } -4{,}2 < x < 1{,}2$$



Belangrik: wanneer daar gewerk word met 'n breukongelykheid waar die veranderlike in die noemer is, word 'n ander benadering benodig. Onthou om altyd na te gaan vir beperkings.

Uitgewerkte voorbeeld 19: Oplos van kwadratiese ongelykhede met breuke

VRAAG

Los op vir x:

1. $\frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-3}$, $x \neq \pm 3$
2. $\frac{2}{x+3} \leq \frac{1}{x-3}$, $x \neq \pm 3$

OPLOSSING

Stap 1: Oplos van die vergelyking

Om hierdie vergelyking op te los vermenigvuldig ons beide kante van die vergelyking met $(x+3)(x-3)$ en vereenvoudig:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+3} \times (x+3)(x-3) &= \frac{1}{x-3} \times (x+3)(x-3) \\ 2(x-3) &= x+3 \\ 2x - 6 &= x + 3 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Stap 2: Oplos van die ongelykheid

Dit is baie belangrik om daarop te let dat ons liefs nie dieselfde metode as hierbo gebruik om die ongelykheid op te los nie: indien ons 'n ongelykheid vermenigvuldig of deel met 'n negatiewe getal, verander die rigting van die ongelykheidsteken. Ons moet eerder die ongelykheid vereenvoudig na die kleinste gemene noemer en dan 'n tabel van tekens gebruik om die waardes wat die ongelykheid bevredig, te bepaal.

Stap 3: Trek $\frac{1}{x-3}$ van beide kante van die ongelykheid af

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-3} \leq 0$$

Stap 4: Bepaal die kleinste gemene noemer en vereenvoudig die breuk

$$\frac{2(x-3)-(x+3)}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$
$$\frac{x-9}{(x+3)(x-3)} \leq 0$$

Behou die noemer, want dit beïnvloed die finale antwoord.

Stap 5: Bepaal die kritiese waardes van x

Vanuit die gefaktoriseerde ongelykheid sien ons dat die kritiese waardes is $x=-3$, $x=3$ en $x=9$.

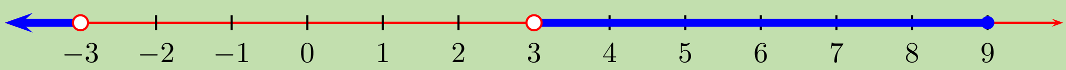
Stap 6: Voltooi 'n tabel van tekens

Kritiese waardes		$x=-3$		$x=3$		$x=9$	
$x+3$	$-$	ongedef	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	ongedef	$+$	$+$	$+$
$x-9$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)=\frac{x-9}{(x+3)(x-3)}$	$-$	ongedef	$+$	ongedef	$-$	0	$+$

Vanuit die tabel sien ons die funksie is kleiner as of gelyk aan nul vir $x<-3$ of $3<x\leq 9$. Ons sluit nie $x=-3$ of $x=3$ die oplossing in nie weens die beperkings op die noemer.

Stap 7: Skryf die finale antwoord en stel dit op 'n getallelyn voor

$$x<-3 \quad \text{of} \quad 3<x\leq 9$$



Oefening 2 – 8: Oplos van kwadratiese ongelykhede

1. Los die volgende ongelykhede op en wys elke antwoord op 'n getallelyn:

   a) $x^2 - x < 12$.
   b) $3x^2 > -x + 4$
   c) $y^2 < -y - 2$
   d) $(3 - t)(1 + t) > 0$
   e) $s^2 - 4s > -6$
   f) $0 \geq 7x^2 - x + 8$
   g) $x \geq -4x^2$
   h) $2x^2 + x + 6 \leq 0$
   i) $\frac{x}{x-3} < 2$, $x \neq 3$
   j) $\frac{x^2+4}{x-7} \geq 0$, $x \neq 7$
   k) $\frac{x+2}{x} - 1 \geq 0$, $x \neq 0$

2. Teken 'n skets van die volgende ongelykhede en los op vir x:

   a) $2x^2 - 18 > 0$
   b) $5 - x^2 \leq 0$
   c) $x^2 < 0$
   d) $0 \geq 6x^2$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25MC	1b. 25MD	1c. 25MF	1d. 25MG	1e. 25MH	1f. 25MJ
1g. 25MK	1h. 25MM	1i. 25MN	1j. 25MP	1k. 25MQ	2a. 25MR
2b. 25MS	2c. 25MT	2d. 25MV			

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

2.8 Gelyktydige vergelykings EMES

Gelyktydige lineêre vergelykings kan opgelos word deur middel van drie verskillende metodes: substitusie, eliminasie of met behulp van 'n grafiek om te bepaal waar die twee lyne mekaar sny. Om 'n stel gelyktydige vergelykings met lineêre en nie-lineêre vergelykings op te los, gebruik ons meestal die substitusie metode. 'n Grafiese oplossing is nuttig om te wys waar twee funksies mekaar sny.

In die algemeen, om vir n onbekende veranderlikes op te los, word 'n stel n onafhanklike vergelykings benodig.

'n Voorbeeld van 'n stel gelyktydige vergelykings met een lineêre vergelyking en een kwadratiese vergelyking is

$$\begin{aligned} y - 2x &= -4 \\ x^2 + y &= 4 \end{aligned}$$

Oplossing deur substitusie EMET

- Gebruik die eenvoudigste van die twee gegewe vergelykings om die een veranderlike in terme van die ander uit te druk.
- Substitueer in die tweede vergelyking. Deur dit te doen, verminder ons die getal vergelykings en die getal veranderlikes met een.

- Ons het nou een vergelyking met een onbekende veranderlike wat opgelos kan word.
- Substitueer die oplossing terug in die eerste vergelyking om die waarde van die ander onbekende veranderlike te vind.

Uitgewerkte voorbeeld 20: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los op vir x en y:

$$\begin{aligned} y - 2x &= -4 \qquad \ldots(1) \\ x^2 + y &= 4 \qquad \ldots(2) \end{aligned}$$

OPLOSSING

Stap 1: Maak y die onderwerp van die eerste vergelyking

$$y = 2x - 4$$

Stap 2: Substitueer in die tweede vergelyking en vereenvoudig

$$\begin{aligned} x^2 + (2x - 4) &= 4 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Stap 3: Faktoriseer die vergelyking en pas die nulprodukreël toe

$$\begin{aligned} (x + 4)(x - 2) &= 0 \\ \therefore x &= -4 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

Stap 4: Substitueer die waardes van x terug in die eerste vergelyking om die ooreenstemmende y-waardes te bepaal

As $x = -4$:

$$\begin{aligned} y &= 2(-4) - 4 \\ &= -12 \end{aligned}$$

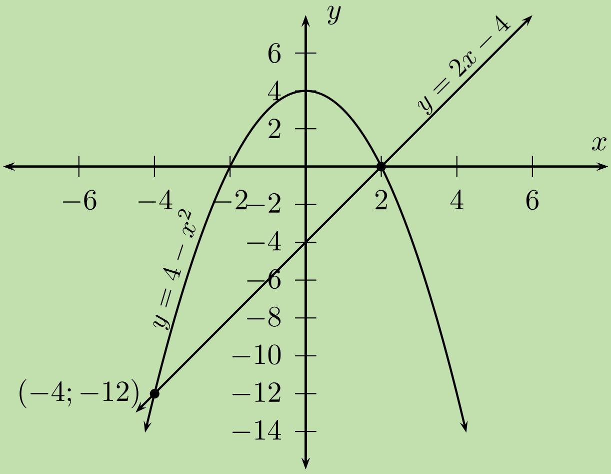
As $x = 2$:

$$\begin{aligned} y &= 2(2) - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Stap 5: Bevestig dat die twee oplossings beide oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 6: Skryf die finale oplossing

Die oplossing is $x = -4$ en $y = -12$ of $x = 2$ en $y = 0$. Hierdie is die koördinaatpare vir die punte van snyding soos onder gesien kan word.



Los op deur middel van eliminasie   EMEV

- Maak een van die veranderlikes die onderwerp van beide vergelykings.
- Stel die twee vergelykings aan mekaar gelyk; deur dit te doen verminder ons die getal vergelykings en die getal veranderlikes met een.
- Ons het nou een vergelyking met een onbekende veranderlike wat opgelos kan word.
- Substitueer die oplossing terug in die eerste vergelyking om die waarde van die ander onbekende veranderlike te vind.

Uitgewerkte voorbeeld 21: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los op vir x en y:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x & \ldots(1) \\ y + \tfrac{1}{2}x - 3 &= 0 & \ldots(2) \end{aligned}$$

OPLOSSING

Stap 1: Maak y die onderwerp van die tweede vergelyking

$$\begin{aligned} y + \frac{1}{2}x - 3 &= 0 \\ y &= -\frac{1}{2}x + 3 \end{aligned}$$

Stap 2: Stel die twee vergelykings gelyk aan mekaar en los op vir x

$$\begin{aligned} x^2 - 6x &= -\frac{1}{2}x + 3 \\ x^2 - 6x + \frac{1}{2}x - 3 &= 0 \\ 2x^2 - 12x + x - 6 &= 0 \\ 2x^2 - 11x - 6 &= 0 \\ (2x+1)(x-6) &= 0 \\ \text{Dus } x = -\frac{1}{2} &\text{ of } x = 6 \end{aligned}$$

Stap 3: Substitueer die waardes van x terug in die tweede vergelyking om die ooreenstemmende y-waardes te bereken

As $x = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \\ \therefore y &= 3\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $\left(-\frac{1}{2}; 3\frac{1}{4}\right)$.

As $x = 6$:

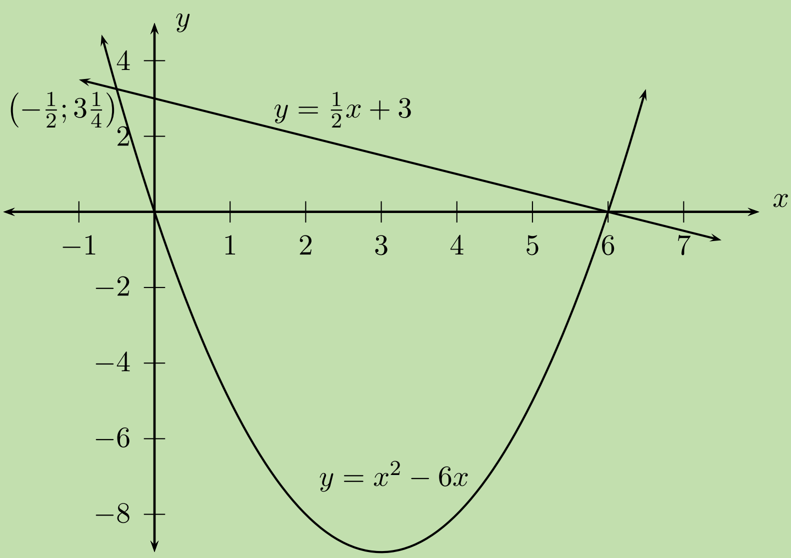
$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(6) + 3 \\ &= -3 + 3 \\ \therefore y &= 0 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(6; 0)$.

Stap 4: Bevestig dat die twee punte beide oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 5: Skryf die finale oplossing

Die oplossing is $x = -\frac{1}{2}$ en $y = 3\frac{1}{4}$ of $x = 6$ en $y = 0$. Hierdie is die koördinaatpare vir die snypunte soos onder te sien.



Uitgewerkte voorbeeld 22: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los op vir x en y:

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{x-2} && \ldots(1) \\ y+1 &= 2x && \ldots(2) \end{aligned}$$

OPLOSSING

Stap 1: Maak y die onderwerp van die tweede vergelyking

$$\begin{aligned} y+1 &= 2x \\ y &= 2x-1 \end{aligned}$$

Stap 2: Stel die twee vergelykings gelyk aan mekaar en los op vir x

$$\begin{aligned} 2x-1 &= \frac{5}{x-2} \\ (2x-1)(x-2) &= 5 \\ 2x^2-5x+2 &= 5 \\ 2x^2-5x-3 &= 0 \\ (2x+1)(x-3) &= 0 \\ \text{Dus } x = -\frac{1}{2} &\text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

Stap 3: Substitueer die waardes van x terug in die tweede vergelyking om die ooreenstemmende y-waardes te bereken

As $x - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} y &= 2(-\frac{1}{2}) - 1 \\ \therefore y &= -2 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(-\frac{1}{2}; -2)$.

As $x = 3$:

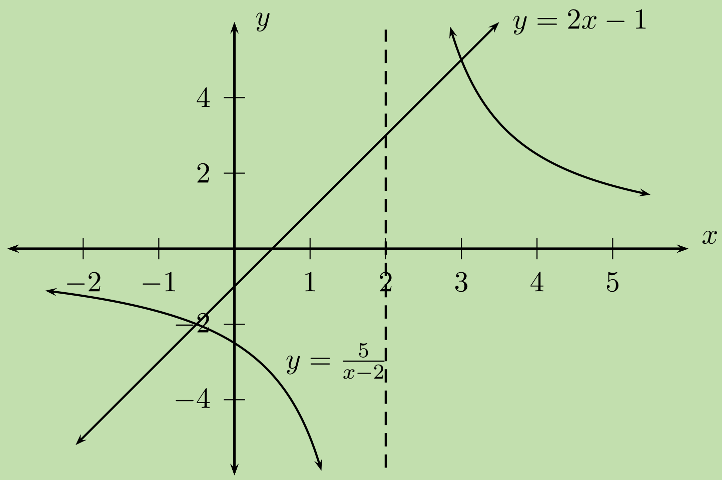
$$\begin{aligned} y &= 2(3) - 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(3; 5)$.

Stap 4: Bevestig dat die twee punte beide oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 5: Skryf die finale oplossing

Die oplossing is $x = -\frac{1}{2}$ en $y = -2$ of $x = 3$ en $y = 5$. Hierdie is die koördinaatpare vir die snypunte soos onder gesien kan word.



Grafiese oplossing

EMEW

- Maak y die onderwerp van elke vergelyking.
- Teken die grafiek van elke funksie op dieselfde assestelsel.
- Die finale oplossing van die stel vergelykings is die koördinate van die punte waar die twee grafieke sny.

Uitgewerkte voorbeeld 23: Gelyktydige vergelykings

VRAAG

Los grafies op vir x en y:

$$\begin{aligned} y + x^2 &= 1 \qquad \ldots(1) \\ y - x + 5 &= 0 \qquad \ldots(2) \end{aligned}$$

OPLOSSING

Stap 1: Maak y die onderwerp van elke vergelyking

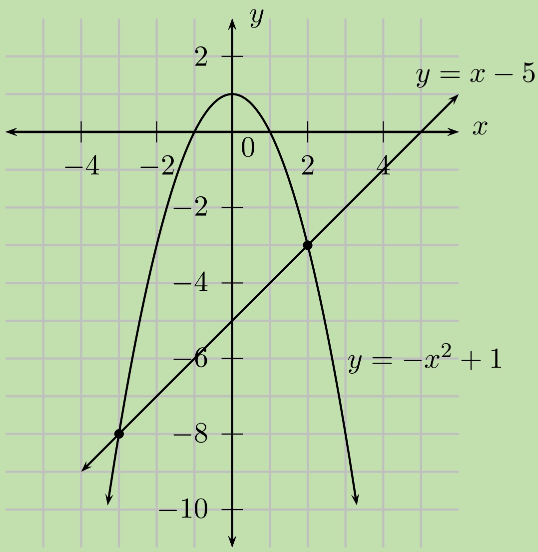
Vir die eerste vergelyking het ons

$$\begin{aligned} y + x^2 &= 1 \\ y &= -x^2 + 1 \end{aligned}$$

en vir die tweede vergelyking

$$y - x + 5 = 0$$
$$y = x - 5$$

Stap 2: Teken die reguitlyn en parabool op dieselfde assestelsel



Stap 3: Bepaal waar die twee grafieke mekaar sny

Vanuit die diagram sien ons die grafieke sny mekaar by $(-3;-8)$ en $(2;-3)$.

Stap 4: Bevestig dat die twee punte albei oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 5: Skryf die finale oplossing

Die oplossing vir die stel gelyktydige vergelykings is $(-3;-8)$ en $(2;-3)$.

Oefening 2 – 9: Oplos van gelyktydige vergelykings

1. Los die volgende stel gelyktydige vergelykings algebraïes op. Gee jou antwoord in wortelvorm waar van toepassing.

a) $y + x = 5$
$y - x^2 + 3x - 5 = 0$

b) $y = 6 - 5x + x^2$
$y - x + 1 = 0$

c) $y = \dfrac{2x + 2}{4}$
$y - 2x^2 + 3x + 5 = 0$

d) $a - 2b - 3 = 0$; $a - 3b^2 + 4 = 0$

e) $x^2 - y + 2 = 3x$
$4x = 8 + y$

f) $2y + x^2 + 25 = 7x$
$3x = 6y + 96$

2. Los die volgende stel gelyktydige vergelykings grafies op. Bevestig jou oplossings deur dit ook algebraïes op te los.

   a) $x^2 - 1 - y = 0$
      $y + x - 5 = 0$
   b) $x + y - 10 = 0$
      $x^2 - 2 - y = 0$
   c) $xy = 12$
      $7 = x + y$
   d) $6 - 4x - y = 0$
      $12 - 2x^2 - y = 0$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25MW 1b. 25MX 1c. 25MY 1d. 25MZ 1e. 25N2 1f. 25N3
2a. 25N4 2b. 25N5 2c. 25N6 2d. 25N7

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

2.9 Woordprobleme EMEX

Woordprobleme word opgelos deur regte wêreld konsepte in wiskundige taal te beskryf. Probleemoplossing strategieë word dikwels in die natuurwetenskappe en ingenieurs dissiplines (soos fisika, biologie en elektriese ingenieurswese) gebruik, maar ook in die sosiale wetenskappe (soos ekonomie, sosiologie en politieke wetenskap). Om woordprobleme op te los moet ons 'n stel vergelykings opstel wat die probleem wiskundig beskryf.

Voorbeelde van regte wêreld probleemoplossing toepassings is:

- modellering van bevolkingsgroei;
- modelleer effek van higbesoedeling;
- modelleer effek van globale verhitting;
- rekenaarspeletjies;
- in die wetenskappe, om te verstaan hoe die natuurlike wêreld werk;
- simuleerders wat gebruik word om mense op te lei vir sekere beroepe soos vlieëniers, dokters en soldate;
- in geneeskunde, om die verloop van 'n siekte te volg.

Sien video: 25N8 op www.everythingmaths.co.za

Probleemoplossing strategie

EMEY

1. Lees die probleem versigtig deur.
2. Wat is die vraag en wat moet ons oplos?
3. Wys veranderlikes aan onbekende hoeveelhede toe, byvoorbeeld, x en y.
4. Vertaal die woorde na algebraïese uitdrukkings deur gegewe inligting oor te skryf in terme van die veranderlikes.
5. Stel 'n stel vergelykings op.
6. Los die veranderlikes op deur middel van substitusie.
7. Toets die oplossing.
8. Skryf die finale antwoord neer.

Ondersoek: Eenvoudige woordprobleme

Skryf 'n vergelyking neer wat die volgende regte wêreld toestande wiskundig beskryf.

1. Mohato en Lindiwe het albei verkoue. Mohato nies twee keer vir elke keer wat Lindiwe nies. As Lindiwe x keer nies, skryf 'n vergelyking wat beskryf hoeveel keer altwee genies het.
2. Die verskil van twee getalle is 10 en die som van hul kwadrate is 50. Bepaal die twee getalle.
3. Liboko bou 'n reghoekige stoorkamer. Indien die diagonaal van die kamer $\sqrt{1312}$ m is en die omtrek 80 m, bepaal die afmetings van die kamer.
4. Dit reën die helfte soveel in Julie as in Desember. Indien dit y mm in Julie reën, skryf 'n uitdrukking neer wat die reënval in Julie en Desember weergee.
5. Zane kan 'n kamer in 4 ure verf. Tlali kan die kamer in 2 ure verf. Hoe lank sal dit hulle neem om die kamer saam te verf?
6. 25 aar gelede was Arthur 5 jaar ouer as 'n derde van Bongani se ouderdom. Vandag is Bongani 26 jaar jonger as twee keer Arthur se ouderdom. Hoe oud is Bongani?
7. Die produk van twee heelgetalle is 95. Bepaal die heelgetalle as hul som 24 is.

Uitgewerkte voorbeeld 24: Gimnasium lidmaatskap

VRAAG

Die jaarlikse gimnasiumledegeld vir 'n enkele lid is R 1000, terwyl 'n jaarlikse gesinslidmaatskap R 1500 is. Die gimnasium oorweeg om alle ledegeld met dieselfde hoeveelheid te verhoog. Indien dit gebeur, sal 'n enkele lidmaatskap $\frac{5}{7}$ van 'n gesinslidmaatskap kos. Bepaal die voorgestelde verhoging.

OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die onbekende hoeveelheid en ken 'n veranderlike daaraan toe

Laat die voorgestelde verhoging x wees.

Stap 2: Gebruik die gegewe inligting om die tabel die voltooi

	nou	na verhoging
enkel persoon	1000	$1000 + x$
familie	1500	$1500 + x$

Stap 3: Stel 'n vergelyking op

$$1000 + x = \frac{5}{7}(1500 + x)$$

Stap 4: Bepaal vir x

$$\begin{aligned} 7000 + 7x &= 7500 + 5x \\ 2x &= 500 \\ x &= 250 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale oplossing

Die voorgestelde verhoging is R 250.

Uitgewerkte voorbeeld 25: Koffiehuis op die hoek

VRAAG

Erica besluit om haar vriende uit te neem vir koffie by die Koffiehuis op hoek. Erica betaal R 54,00 vir vier cappuccino's en drie koppies filterkoffie. As 'n cappuccino R 3,00 meer kos as 'n koppie koffie, bereken hoeveel 'n koppie van elke tipe koffie kos.

OPLOSSING

Stap 1: Metode 1: Identifiseer die onbekende waardes en ken twee veranderlikes toe

Gestel die koste van 'n cappuccino is x, en die koste van 'n filterkoffie is y.

Stap 2: Gebruik die gegewe inligting om 'n stelsel van vergelykings op te stel

$$
\begin{aligned}
4x + 3y &= 54 \qquad \ldots (1)\\
x &= y + 3 \qquad \ldots (2)
\end{aligned}
$$

Stap 3: Gebruik die vergelykings deur die tweede vergelyking in die eerste vergelyking in te stel

$$
\begin{aligned}
4(y + 3) + 3y &= 54\\
4y + 12 + 3y &= 54\\
7y &= 42\\
y &= 6
\end{aligned}
$$

As $y = 6$, dan kry ons

$$
\begin{aligned}
x &= y + 3\\
&= 6 + 3\\
&= 9
\end{aligned}
$$

deur die tweede vergelyking te gebruik.

Stap 4: Kontroleer dat die oplossing beide van die oorspronklike vergelykings bevredig

Stap 5: Skryf die finale oplossing

'n Cappuccino kos R 9 en 'n filterkoffie kos R 6.

Stap 6: Metode 2: Identifiseer die onbekende waardes en ken een veranderlike toe

Gestel die koste van 'n cappuccino is x, en die koste van 'n filterkoffie is $x - 3$.

Stap 7: Gebruik die gegewe inligting om 'n vergelyking op te stel

$$4x + 3(x - 3) = 54$$

Stap 8: Bepaal vir x

$$
\begin{aligned}
4x + 3(x - 3) &= 54\\
4x + 3x - 9 &= 54\\
7x &= 63\\
x &= 9
\end{aligned}
$$

Stap 9: Skryf die finale oplossing

'n Cappuccino kos R 9 en 'n filterkoffie kos R 6.

Uitgewerkte voorbeeld 26: Krane wat 'n houer vol maak

VRAAG

Twee krane, waarvan een sterker vloei as die ander een, word gebruik om 'n houer vol te maak. Op sy eie neem die swakker kraan 2 ure langer as die ander een om die houer vol te maak. As altwee krane oopgemaak is, neem dit 1 uur, 52 minute en 30 sekondes. Bepaal hoe lank dit die swakker kraan sal neem om alleen die houer vol te maak.

OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die onbekende hoeveelhede en ken veranderlikes toe

Gestel die tyd wat dit neem vir die kraan wat swakker vloei om die houer vol te maak, is x uur en die tyd wat die sterker kraan neem is $x - 2$ uur.

Stap 2: Skakel alle tye om na 'n gemeenskaplike tydseenheid

Eerstens moet ons 1 ure, 52 minute en 30 sekondes omskakel na ure toe:

$$1 + \frac{52}{60} + \frac{30}{(60)^2} = 1{,}875 \text{ ure}$$

Stap 3: Gebruik die gegewe inligting om 'n stelsel van vergelykings op te stel

Stel 'n vergelyking op wat beskryf hoe die twee krane saam die houer volmaak:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1{,}875}$$

Stap 4: Vermenigvuldig die vergelyking aan beide kante met die kleinste gemene veelvoud en vereenvoudig

$$\begin{aligned} 1{,}875(x-2) + 1{,}875x &= x(x-2) \\ 1{,}875x - 3{,}75 + 1{,}875x &= x^2 - 2x \\ 0 &= x^2 - 5{,}75x + 3{,}75 \end{aligned}$$

Vermenigvuldig die vergelyking aan beide kante met 4 om dit makliker te maak om te faktoriseer (of om die kwadratiese formule te gebruik)

$$\begin{aligned} 0 &= 4x^2 - 23x + 15 \\ 0 &= (4x-3)(x-5) \end{aligned}$$

Dus $x = \frac{3}{4}$ of $x = 5$.

Ons het bereken dat die swakker vloeiende kraan $\frac{3}{4}$ ure of 5 uue neem om die houer vol te maak. Ons weet egter dat as altwee krane oop is, sal dit $1{,}875$ ure neem. So, ons kan die oplossing $x = \frac{3}{4}$ ignoreer.

Dus maak die kraan wat swakker loop die houer in 5 ure vol en die sterker kraan neem 3 ure.

Stap 5: Kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Stap 6: Skryf die finale oplossing

Die swakker kraan maak die houer in 5 ure vol en die sterker kraan neem 3 ure.

Oefening 2 – 10:

1. Mr. Tsilatsila bou 'n heining rondom sy reghoekige groentetuin van 8 m^2. Gestel die groentetuin se lengte is dubbeld dié van sy breedte. Bepaal die afmetings van Mr. Tsilatsila se groentetuin.
2. Kevin speel 'n paar rondtes kegelbal. In die derde rondte het hy 80 meer punte as in die tweede rondte aangeteken. In die eerste rondte het hy 110 punte minder as in die tweede rondte aangeteken. Sy totale puntetelling vir die eerste twee rondtes was 208. As hy 'n gemiddelde telling van 146 wil hê, hoeveel punte moet hy in die vierde rondte aanteken?
3. As 'n voorwerp laat val word of afwaarts gegooi word, word die afstand, d, wat dit val in t sekondes, deur die volgende vergelyking beskryf:

   $s = 5t^2 + v_0 t$

   In hierdie vergelyking is, v_0 die aanvangssnelheid, gegee in m·s^{-1}. Afstand word gemeet in meter, en tyd in sekondes. Gebruik die vergelyking om te bepaal hoe lank dit neem vir 'n tennisbal om die grond te bereik as dit afwaarts gegooi word vanuit 'n warmlugballon wat 500 m hoog is. Die aanvangsnelheid van die bal is 5 m·s^{-1}.
4. Die tabel hieronder gee die tye wat dit vir Sheila neem om die gegewe afstande te stap.

tyd (minute)	5	10	15	20	25	30
afstand (km)	1	2	3	4	5	6

   Stip die punte.

   Indien die verwantskap tussen die afstande en tye lineêr is, kry die vergelyking van die reguitlyn deur enige twee punte te gebruik. Gebruik dan hierdie vergelyking om die volgende vrae te beantwoord:

   a) Hoe lank sal dit Sheila neem om 21 km te stap?
   b) Hoe ver sal Sheila stap in 7 minute?

   As Sheila die tempo waarteen sy stap sou halveer, hoe sou die grafiek van haar afstande en tye lyk?
5. Die drywing P (in watt) wat aan 'n stroombaan deur 'n 12 volt battery verskaf word, word gegee deur die formule $P = 12I - 0{,}5I^2$ waar I die stroom in ampere is.

a) Omdat beide die drywing en die stroom groter moet wees as 0, kry die grense van die stroom wat deur die stroombaan getrek kan word.

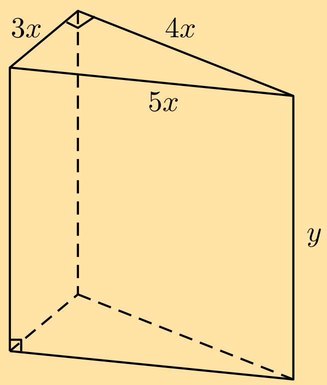
b) Teken 'n grafiek van $P = 12I - 0{,}5I^2$ en gebruik jou antwoord van die eerste vraag om die terrein van die grafiek te bepaal.

c) Wat is die maksimum stroom wat getrek kan word?

d) Lees af van jou grafiek hoeveel drywing verskaf word aan die stroombaan as die stroom 10 ampere is. Gebruik die vergelyking om jou antwoord te kontroleer.

e) By watter waarde van die stroom sal die drywing verskaf 'n maksimum wees?

6. 'n Houtblok word gemaak soos in die diagram gewys. Die eindvlakke is reghoekige driehoeke met kante $3x$, $4x$ en $5x$. Die lengte van die blok is y. Die totale buiteoppervlakte van die blok is 3600 cm^2.



Wys dat

$y = \frac{300-x^2}{x}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25N9 2. 25NB 3. 25NC 4. 25ND 5. 25NF 6. 25NG

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

2.10 Opsomming EMEZ

Sien aanbieding: 25NH op www.everythingmaths.co.za

- Nulprodukreël: as $a \times b = 0$, dan $a = 0$ en/of $b = 0$
- Kwadratiese formule: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Diskriminant: $\Delta = b^2 - 4ac$

Aard van wortels	Diskriminant
Wortels is nie-reeël	$\Delta < 0$
Wortels is reeël en gelyk	$\Delta = 0$
Wortels is reëel en ongelyk: – Rasionale wortels – Irrasionale wortels	$\Delta > 0$ – $\Delta =$ volkome vierkant – $\Delta =$ nie volkome vierkant

Oefening 2 – 11: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Los op: $x^2 - x - 1 = 0$. Gee jou antwoord korrek tot **twee** desimale plekke.
2. Los op: $16(x+1) = x^2(x+1)$
3. Los op: $y^2 + 3 + \frac{12}{y^2+3} = 7$
4. Los op vir x: $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$
5. Los op vir x:

   a) $x(x-9) + 14 = 0$

   b) $x^2 - x = 3$ (Gee jou antwoord korrek tot **een** desimale plek.)

   c) $x + 2 = \frac{6}{x}$ (Gee jou antwoord korrek tot **twee** desimale plekke.)

   d) $\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = 1$
6. Los op vir x in terme van p deur vierkantsvoltooiing: $x^2 - px - 4 = 0$
7. Die vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$ het wortels $x = \frac{2}{3}$ en $x = -4$. Kry een stel moontlike waardes vir a, b en c.
8. Die twee wortels van die vergelyking $4x^2 + px - 9 = 0$ verskil met 5. Bereken die waarde van p.
9. 'n Vergelyking van die vorm $x^2 + bx + c = 0$ word op die bord geskryf. Saskia en Sven skryf dit verkeerd af. Saskia het 'n fout gemaak in die konstante term en kry die oplossings -4 en 2. Sven het 'n fout gemaak in die koëffisiënt van x en kry die oplossings van 1 en -15. Bepaal die korrekte vergelyking wat op die bord geskryf was.
10. Vir watter waardes van b is uitdrukking $\frac{b^2 - 5b + 6}{b+2}$

    a) ongedefiniëerd?

    b) gelyk aan nul?
11. Gegee $\frac{(x^2-6)(2x+1)}{x+2} = 0$. Los op vir x as:

    a) x 'n reële getal is.

    b) x 'n rasionale getal is.

    c) x 'n irrasionale getal is.

    d) x 'n heelgetal is.

12. Gegee: $\frac{(x-6)^{\frac{1}{2}}}{x^2+3}$. Vir watter waarde(s) van x is die vergelyking:

   a) gelyk aan nul?

   b) ongedefiniëerd?

13. Los op vir a as $\frac{\sqrt{8-2a}}{a-3} \geq 0$.

14. Abdoul het in 'n buitelandse handboek afgekom op die volgende formule om die kwadratiese vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$ op te los:

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

   a) Gebruik hierdie formule om die volgende vergelyking op te los: $2x^2 + x - 3 = 0$.

   b) Los die vergelyking weereens op, deur faktorisering, om te sien of die gegewe formule werk vir hierdie vergelyking.

   c) Abdoul het probeer om hierdie formule af te lei ten einde te bewys dat dit altyd werk. Hy het egter vasgesteek op 'n punt. Hier is sy poging:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \\
a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} &= 0 && \text{Deel deur } x^2 \text{ waar } x \neq 0 \\
\frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a &= 0 && \text{Herrangskik} \\
\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \frac{a}{c} &= 0 && \text{Deel deur } c \text{ waar } c \neq 0 \\
\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} &= -\frac{a}{c} && \text{Trek } \tfrac{a}{c} \text{ weerskante af} \\
\therefore \frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \ldots & && \text{Steek vas}
\end{aligned}$$

   Voltooi sy afleiding.

15. Los op vir x:

   a) $\frac{4}{x-3} \leq 1$

   b) $\frac{4}{(x-3)^2} < 1$

   c) $\frac{2x-2}{x-3} > 3$

   d) $\frac{-3}{(x-3)(x+1)} < 0$

   e) $(2x-3)^2 < 4$

   f) $2x \leq \frac{15-x}{x}$

   g) $\frac{x^2+3}{3x-2} \leq 0$

   h) $x - 2 \geq \frac{3}{x}$

   i) $\frac{x^2+3x-4}{5+x^4} \leq 0$

   j) $\frac{x-2}{3-x} \geq 1$

16. Los die volgende stel gelyktydige vergelykings algebraïes op. Gee jou antwoord in wortelvorm waar van toepassing.

a) $y - 2x = 0$
$y - x^2 - 2x + 3 = 0$

b) $a - 3b = 0$
$a - b^2 + 4 = 0$

c) $y - x^2 - 5x = 0$
$10 = y - 2x$

d) $p = 2p^2 + q - 3$
$p - 3q = 1$

e) $a - b^2 = 0$
$a - 3b + 1 = 0$

f) $a - 2b + 1 = 0$
$a - 2b^2 - 12b + 4 = 0$

g) $y + 4x - 19 = 0$
$8y + 5x^2 - 101 = 0$

h) $a + 4b - 18 = 0$
$2a + 5b^2 - 57 = 0$

17. Los die volgende stelsel van vergelykings grafies op:

a) $2y + x - 2 = 0$
$8y + x^2 - 8 = 0$

b) $y + 3x - 6 = 0$
$y = x^2 + 4 - 4x$

18. 'n Klip word vertikaal opwaarts gegooi en sy hoogte bo die grond (in meter) in tyd t (in sekondes) word gegee deur:

$h(t) = 35 - 5t^2 + 30t$

Bepaal die oorspronklike hoogte bo die grond.

19. 'n Vervoermaatskapy het, nadat hulle navorsing daaroor gedoen het, bepaal dat die koers waarteen petrol verbruik word deur een van sy groot voertuie, wat teen 'n gemiddelde spoed van x km per uur reis, gegee word deur:

$$P(x) = \frac{55}{2x} + \frac{x}{200} \quad \text{liters per kilometer}$$

Neem aan dat die petrol R 4,00 per liter kos en dat die drywer R 18,00 per uur (reistyd) verdien. Lei nou af dat die totale koste, C, in rand, vir 'n tog van 2000 km gegee word deur:

$$C(x) = \frac{256\ 000}{x} + 40x$$

20. Los die volgende kwadratiese vergelykings op deur fakortisering, kwadraatsvoltooiing óf die kwadratiese formule:

- Probeer altyd om eers te faktoriseer, en gebruik die formule as die drieterm nie kan faktoriseer nie.
- Los party van die vergelykings op deur vierkantsvoltooiing.

a) $-4y^2 - 41y - 45 = 0$

b) $16x^2 + 20x = 36$

c) $42p^2 + 104p + 64 = 0$

d) $21y + 3 = 54y^2$

e) $36y^2 + 44y + 8 = 0$

f) $12y^2 - 14 = 22y$

g) $16y^2 + 0y - 81 = 0$

h) $3y^2 + 10y - 48 = 0$

i) $63 - 5y^2 = 26y$

j) $2x^2 - 30 = 2$

k) $2y^2 = 98$

21. Een wortel van die vergelyking $9y^2 + 32 = ky$ is 8. Bepaal die waarde van k en van die ander wortel.

22. a) Los op vir x in $x^2 - x = 6$.
    b) Hieruit, los op vir y in $(y^2 - y)^2 - (y^2 - y) - 6 = 0$.

23. Los op vir x: $x = \sqrt{8 - x} + 2$

24. a) Los op vir y in $-4y^2 + 8y - 3 = 0$.
    b) Hieruit, los op vir p in $4(p - 3)^2 - 8(p - 3) + 3 = 0$.

25. Los op vir x: $2(x + 3)^{\frac{1}{2}} = 9$

26. a) Sonder om die vergelyking $x + \frac{1}{x} = 3$ op te los, bepaal die waarde van $x^2 + \frac{1}{x^2}$.
    b) Los nou $x + \frac{1}{x} = 3$ op en gebruik die resultaat om jou antwooord in die vraag hierbo te kontroleer.

27. Los op vir y: $5(y - 1)^2 - 5 = 19 - (y - 1)^2$

28. Los op vir t: $2t(t - \frac{3}{2}) = \frac{3}{2t^2 - 3t} + 2$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25NJ	2. 25NK	3. 25NM	4. 25NN	5a. 25NP	5b. 25NQ
5c. 25NR	5d. 25NS	6. 25NT	7. 25NV	8. 25NW	9. 25NX
10. 25NY	11. 25NZ	12. 25P2	13. 25P3	14. 25P4	15a. 25P5
15b. 25P6	15c. 25P7	15d. 25P8	15e. 25P9	15f. 25PB	15g. 25PC
15h. 25PD	15i. 25PF	15j. 25PG	16a. 25PH	16b. 25PJ	16c. 25PK
16d. 25PM	16e. 25PN	16f. 25PP	16g. 25PQ	16h. 25PR	17a. 25PS
17b. 25PT	18. 25PV	19. 25PW	20a. 25PX	20b. 25PY	20c. 25PZ
20d. 25Q2	20e. 25Q3	20f. 25Q4	20g. 25Q5	20h. 25Q6	20i. 25Q7
20j. 25Q8	20k. 25Q9	21. 25QB	22. 25QC	23. 25QD	24. 25QF
25. 25QG	26. 25QH	27. 25QJ	28. 25QK		

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 3

Getalpatrone

3 Getalpatrone

In vorige grade het ons geleer van lineêre rye, waar die verskil tussen opeenvolgende terme konstant is. In hierdie hoofstuk leer ons van kwadratiese rye waar die verskil tussen opeenvolgende terme nie konstant is nie, maar sy eie patroon volg.

3.1 Hersiening EME32

Terminologie	
Ry/patroon	'n Ry of patroon is 'n geordende stel getalle en/of veranderlikes.
Agtereenvolgend/opeenvolgend	Agtereenvolgende of opeenvolgende terme is terme wat mekaar direk, een na die ander, volg in 'n ry.
Gemene verskil	Die gemene of konstante verskil (d) is die verskil tussen een term en sy voorafgaande term in die ry.
Algemene term	'n Wiskundige uitdrukking wat die ry beskryf en wat enige term in die patroon genereer deur verskillende waardes vir n in te stel.
Vermoede	'n Stelling, gebaseer op bekende data, wat nog nie as waar of vals bewys is nie.

Belangrik: 'n reeks is nie dieselfde as 'n ry of patroon nie. Verskillende tipes reekse word in Graad 12 behandel.

Sien video: 25QM op www.everythingmaths.co.za

Beskrywing van patrone EME33

Ons gebruik die volgende notasie om terme in 'n patroon te beskryf:

- T_1 is die eerste term in die ry.
- T_4 is die vierde term in die ry.
- T_n is die algemene term en word dikwels as die n^{de} term van 'n ry uitgedruk.

'n Ry hoef nie 'n patroon te volg nie, maar indien dit wel 'n patroon volg, kan ons 'n vergelyking skryf vir die algemene term. Die algemene term kan gebruik word om enige term in 'n ry te bereken. Byvoorbeeld, beskou die volgende lineêre ry: $1; 4; 7; 10; 13; \ldots$ Die n^{de} term word gegee deur die uitdrukking: $T_n = 3n - 2$.

Jy kan dit toets deur verskillende waardes vir n in te stel:

$$\begin{aligned}
T_1 &= 3(1) - 2 = 1 \\
T_2 &= 3(2) - 2 = 4 \\
T_3 &= 3(3) - 2 = 7 \\
T_4 &= 3(4) - 2 = 10 \\
T_5 &= 3(5) - 2 = 13
\end{aligned}$$

As ons die verhouding tussen die posisie van 'n term en sy waarde kan vasstel, dan kan ons die patroon beskryf en enige term in die ry bepaal.

Sien video: 25QN op www.everythingmaths.co.za

Lineêre rye EME34

DEFINISIE: *Lineêre ry*

'n Ry van getalle waarin daar 'n gemene verskil (d) bestaan tussen enige term en die voorafgaande term, word 'n lineêre ry genoem.

Belangrik: $d = T_2 - T_1$, nie $T_1 - T_2$ nie.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Lineêre ry

VRAAG

Bepaal die gemene verskil (d) en die algemene term vir die volgende ry:

$$10; 7; 4; 1; \ldots$$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die gemene verskil

Om die gemene verskil te bepaal, bepaal ons die verskil tussen enige term en die voorafgaande term:

$$d = T_n - T_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore d &= T_2 - T_1 \\ &= 7 - 10 \\ &= -3 \\ \text{of } d &= T_3 - T_2 \\ &= 4 - 7 \\ &= -3 \\ \text{of } d &= T_4 - T_3 \\ &= 1 - 4 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 10 & & 7 & & 4 & & 1 \\ & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & & \searrow\swarrow & \\ & -3 & & -3 & & -3 & \end{array}$$

Stap 2: Bepaal die algemene term

Om die algmene term T_n te vind, moet ons die verhouding bepaal tussen:

- die **waarde** van 'n getal in die patroon en
- die **posisie** van die getal in die patroon

posisie	1	2	3	4
waarde	10	7	4	1

Ons begin met die waarde van die eerste term in die ry. Ons moet 'n uitdrukking neerskryf wat die waarde van die gemene verskil ($d = -3$) insluit en die posisie van die term ($n = 1$).

$$\begin{aligned} T_1 &= 10 \\ &= 10 + (0)(-3) \\ &= 10 + (1 - 1)(-3) \end{aligned}$$

Skryf nou 'n soortgelyke uitdrukking vir die tweede term.

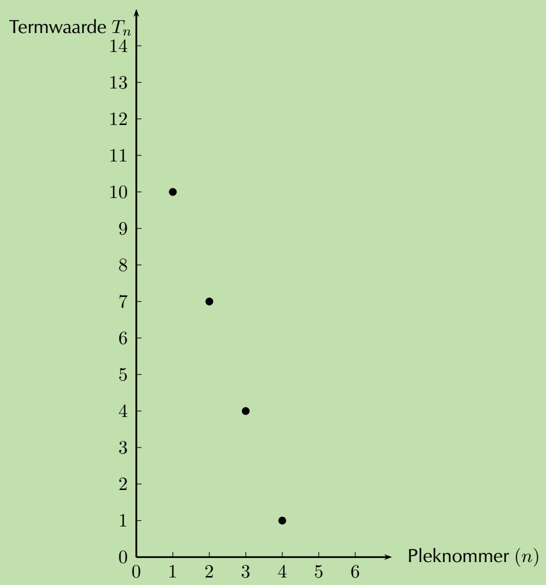
$$\begin{aligned} T_2 &= 7 \\ &= 10 + (1)(-3) \\ &= 10 + (2 - 1)(-3) \end{aligned}$$

Ons sien nou dat 'n patroon vorm, wat die posisie en die waarde van 'n term in die ry verbind.

$$\begin{aligned} T_n &= 10 + (n - 1)(-3) \\ &= 10 - 3n + 3 \\ &= -3n + 13 \end{aligned}$$

Stap 3: Teken 'n grafiek van die patroon

Ons kan ook 'n patroon grafies voorstel, soos hieronder getoon.



Let op dat die pleknommer in die ry (n) slegs positiewe heelgetalle kan wees.

Die patroon kan ook in woorde uitgedruk word: "elke term in die ry kan bereken word deur die pleknommer in die ry te vermenigvuldig met negatief drie en dan dertien by die antwoord te tel".

Sien video: 25QP op www.everythingmaths.co.za

Oefening 3 – 1: Lineêre rye

1. Skryf die volgende drie terme neer in die ry: $45; 29; 13; -3; \ldots$
2. Die algemene term word gegee deur die ry hieronder. Bereken die ontbrekende terme.
   a) $-4; -9; -14; \ldots; -24$
      $T_n = 1 - 5n$
   b) $6; \ldots; 24; \ldots; 42$
      $T_n = 9n - 3$
3. Vind die algemene term vir die volgende rye en vind dan T_{10}, T_{15} en T_{30}:
   a) $13; 16; 19; 22; \ldots$
   b) $18; 24; 30; 36; \ldots$
   c) $-10; -15; -20; -25; \ldots$
4. Die sitplekke in 'n klaskamer is gerangskik sodat die eerste ry 20 lessenaars het, die tweede ry 22 lessenaars, die derde ry 24 lessenaars, ensovoorts. Bereken hoeveel lessenaars in die neënde ry is.
5. a) Voltooi die volgende:

$$\begin{aligned}13 + 31 &= \ldots \\ 24 + 42 &= \ldots \\ 38 + 83 &= \ldots\end{aligned}$$

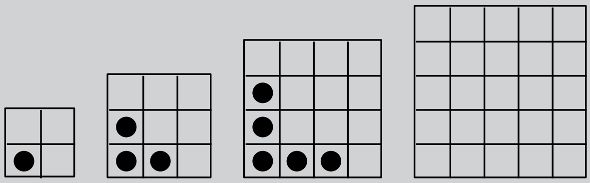
   b) Kyk na die getalle aan die linkerkant: wat let jy op van die ene-syfer en die tiene-syfer?
   c) Ondersoek die patroon deur van ander voorbeelde van 2-syfer getalle gebruik te maak.
   d) Formuleer 'n vermoede van die patroon wat jy gesien het.
   e) Bewys die vermoede.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1\. 25QQ 2a. 25QR 2b. 25QS 3a. 25QT 3b. 25QV 3c. 25QW
4\. 25QX 5. 25QY

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Ondersoek: Kwadratiese rye



1. Bestudeer die gestippelde teëlpatroon getoon en beantwoord die volgende vrae:

   a) Voltooi die vierde patroon van die diagram.

   b) Voltooi die onderstaande tabel:

patroonnommer	1	2	3	4	5	20	n
gestippelde teëls	1	3	5				
verskil (d)	–	2					

   c) Wat kom jy agter van die verskil in die aantal gestippelde teëls?

   d) Beskryf die patroon in woorde: "Die aantal gestippelde teëls...".

   e) Skryf die algemene term neer: $T_n = \ldots$

   f) Gee die wiskundige term vir hierdie tipe patroon.

   g) As 'n patroon 819 gestippelde teëls het, bepaal die waarde van n.

2. Bestudeer nou die hoeveelheid leë teëls en beantwoord die volgende vrae:

   a) Voltooi die onderstaande tabel:

patroonnommer	1	2	3	4	5	10
leë teëls	3	6	11			
eerste verskil	–	3				
tweede gemene verskil	–	–				

   b) Wat kom jy agter van die verskil in die aantal leë teëls?

   c) Beskryf die patroon in woorde: "Die aantal leë teëls...".

   d) Skryf die algemene term neer: $T_n = \ldots$

   e) Gee die wiskundige term vir hierdie tipe patroon.

   f) As 'n patroon 227 leë teëls het, bepaal die waarde van n.

   g) 'n Patroon het 79 gestippelde teëls, bepaal aantal leë teëls.

DEFINISIE: *Kwadratiese ry*

'n Kwadratiese ry is 'n ry getalle waar die tweede gemene verskil tussen enige twee opeenvolgende terme konstant is.

Beskou die volgende voorbeeld: $1; 2; 4; 7; 11; \ldots$

Die eerste verskil word bereken deur die verskil tussen twee opeenvolgende terme te kry:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 4 & & 7 & & 11 \\ & +1 & & +2 & & +3 & & +4 & \end{array}$$

Die tweede verskil word verkry deur die verskil tussen opeenvolgende verskille te bepaal:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ & +1 & & +1 & & +1 & \end{array}$$

Ons merk op dat al die tweede verskille gelyk is aan 1. Enige ry wat 'n konstante tweede verskil het, is 'n **kwadratiese ry**.

Dit is belangrik om op te let dat die eerste verskille van 'n kwadratiese ry ook 'n ry vorm. Hierdie ry het 'n konstante verskil tussen opeenvolgende terme. Met ander woorde, 'n lineêre ry volg uit die eerste verskille van 'n kwadratiese ry.

Algemene geval

Indien die ry kwadraties is, moet die n^{de} term van die vorm $T_n = an^2 + bn + c$ wees.

$$\begin{array}{lccccccc} & n=1 & & n=2 & & n=3 & & n=4 \\ T_n & a+b+c & & 4a+2b+c & & 9a+3b+c & & 16a+4b+c \\ 1^{\text{ste}} \text{ verskil} & & 3a+b & & 5a+b & & 7a+b & \\ 2^{\text{de}} \text{ verskil} & & & 2a & & 2a & & \end{array}$$

In elke geval is die konstante tweede verskil $2a$.

Oefening 3 – 2: Kwadratiese rye

1. Bepaal die tweede verskil tussen die terme van die volgende rye:

   a) $5; 20; 45; 80; \ldots$
   b) $6; 11; 18; 27; \ldots$
   c) $1; 4; 9; 16; \ldots$
   d) $3; 0; -5; -12; \ldots$
   e) $1; 3; 7; 13; \ldots$
   f) $0; -6; -16; -30; \ldots$
   g) $-1; 2; 9; 20; \ldots$
   h) $1; -3; -9; -17; \ldots$
   i) $3a+1; 12a+1; 27a+1; 48a+1 \ldots$
   j) $2; 10; 24; 44; \ldots$
   k) $t-2; 4t-1; 9t; 16t+1; \ldots$

2. Voltooi die ry deur die ontbrekende term in te vul

a) $11; 21; 35; \ldots; 75$

b) $20; \ldots; 42; 56; 72$

c) $\ldots; 37; 65; 101$

d) $3; \ldots; -13; -27; -45$

e) $24; 35; 48; \ldots; 80$

f) $\ldots; 11; 26; 47$

3. Gebruik die algemene term om die eerste vier opeenvolgende terme in die ry te bereken:

a) $T_n = n^2 + 3n - 1$

b) $T_n = -n^2 - 5$

c) $T_n = 3n^2 - 2n$

d) $T_n = -2n^2 + n + 1$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25QZ	1b. 25R2	1c. 25R3	1d. 25R4	1e. 25R5	1f. 25R6
1g. 25R7	1h. 25R8	1i. 25R9	1j. 25RB	1k. 25RC	2a. 25RD
2b. 25RF	2c. 25RG	2d. 25RH	2e. 25RJ	2f. 25RK	3a. 25RM
3b. 25RN	3c. 25RP	3d. 25RQ			

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Uitgewerkte voorbeeld 2: Kwadratiese rye

VRAAG

Skryf die volgende twee terme en bepaal 'n vergelyking vir die n^{de} term vir die ry 5; 12; 23; 38; $\ldots$

OPLOSSING

Stap 1: Vind die eerste verskille tussen die terme

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & & 12 & & 23 & & 38 \\ & +7 & & +11 & & +15 & \end{array}$$

Stap 2: Vind die tweede verskille tussen die terme

$$\begin{array}{ccccc} 7 & & 11 & & 15 \\ & +4 & & +4 & \end{array}$$

Daar is 'n konstante tweede verskil van 4. Ons kan dus vasstel dat hierdie 'n kwadratiese ry is van die vorm $T_n = an^2 + bn + c$.

Deur die voort te gaan met die ry, vind ons die volgende verskille:

$$\begin{array}{ccccc} \ldots 15 & & 19 & & 23\ldots \\ & +4 & & +4 & \end{array}$$

Stap 3: Bepaal die volgende twee terme in die ry

Die volgende twee terme is:

...38 57 80...

+19 +23

Die ry is dus: $5; 12; 23; 38; 57; 80; \ldots$

Stap 4: Bepaal die algemene term vir die ry

Om die waardes van a, b en c vir $T_n = an^2 + bn + c$ te vind, kyk ons na die eerste 3 terme in die ry:

$$n = 1 : T_1 = a + b + c$$
$$n = 2 : T_2 = 4a + 2b + c$$
$$n = 3 : T_3 = 9a + 3b + c$$

Ons los 'n stel gelyktydige vergelykings op om die waardes van a, b en c te vind.

Ons weet dat $T_1 = 5$, $T_2 = 12$ en $T_3 = 23$

$$\begin{aligned} a + b + c &= 5 \\ 4a + 2b + c &= 12 \\ 9a + 3b + c &= 23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= 4a + 2b + c - (a + b + c) \\ 12 - 5 &= 4a + 2b + c - a - b - c \\ 7 &= 3a + b && \ldots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_3 - T_2 &= 9a + 3b + c - (4a + 2b + c) \\ 23 - 12 &= 9a + 3b + c - 4a - 2b - c \\ 11 &= 5a + b && \ldots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) - (1) &= 5a + b - (3a + b) \\ 11 - 7 &= 5a + b - 3a - b \\ 4 &= 2a \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Gebruik vergelyking } (1) : \quad 3(2) + b &= 7 \\ \therefore b &= 1 \\ \text{Gebruik} \quad a + b + c &= 5 \\ 2 + 1 + c &= 5 \\ \therefore c &= 1 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die algemene term vir die ry

$$T_n = 2n^2 + n + 2$$

Uitgewerkte voorbeeld 3: Die trek van 'n grafiek

VRAAG

Beskou die volgende ry:

$$3; 6; 10; 15; 21; \ldots$$

1. Bepaal die algemene term (T_n) vir die ry.
2. Is hierdie 'n lineêre of 'n kwadratiese ry?
3. Trek 'n grafiek van T_n teenoor n.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die eerste en tweede verskille

$$\begin{array}{lccccccc}
 & n=1 & & n=2 & & n=3 & & n=4 \\
T_n & 3 & & 6 & & 10 & & 15 \\
1^{\text{ste}} \text{ verskil} & & 3 & & 4 & & 5 & \\
2^{\text{de}} \text{ verskil} & & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Ons sien dat die eerste verskille nie konstant is nie maar die ry $3; 4; 5; \ldots$ vorm, wat 'n konstante tweede verskil van 1 het. Daarom is die ry kwadraties en het 'n algemene term van $T_n = an^2 + bn + c$.

Stap 2: Bepaal die algemene term T_n

Om die waardes van a, b en c vir $T_n = an^2 + bn + c$ te vind, kyk ons na die eerste 3 terme in die ry:

$$\begin{aligned}
n = 1 &: T_1 = a + b + c \\
n = 2 &: T_2 = 4a + 2b + c \\
n = 3 &: T_3 = 9a + 3b + c
\end{aligned}$$

Ons los 'n stel gelyktydige vergelykings op om die waardes van a, b en c te bepaal. Ons weet dat $T_1 = 3$, $T_2 = 6$ en $T_3 = 10$.

$$\begin{aligned}
a + b + c &= 3 \\
4a + 2b + c &= 6 \\
9a + 3b + c &= 10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 - T_1 &= 4a + 2b + c - (a + b + c) \\
6 - 3 &= 4a + 2b + c - a - b - c \\
3 &= 3a + b \qquad \ldots (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 - T_2 &= 9a + 3b + c - (4a + 2b + c) \\
10 - 6 &= 9a + 3b + c - 4a - 2b - c \\
4 &= 5a + b \qquad \ldots (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) - (1) &= 5a + b - (3a + b) \\
4 - 3 &= 5a + b - 3a - b \\
1 &= 2a \\
\therefore a &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Gebruik vergelyking } (1): \quad 3\left(\frac{1}{2}\right) + b &= 3 \\
\therefore b &= \frac{3}{2} \\
\text{Gebruik} \quad a + b + c &= 3 \\
\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + c &= 3 \\
\therefore c &= 1
\end{aligned}$$

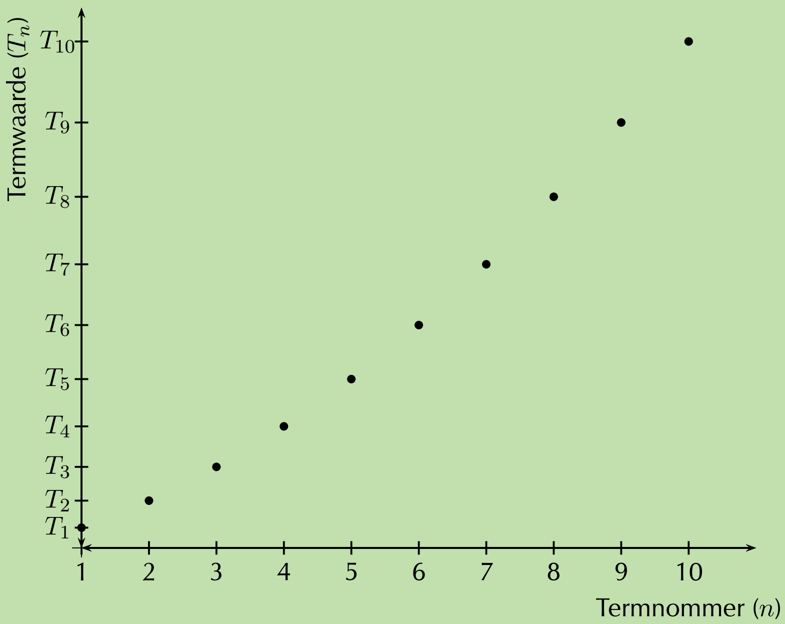
Daarom is die algemene term van die ry $T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$.

Stap 3: Trek 'n grafiek van T_n teenoor n

Gebruik die algemene term van die ry, $T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$, om die tabel te voltooi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_n	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Gebruik die tabel om die grafiek te trek:



In hierdie geval sal dit nie korrek wees om die punte te verbind nie: n dui die posisie van 'n term in 'n ry aan en kan dus slegs 'n positiewe heelgetal wees. Ons kan wel sien dat die punte in die vorm van 'n parabool is.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Olimpiese Spele sokkerkragmeting

VRAAG

In die eerste fase van die sokkerkragmeting by die Olimpiese Spele is daar spanne van vier verskillende lande in elke groep. Elke land in 'n groep moet een keer teen elke ander land in die groep speel.

1. Hoeveel wedstryde sal tydens die eerste fase in elke groep gespeel word?
2. Hoeveel wedstryde sal gespeel word as daar 5 spanne in elke groep is?
3. Hoeveel wedstryde sal gespeel word as daar 6 spanne in elke groep is?
4. Bepaal die algemene term vir die ry.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die aantal wedstryde as daar 4 spanne in 'n groep is

Laat die spanne van vier verskillende lande A, B, C en D wees.

spanne in 'n groep	wedstryde gespeel
A	AB, AC, AD
B	BC, BD
C	CD
D	
4	$3 + 2 + 1 = 6$

AB beteken dat span A teen span B speel en BA sal dieselfde wedstryd wees as AB. So, indien daar vier verskillende spanne in 'n groep is, speel elke groep 6 wedstryde.

Stap 2: Bepaal die aantal wedstryde indien daar 5 spanne in 'n groep is

Laat die spanne van vyf verskillende lande A, B, C, D en E wees.

spanne in 'n groep	wedstryde gespeel
A	AB, AC, AD, AE
B	BC, BD, BE
C	CD, CE
D	DE
E	
5	$4 + 3 + 2 + 1 = 10$

Indien daar dus vyf spanne in 'n groep is, speel elke groep 10 wedstryde.

Stap 3: Bepaal die aantal wedstryde indien daar 6 spanne in 'n groep is

Laat die spanne van ses verskillende lande A, B, C, D, E en F wees.

spanne in 'n groep	wedstryde gespeel
A	AB, AC, AD, AE, AF
B	BC, BD, BE, BF
C	CD, CE, CF
D	DE, DF
E	EF
F	
5	$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

Indien daar dus ses spanne in 'n groep is, speel elke groep 15 wedstryde.

Ons hou aan om die aantal spanne in 'n groep te vermeerder en vind dat 'n groep van 7 spanne, speel 21 wedstryde en 'n groep van 8 spanne, speel 28 wedstryde.

Stap 4: Beskou die ry

Ons ondersoek die ry om te bepaal of dit lineêr of kwadraties is:

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & n=1 & & n=2 & & n=3 & & n=4 & & n=5 \\
T_n & 6 & & 10 & & 15 & & 21 & & 28\ldots \\
\text{eerste verskil} & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & \\
\text{tweede verskil} & & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Ons sien dat die eerste verskille nie konstant is nie, maar dat daar wel 'n konstante tweede verskil is van 1. Die ry is dus kwadraties en het 'n algemene term van die vorm $T_n = an^2 + bn + c$.

Stap 5: Bepaal die algemene term T_n

Om die waardes van a, b en c vir $T_n = an^2 + bn + c$ te vind, kyk ons na die eerste 3 terme in die ry:

$$\begin{aligned}
n = 1 : T_1 &= a + b + c \\
n = 2 : T_2 &= 4a + 2b + c \\
n = 3 : T_3 &= 9a + 3b + c
\end{aligned}$$

Ons los 'n stel gelyktydige vergelykings op om die waardes van a, b en c te bepaal. Ons weet dat $T_1 = 6$, $T_2 = 10$ en $T_3 = 15$.

$$\begin{aligned}
a + b + c &= 6 \\
4a + 2b + c &= 10 \\
9a + 3b + c &= 15
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 - T_1 &= 4a + 2b + c - (a + b + c) \\
10 - 6 &= 4a + 2b + c - a - b - c \\
4 &= 3a + b \qquad \ldots(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_3 - T_2 &= 9a + 3b + c - (4a + 2b + c) \\
15 - 10 &= 9a + 3b + c - 4a - 2b - c \\
5 &= 5a + b \qquad \ldots(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) - (1) &= 5a + b - (3a + b) \\
5 - 4 &= 5a + b - 3a - b \\
1 &= 2a \\
\therefore a &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Gebruik vergelyking (1) :} \quad 3\left(\frac{1}{2}\right) + b &= 4 \\
\therefore b &= \frac{5}{2} \\
\text{Gebruik} \quad a + b + c &= 6 \\
\frac{1}{2} + \frac{5}{2} + c &= 6 \\
\therefore c &= 3
\end{aligned}$$

Daarom is die algemene term van die ry $T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 3$.

Oefening 3 – 3: Kwadratiese rye

1. Bereken die gemeenskaplike tweede verskil vir elk van die volgende kwadratiese rye:
   a) $3;\ 6;\ 10;\ 15;\ 21;\ \ldots$
   b) $4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ \ldots$
   c) $7;\ 17;\ 31;\ 49;\ 71;\ \ldots$
   d) $2;\ 10;\ 26;\ 50;\ 82;\ \ldots$
   e) $31;\ 30;\ 27;\ 22;\ 15;\ \ldots$
2. Bepaal die eerste vyf terme van die kwadratiese ry wat deur die volgende formule voorgestel word: $T_n = 5n^2 + 3n + 4$.
3. Gegee dat $T_n = 4n^2 + 5n + 10$, bepaal T_9.
4. Gegee $T_n = 2n^2$, vir watter waarde van n is $T_n = 32$?
5. a) Skryf die volgende twee terme van die kwadratiese ry neer: $16; 27; 42; 61; \ldots$
   b) Bepaal die algemene formule vir die kwadratiese ry hierbo.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25RR 1b. 25RS 1c. 25RT 1d. 25RV 1e. 25RW 2. 25RX
3. 25RY 4. 25RZ 5. 25S2

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

3.3 Opsomming EME36

Sien aanbieding: 25S3 op www.everythingmaths.co.za

- T_n is die algemene term van 'n ry.
- **Opeenvolgende** of **agtereenvolgende** terme is terme wat die een na die ander in 'n ry volg.
- 'n **Lineêre** ry het 'n konstante verskil (d) tussen enige twee opeenvolgende terme.

$$d = T_n - T_{n-1}$$

- 'n **Kwadratiese** ry het 'n konstante tweede verskil tussen enige twee opeenvolgende eerste verskille.
- Die algemene term vir 'n kwadratiese ry is

$$T_n = an^2 + bn + c$$

- 'n Algemene kwadratiese ry:

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$
T_n	$a + b + c$		$4a + 2b + c$		$9a + 3b + c$		$16a + 4b + c$
1ste verskil		$3a + b$		$5a + b$		$7a + b$	
2de verskil			$2a$		$2a$		

Oefening 3 – 4: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Bepaal die eerste vyf terme van die kwadratiese ry wat voorgestel word deur: $T_n = n^2 + 2n + 1$
2. Bepaal watter van die volgende rye is:
   - 'n lineêre ry,
   - 'n kwadratiese ry,
   - nie een van die twee nie.

   a) $6; 9; 14; 21; 30; \ldots$
   b) $1; 7; 17; 31; 49; \ldots$
   c) $8; 17; 32; 53; 80; \ldots$
   d) $9; 26; 51; 84; 125; \ldots$
   e) $2; 20; 50; 92; 146; \ldots$
   f) $5; 19; 41; 71; 109; \ldots$
   g) $2; 6; 10; 14; 18; \ldots$
   h) $3; 9; 15; 21; 27; \ldots$
   i) $1; 2{,}5; 5; 8{,}5; 13; \ldots$
   j) $10; 24; 44; 70; 102; \ldots$
   k) $2\frac{1}{2}; 6; 10\frac{1}{2}; 16; 22\frac{1}{2}; \ldots$
   l) $3p^2; 6p^2; 9p^2; 12p^2; 15p^2; \ldots$
   m) $2k; 8k; 18k; 32k; 50k; \ldots$

3. Gegee die patroon: $16; x; 46; \ldots$, bepaal die waarde van x indien die patroon lineêr is.

4. Gegee: $T_n = 2n^2$, vir watter waarde van n is $T_n = 242$?

5. Gegee: $T_n = 3n^2$, bepaal T_{11}.

6. Gegee: $T_n = n^2 + 4$, vir watter waarde van n is $T_n = 85$?

7. Gegee: $T_n = 4n^2 + 3n - 1$, bepaal T_5.

8. Gegee: $T_n = \frac{3}{2}n^2$, vir watter waarde van n is $T_n = 96$?

9. Vir elk van die volgende patrone, bepaal:

   - die volgende term in die patroon,
   - die algemene term,
   - die tiende term die patroon.

   a) $3; 7; 11; 15; \ldots$
   b) $17; 12; 7; 2; \ldots$
   c) $\frac{1}{2}; 1; 1\frac{1}{2}; 2; \ldots$
   d) $a; a+b; a+2b; a+3b; \ldots$
   e) $1; -1; -3; -5; \ldots$

10. Vir elk van die volgende rye, bepaal die vergelyking van die algemene term en gebruik dan die vergelyking om T_{100} te bepaal.

    a) $4; 7; 12; 19; 28; \ldots$

    b) $2; 8; 14; 20; 26; \ldots$

    c) $7; 13; 23; 37; 55; \ldots$

    d) $5; 14; 29; 50; 77; \ldots$

11. Gegee: $T_n = 3n - 1$

    a) Skryf die eerste vyf terme van die ry neer.

    b) Wat kom jy agter oor die verskil tussen enige twee opeenvolgende terme?

    c) Sal dit altyd die geval wees vir 'n lineêre ry?

12. Gegee die volgende ry: $-15; -11; -7; \ldots; 173$

    a) Bepaal die vergelyking vir die algemene term.

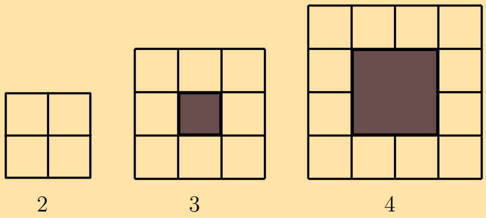
    b) Bereken hoeveel terme daar in die ry is.

13. Gegee $3; 7; 13; 21; 31; \ldots$

    a) Thabang bepaal dat die algemene term $T_n = 4n - 1$ is. Is hy reg? Verduidelik.

    b) Cristina bepaal dat die algemene term $T_n = n^2 + n + 1$ is. Is sy reg? Verduidelik.

14. Gegee die volgende patroon van blokke:



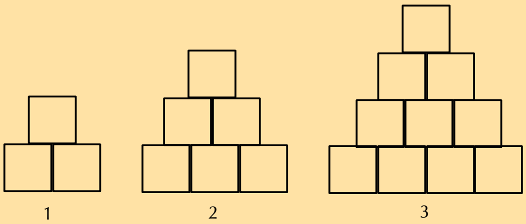
a) Teken patroon 5.

b) Voltooi onderstaande tabel:

patroonnommer (n)	2	3	4	5	10	250	n
aantal wit blokke (w)	4	8					

c) Is hierdie 'n lineêre of kwadratiese ry?

15. Kubusse van 1 cm^3 word op mekaar gestapel om 'n toring te vorm:



a) Voltooi die tabel vir die toring se hoogte:

toringnommer (n)	1	2	3	4	10	n
hoogte van die toring (h)	2					

b) Watter tipe ry is dit?

c) Beskou nou die aantal kubusse in elke toring en voltooi dan die onderstaande tabel:

toringnommer (n)	1	2	3	4
aantal kubusse (c)	3			

d) Watter tipe ry is dit?

e) Bepaal die algemene term vir hierdie ry.

f) Hoeveel kubusse word benodig vir toring nommer 21?

g) Hoe hoog sal 'n toring met 496 kubusse wees?

16. 'n Kwadratiese ry het 'n tweede term van 1, 'n derde term van -6 en 'n vierde term van -14.

a) Bepaal die tweede verskil vir hierdie ry.

b) Bepaal nou die eerste term van die patroon.

17. Daar is 15 skole wat kompeteer in die O16 dogtershokkiekampioenskap en elke span moet twee wedstryde speel: een tuiswedstryd en een wegwedstryd.

    a) Gebruik die gegewe inligting om die tabel te voltooi:

aantal skole	aantal wedstryde
1	0
2	
3	
4	
5	

    b) Bereken die tweede verskil.

    c) Bepaal die algemene term vir die ry.

    d) Hoeveel wedstryde sal gespeel word indien daar 15 skole in die kampioenskap speel?

    e) Indien 600 wedstryde gespeel moet word, hoeveel skole kompeteer in die kampioenskap?

18. Die eerste term van 'n kwadratiese ry is 4, die derde term is 34 en die gemeenskaplike tweede verskil is 10. Bepaal die eerste ses terme in die ry.

19. Uitdaging:

    Gegewe dat die algemene term vir 'n kwadratiese ry $T_n = an^2 + bn + c$ is, laat d die eerste verskil en D die gemeenskaplike tweede verskil wees.

    a) Wys dat $a = \frac{D}{2}$.

    b) Wys dat $b = d - \frac{3}{2}D$.

    c) Wys dat $c = T_1 - d + D$.

    d) Gevolglik, wys dat $T_n = \frac{D}{2}n^2 + \left(d - \frac{3}{2}D\right)n + (T_1 - d + D)$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25S4	2a. 25S5	2b. 25S6	2c. 25S7	2d. 25S8	2e. 25S9
2f. 25SB	2g. 25SC	2h. 25SD	2i. 25SF	2j. 25SG	2k. 25SH
2l. 25SJ	2m. 25SK	3. 25SM	4. 25SN	5. 25SP	6. 25SQ
7. 25SR	8. 25SS	9a. 25ST	9b. 25SV	9c. 25SW	9d. 25SX
9e. 25SY	10a. 25SZ	10b. 25T2	10c. 25T3	10d. 25T4	11. 25T5
12. 25T6	13. 25T7	14. 25T8	15. 25T9	16. 25TB	17. 25TC
18. 25TD	19. 25TF				

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

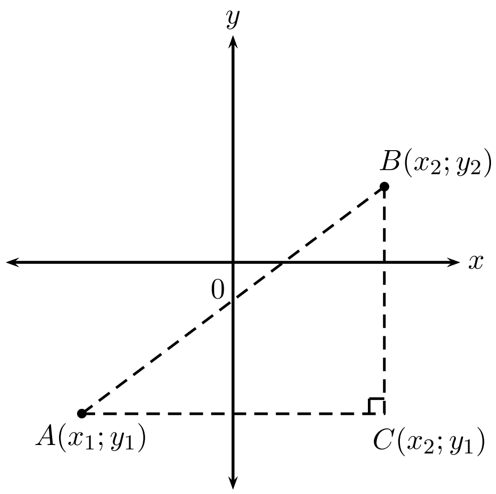
HOOFSTUK 4

Analitiese meetkunde

Analitiese meetkunde, ook bekend as koördinaatmeetkunde of Cartesiese meetkunde, is die studie van meetkundige eienskappe en verwantskappe tussen punte, lyne en hoeke in 'n Cartesiese vlak. Meetkundige vorms word beskryf met behulp van 'n koördinaatstelsel en algebraïese beginsels. In hierdie hoofstuk gaan ons kyk na die vergelyking van 'n reguitlyn, ewewydige en loodregte lyne en die gradiënt van 'n lyn.

4.1 Hersiening EME37

Punte $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ en $C(x_2; y_1)$ word in die diagram hieronder getoon:



Stelling van Pythagoras

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Afstandsformule

Afstand tussen twee punte:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Let op dat $(x_1 - x_2)^2 = (x_2 - x_1)^2$.

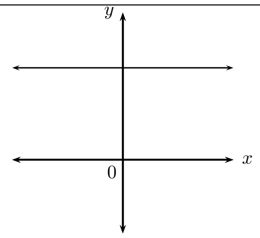
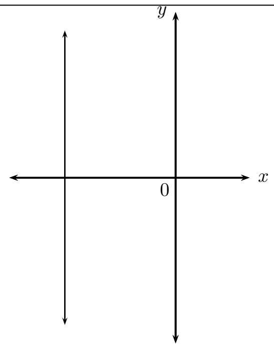
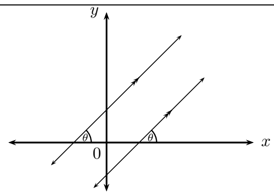
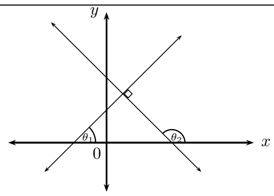
Sien video: 25TG op www.everythingmaths.co.za

Gradiënt

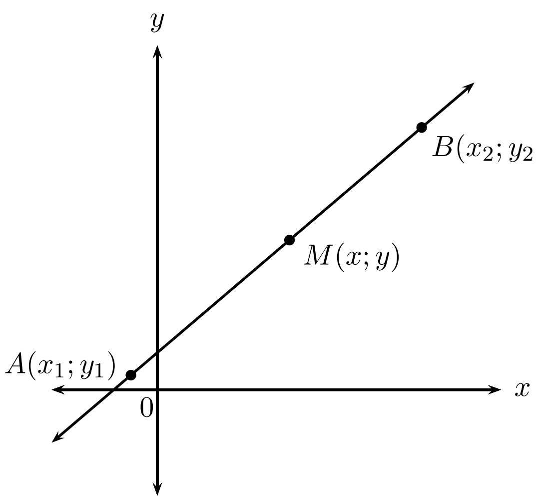
Gradiënt (m) beskryf die gradiënt van 'n lyn wat twee punte verbind. Die gradiënt van 'n lyn word deur die verhouding tussen die vertikale verandering en horisontale verandering gedefiniëer.

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{of} \quad m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Onthou om konsekwent te wees: $m \neq \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$.

Horisontale lyne		$m = 0$
Vertikale lyne		m is ongedefiniëerd
Ewewydige lyne		$m_1 = m_2$
Loodregte lyne		$m_1 \times m_2 = -1$

Middelpunt van 'n lynsegment



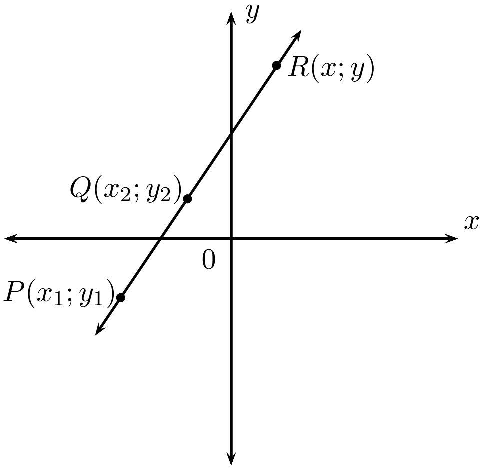
Die koördinate van die middelpunt $M(x; y)$ van 'n lyn tussen enige twee punte $A(x_1; y_1)$ en $B(x_2; y_2)$:

$$M(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Sien video: 25TH op www.everythingmaths.co.za

Punte op 'n reguitlyn

Die diagram toon punte $P(x_1; y_1)$, $Q(x_2; y_2)$ en $R(x; y)$ op 'n reguitlyn.



Ons weet dat $m_{PR} = m_{QR} = m_{PQ}$.

Deur $m_{PR} = m_{PQ}$ te gebruik, vind ons die volgende vir enige punt $(x; y)$ op 'n reguitlyn

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Uitgewerkte voorbeeld 1: Hersiening

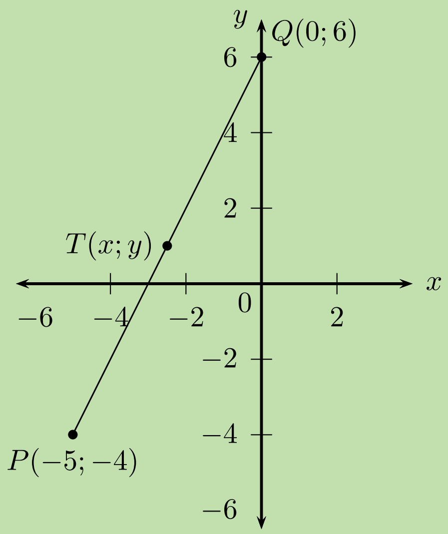
VRAAG

Gegewe die punte $P(-5; -4)$ en $Q(0; 6)$:

1. Bepaal die lengte van die lynsegment PQ.
2. Bepaal die middelpunt $T(x; y)$ van die lynsegment PQ.
3. Toon aan dat die lyn wat deur $R(1; -\frac{3}{4})$ en $T(x; y)$ gaan, loodreg is op die lyn PQ is.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Ken veranderlikes aan die koördinate van die gegewe punte toe

Laat die koördinate van $P\ (x_1; y_1)$ en $Q\ (x_2; y_2)$ wees

$$x_1 = -5; \qquad y_1 = -4; \qquad x_2 = 0; \qquad y_2 = 6$$

Skryf die afstandsformule neer

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(0 - (-5))^2 + (6 - (-4))^2} \\ &= \sqrt{25 + 100} \\ &= \sqrt{125} \\ &= 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

Die lengte van die lynsegment PQ is $5\sqrt{5}$ eenhede.

Stap 3: Skryf die middelpuntformule neer en vervang die waardes

$$T(x; y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ &= \frac{-5 + 0}{2} \\ &= -\frac{5}{2} \\ y &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{-4 + 6}{2} \\ &= \frac{2}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Die middelpunt van PQ is $T(-\frac{5}{2}; 1)$.

Stap 4: Bepaal die gradiënte van PQ en RT

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} m_{PQ} &= \frac{6 - (-4)}{0 - (-5)} \\ &= \frac{10}{5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
m_{RT} &= \frac{-\frac{3}{4} - 1}{1 - (-\frac{5}{2})} \\
&= \frac{-\frac{7}{4}}{\frac{7}{2}} \\
&= -\frac{7}{4} \times \frac{2}{7} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

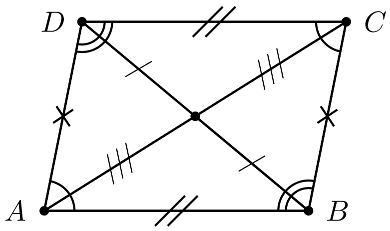
Bepaal die produk van die twee gradiënte:

$$
\begin{aligned}
m_{RT} \times m_{PQ} &= -\frac{1}{2} \times 2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Dus is PQ loodreg op RT.

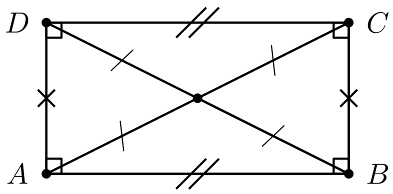
Vierhoeke

- ′n Vierhoek is ′n geslote vorm wat uit vier reguitlynsegmente bestaan.
- ′n Parallelogram is ′n vierhoek waarvan beide pare teenoorstaande sye parallel is.



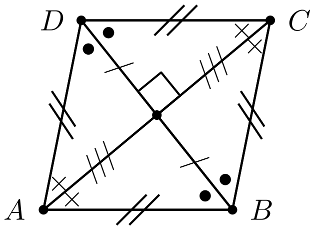
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
  - Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot
  - Die diagonale halveer mekaar (sny mekaar in die middel).

- ′n Reghoek is ′n parallelogram waarvan al vier hoeke gelyk is aan $90°$.



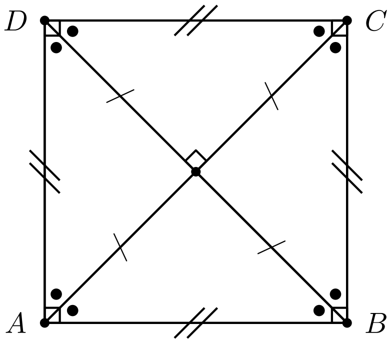
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank en parallel.
  - Die diagonale halveer mekaar (sny mekaar in die middel).
  - Die diagonale is ewe lank.

- 'n Rombus (of ruit) is 'n parallelogram waarvan al vier sye ewe lank is.



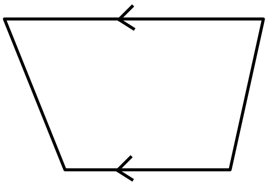
  - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank en parallel.
  - Die diagonale halveer mekaar reghoekig.
  - Die diagonale van 'n rombus halveer beide pare teenoorstaande hoeke.

- 'n Vierkant is 'n rombus waarvan al vier binnehoeke gelyk is aan $90°$.

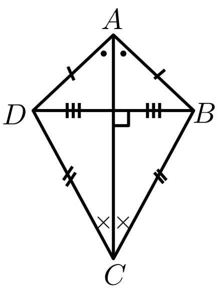


  - Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank en parallel.
  - Die diagonale halveer mekaar reghoekig.
  - Die diagonale is ewe lank.
  - Die diagonale halveer beide pare teenoorstaande hoeke (met ander woorde, alle hoeke is $45°$).

- 'n Trapesium is 'n vierhoek waarvan een paar teenoorstaande sye parallel is.



- 'n Vlieër is 'n vierhoek waarvan twee pare aangrensende sye ewe lank is.



  - Een paar teenoorstaande hoeke is ewe groot (die hoeke is tussen ongelyke sye).
  - Die diagonaal tussen gelyke sye halveer die ander diagonaal.
  - Die diagonaal tussen gelyke sye halveer die binnehoeke.
  - Die diagonale sny met hoeke van $90°$.

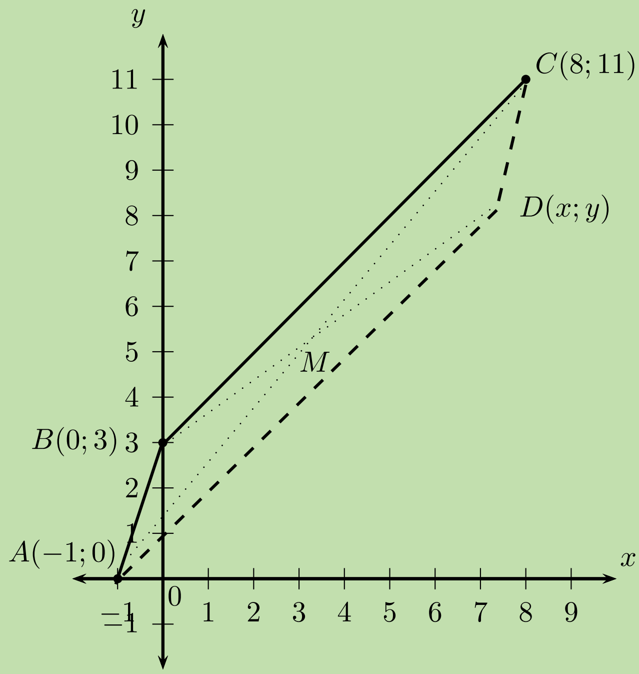
Uitgewerkte voorbeeld 2: Vierhoeke

VRAAG

Punte $A\,(-1;0)$, $B\,(0;3)$, $C\,(8;11)$ en $D\,(x;y)$ is punte op die Cartesiese vlak. Bepaal $D\,(x;y)$ as $ABCD$ 'n parallelogram is.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Die middelpunt van AC sal dieselfde wees as die middelpunt van BD. Ons vind eers die middelpunt van AC en gebruik dit dan om die koördinate van punt D bepaal.

Stap 2: Ken waardes toe aan $(x_1;y_1)$ en $(x_2;y_2)$

Laat die middelpunt van AC $M(x;y)$ wees.

$$x_1 = -1; \qquad y_1 = 0; \qquad x_2 = 8; \qquad y_2 = 11$$

Stap 3: Skryf die middelpuntformule neer

$$M(x;y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Stap 4: Vervang die waardes en bepaal die koördinate van M

$$\begin{aligned} M(x;y) &= \left(\frac{-1+8}{2}; \frac{0+11}{2}\right) \\ &= \left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right) \end{aligned}$$

Stap 5: Gebruik die koördinate van M om D te bepaal

M is ook die middelpunt van BD dus gebruik ons $M\left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right)$ en $B\,(0; 3)$ om $D\,(x; y)$ te vind.

Stap 6: Vervang die waardes en bepaal x en y

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ \therefore \left(\frac{7}{2}; \frac{11}{2}\right) &= \left(\frac{0 + x}{2}; \frac{3 + y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{7}{2} &= \frac{0 + x}{2} \\ 7 &= 0 + x \\ \therefore x &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{11}{2} &= \frac{3 + y}{2} \\ 11 &= 3 + y \\ \therefore y &= 8 \end{aligned}$$

Stap 7: Alternatiewe metode: inspeksie

Aangesien dit gegee is dat $ABCD$ 'n parallelogram is, kan ons die eienskappe van 'n parallelogram en die gegewe punte gebruik om die koördinate van D te bepaal.

Vanaf die skets verwag ons dat punt D laer as punt C sal lê.

Beskou die gegewe punte A, B en C:

- Teenoorstaande sye van 'n parallelogram is parallel, dus moet BC parallel wees aan AD en hul gradiënte moet dieselfde wees.
- Die vertikale verandering van B na C is 8 eenhede opwaarts.
- Dus is die vertikale verandering van A na D ook 8 eenhede opwaarts ($y = 0 + 8 = 8$).
- Die horisontale verandering van B na C is 8 eenhede na regs.
- Dus is die horisontale verandering van A na D ook 8 eenhede na regs ($x = -1 + 8 = 7$).

of

- Teenoorstaande sye van 'n parallelogram is parallel, dus moet AB parallel wees aan DC en hul gradiënte moet dieselfde wees.
- Die vertikale verandering van A na B is 3 eenhede opwaarts.

- Dus is die vertikale verandering van C na D 3 eenhede afwaarts ($y = 11-3 = 8$).
- Die horisontale verandering van A na B is 1 eenheid na regs.
- Dus is die horisontale verandering van C na D 1 eenheid na links ($x = 8-1 = 7$).

Stap 8: Skryf die finale antwoord neer

Die koördinate van D is $(7;8)$.

Oefening 4 – 1: Hersiening

1. Bepaal die lengte van die lynsegment tussen die volgende punte:
   a) $P(-3;5)$ en $Q(-1;-5)$
   b) $R(0{,}75;3)$ en $S(0{,}75;-4)$
   c) $T(2x;y-2)$ en $U(3x+1;y-2)$
2. Gegewe $Q(4;1), T(p;3)$ en lengte $QT = \sqrt{8}$ eenhede, bepaal die waarde van p.
3. Bepaal die gradiënt van die lyn AB as:
   a) $A(-5;3)$ en $B(-7;4)$
   b) $A(3;-2)$ en $B(1;-8)$
4. Bewys dat die lyn PQ, met $P(0;3)$ en $Q(5;5)$, parallel is aan die lyn $5y+5 = 2x$.
5. Gegewe die punte $A(-1;-1)$, $B(2;5)$, $C(-1;-\frac{5}{2})$ en $D(x;-4)$ en $AB \perp CD$, bepaal die waarde van x.
6. Bereken die koördinate van die middelpunt $P(x;y)$ van die lynsegment tussen die punte:
   a) $M(3;5)$ en $N(-1;-1)$
   b) $A(-3;-4)$ en $B(2;3)$
7. Die lyn wat $A(-2;4)$ en $B(x;y)$ verbind, het die middelpunt $C(1;3)$. Bepaal die waardes van x en y.
8. Gegewe die vierhoek $ABCD$ met hoekpunte $A(0;3)$, $B(4;3)$, $C(5;-1)$ en $D(1;-1)$.
   a) Bepaal die vergelyking van lyn AD en van lyn BC.
   b) Toon aan dat $AD \parallel BC$.
   c) Bereken die lengtes van AD en BC.
   d) Bepaal die vergelyking van die diagonaal BD.
   e) Watter soort vierhoek is $ABCD$?

9. $MPQN$ is 'n parallelogram met punte $M(-5;3)$, $P(-1;5)$ en $Q(4;5)$. Teken 'n skets en bepaal die koördinate van $N(x;y)$.

10. $PQRS$ is 'n vierhoek met punte $P(-3;1)$, $Q(1;3)$, $R(6;1)$ en $S(2;-1)$ in die Cartesiese vlak.

    a) Bepaal die lengtes van PQ en SR.
    b) Bepaal die middelpunt van PR.
    c) Toon aan dat $PQ \parallel SR$.
    d) Bepaal die vergelykings van lyn PS en van lyn SR.
    e) Is $PS \perp SR$? Verduidelik jou antwoord.
    f) Watter soort vierhoek is $PQRS$?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25TJ	1b. 25TK	1c. 25TM	2. 25TN	3a. 25TP	3b. 25TQ
4. 25TR	5. 25TS	6a. 25TT	6b. 25TV	7. 25TW	8. 25TX
9. 25TY	10. 25TZ				

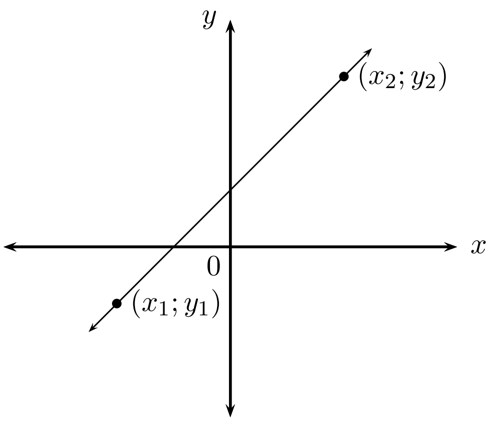
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

4.2 Vergelyking van 'n lyn EME38

Ons kan verskillende vorms van die vergelyking van die reguitlyn aflei. Die gebruik van die verskillende vorms hang af van watter inligting in die probleem gegee word.

- Die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking: $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- Die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- Die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking: $y = mx + c$

Die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking EME39



Gegewe enige twee punte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$, kan ons die vergelyking van die lyn wat deur twee punte gaan, bepaal deur gebruik te maak van die vergelyking:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

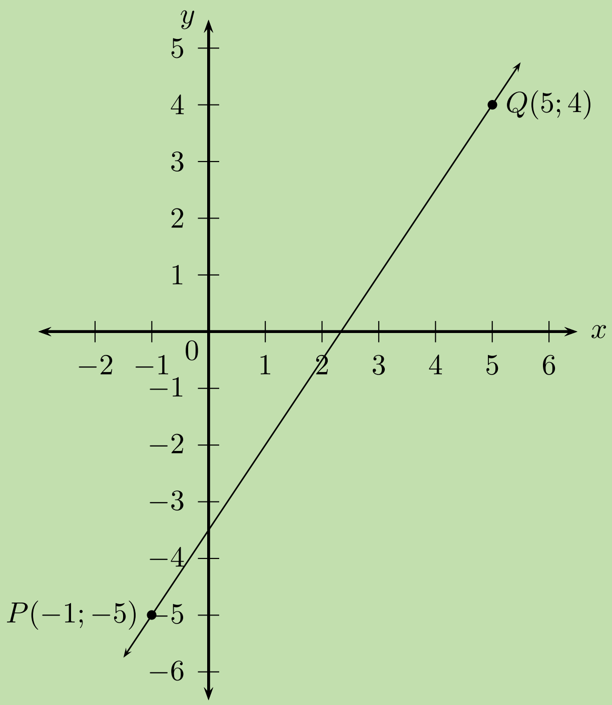
Uitgewerkte voorbeeld 3: Die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking

VRAAG

Vind die vergelyking van die reguitlyn wat deur $P\,(-1; -5)$ en $Q\,(5; 4)$ gaan.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Ken veranderlikes aan die koördinate van die gegewe punte toe

Laat die koördinate van $P(x_1; y_1)$ en $Q(x_2; y_2)$ wees

$$x_1 = -1; \qquad y_1 = -5; \qquad x_2 = 5; \qquad y_2 = 4$$

Stap 3: Skryf die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking neer

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stap 4: Vervang die waardes en maak y die onderwerp van die vergelyking

$$\begin{aligned} \frac{y-(-5)}{x-(-1)} &= \frac{4-(-5)}{5-(-1)} \\ \frac{y+5}{x+1} &= \frac{9}{6} \\ y+5 &= \frac{3}{2}(x+1) \\ y+5 &= \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y &= \frac{3}{2}x - \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord neer

$$y = \frac{3}{2}x - 3\frac{1}{2}$$

Oefening 4 – 2: Die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn deur die punte:

1. $(3; 7)$ en $(-6; 1)$
2. $(1; -\frac{11}{4})$ en $(\frac{2}{3}; -\frac{7}{4})$
3. $(-2; 1)$ en $(3; 6)$
4. $(2; 3)$ en $(3; 5)$
5. $(1; -5)$ en $(-7; -5)$
6. $(-4; 0)$ en $(1; \frac{15}{4})$
7. $(s; t)$ en $(t; s)$
8. $(-2; -8)$ en $(1; 7)$
9. $(2p; q)$ en $(0; -q)$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25V2 2. 25V3 3. 25V4 4. 25V5 5. 25V6 6. 25V7
7. 25V8 8. 25V9 9. 25VB

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking EME3B

Ons lei die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking af deur die definisie van gradiënt en die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking te gebruik

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vervang $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ aan die regterkant van die vergelyking

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Vermeningvuldig beide kante van die vergelyking met $(x - x_1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Om die vergelyking te kan gebruik het ons nodig om die gradiënt van die lyn en die koördinate van een punt op die lyn te weet.

Sien video: 25VC op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 4: Die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking

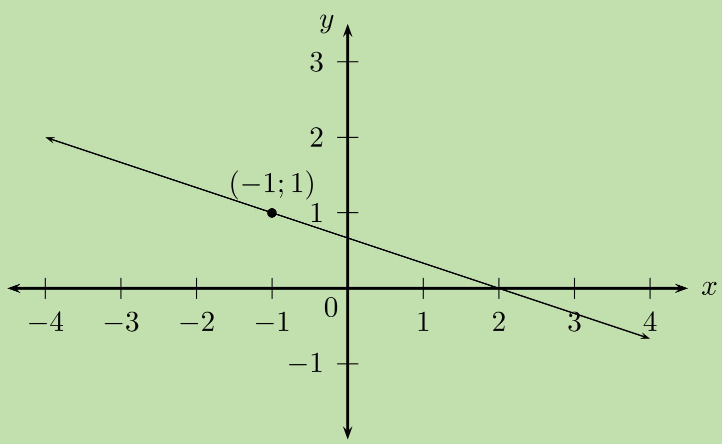
VRAAG

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn met gradiënt $m = -\frac{1}{3}$ en wat deur die punt $(-1; 1)$ gaan.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets

Ons let op dat $m < 0$, dus daal die grafiek soos x toeneem.



Stap 2: Skryf die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking neer

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vervang die waarde van die gradiënt

$$y - y_1 = -\frac{1}{3}(x - x_1)$$

Vervang die koördinate van 'n gegewe punt

$$\begin{aligned} y - 1 &= -\frac{1}{3}(x - (-1)) \\ y - 1 &= -\frac{1}{3}(x + 1) \\ y &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 1 \\ &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van die reguitlyn is $y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

As ons twee punte op 'n reguitlyn gegee word, kan ons ook die gradiënt–punt vorm gebruik om die vergelyking van 'n reguitlyn te bepaal. Ons bereken eerstens die gradiënt deur die twee gegewe punte te gebruik en vervang dan enigeen van die twee punte in die gradiënt–punt vorm van die vergelyking.

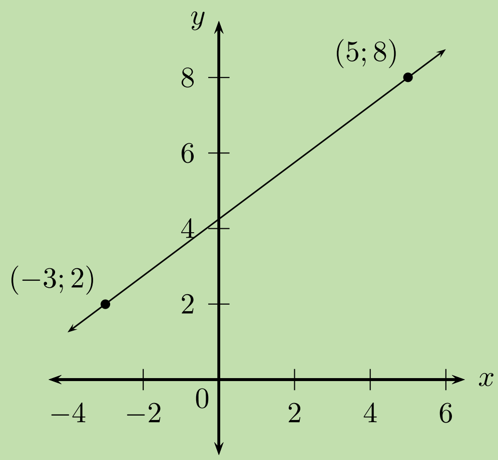
Uitgewerkte voorbeeld 5: Die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking

VRAAG

Bepaal die vergelyking van 'n reguitlyn wat deur $(-3; 2)$ en $(5; 8)$ gaan.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Ken veranderlikes aan die koördinate van die gegewe punte toe

$$x_1 = -3; \qquad y_1 = 2; \qquad x_2 = 5; \qquad y_2 = 8$$

Stap 3: Bereken die gradiënt deur die twee gegewe punte te gebruik

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{8-2}{5-(-3)} \\ &= \frac{6}{8} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking neer

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vervang die waarde van die gradiënt

$$y - y_1 = \frac{3}{4}(x - x_1)$$

Vervang die koördinate van ’n gegewe punt

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{3}{4}(x - x_1) \\ y - 2 &= \frac{3}{4}(x - (-3)) \\ y - 2 &= \frac{3}{4}(x + 3) \\ y &= \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} + 2 \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van die reguitlyn is $y = \frac{3}{4}x + 4\frac{1}{4}$.

Sien video: 25VD op www.everythingmaths.co.za

Oefening 4 – 3: Gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking:

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn:

1. gaan deur die punt $(-1; \frac{10}{3})$ en met $m = \frac{2}{3}$.
2. met $m = -1$ en gaan deur die punt $(-2; 0)$.
3. gaan deur die punt $(3; -1)$ en met $m = -\frac{1}{3}$.
4. parallel aan die x-as en gaan deur die punt $(0; 11)$.
5. gaan deur die punt $(1; 5)$ en met $m = -2$.
6. loodreg op die x-as en gaan deur die punt $(-\frac{3}{2}; 0)$.
7. met $m = -0{,}8$ en gaan deur die punt $(10; -7)$.
8. met ongedefiniëerde gradiënt en gaan deur die punt $(4; 0)$.
9. met $m = 3a$ en gaan deur die punt $(-2; -6a + b)$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25VF 2. 25VG 3. 25VH 4. 25VJ 5. 25VK 6. 25VM
7. 25VN 8. 25VP 9. 25VQ

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking EME3C

Deur gebruik te maak van die gradiënt–punt vorm, kan ons die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking aflei.

Ons begin met die vergelyking

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vermenigvuldig die hakies uit en maak y die onderwerp van die formule

$$\begin{aligned} y - y_1 &= mx - mx_1 \\ y &= mx - mx_1 + y_1 \\ y &= mx + (y_1 - mx_1) \end{aligned}$$

Ons definiëer die konstante c so dat $c = y_1 - mx_1$ sodat ons die volgende vergelyking kry:

$$y = mx + c$$

Hierdie word ook die **standaardvorm** van die reguitlynvergelyking genoem.

Let op dat wanneer $x = 0$, het ons

$$\begin{aligned} y &= m(0) + c \\ &= c \end{aligned}$$

Dus is c die y-afsnit van die reguitlyn.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking

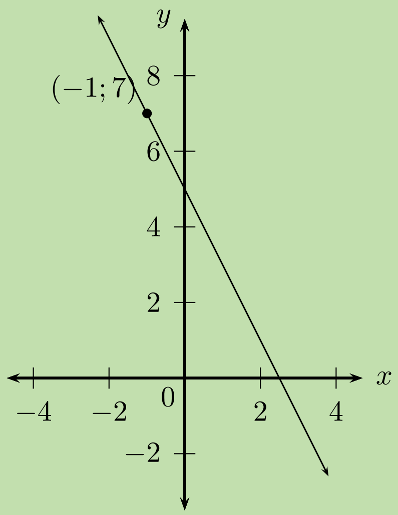
VRAAG

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn met die gradiënt $m = -2$ en wat deur die punt $(-1; 7)$ gaan.

OPLOSSING

Stap 1: Gradiënt van die lyn

Ons let op dat $m < 0$, dus daal die grafiek soos x toeneem.



Stap 2: Skryf die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking neer

$$y = mx + c$$

Vervang die waarde van die gradiënt

$$y = -2x + c$$

Vervang die koördinate van die gegewe punt en vind c

$$
\begin{aligned}
y &= -2x + c \\
7 &= -2(-1) + c \\
7 - 2 &= c \\
\therefore c &= 5
\end{aligned}
$$

Dit gee die y-afsnit $(0;5)$.

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van 'n reguitlyn is $y = -2x + 5$.

As ons twee punte op 'n reguitlyn gegee word, kan ons ook die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking gebruik om die vergelyking van die reguitlyn te bepaal. Ons gebruik gelyktydige vergelykings om vir die twee onbekendes, m en c, op te los deur van die metodes van substitusie (vervanging) of eliminasie gebruik te maak.

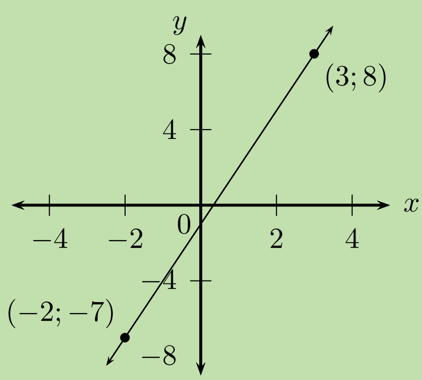
Uitgewerkte voorbeeld 7: Die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking

VRAAG

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punte $(-2;-7)$ en $(3;8)$ gaan.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Skryf die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking neer

$$y = mx + c$$

Stap 3: Vervang die koördinate van die gegewe punte

$$
\begin{aligned}
-7 &= m(-2) + c \\
-7 &= -2m + c \qquad \ldots(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8 &= m(3) + c \\
8 &= 3m + c \qquad \ldots(2)
\end{aligned}
$$

Ons het twee vergelyings met twee onbekendes; ons kan dus die probleem oplos met behulp van gelyktydige vergelykings.

Stap 4: Maak die koëffisiënt van een van die veranderlikes dieselfde in beide vergelykings

Ons kan sien dat die koëffisiënt van c in beide vergelykings 1 is, dus kan ons die een vergelyking van die ander een aftrek om c te elimineer:

$$
\begin{aligned}
-7 &= -2m + c \\
-(8 &= 3m + c) \\
-15 &= -5m \\
\therefore 3 &= m
\end{aligned}
$$

Vervang $m = 3$ in enigeen van die twee vergelykings en bepaal c:

$$
\begin{aligned}
-7 &= -2m + c \\
-7 &= -2(3) + c \\
\therefore c &= -1
\end{aligned}
$$

of

$$
\begin{aligned}
8 &= 3m + c \\
8 &= 3(3) + c \\
\therefore c &= -1
\end{aligned}
$$

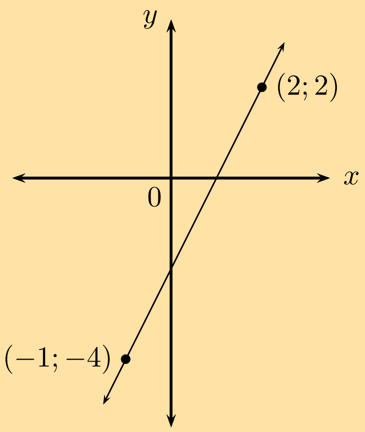
Stap 5: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van 'n reguitlyn is $y = 3x - 1$.

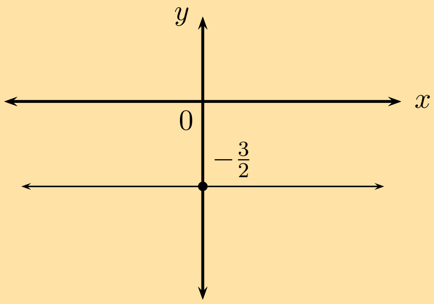
Oefening 4 – 4: Die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn:

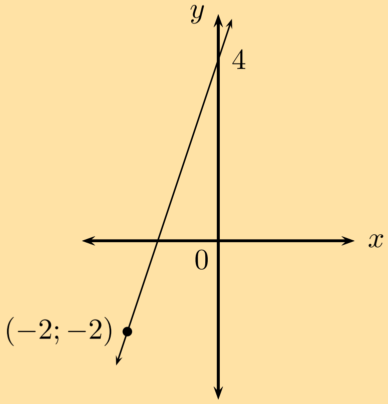
1. gaan deur die punt $(\frac{1}{2};4)$ en met $m = 2$.
2. gaan deur die punte $(\frac{1}{2};-2)$ en $(2;4)$.
3. gaan deur die punte $(2;-3)$ en $(-1;0)$.
4. gaan deur die punt $(2;-\frac{6}{7})$ en met $m = -\frac{3}{7}$.
5. wat die y-as by $y = -\frac{1}{5}$ sny en met $m = \frac{1}{2}$.
6.



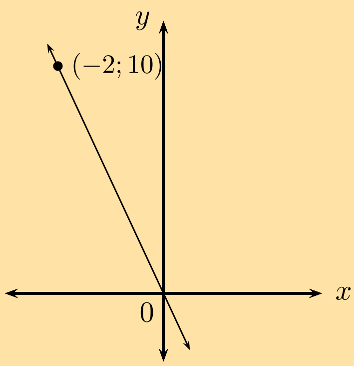
7.



8.



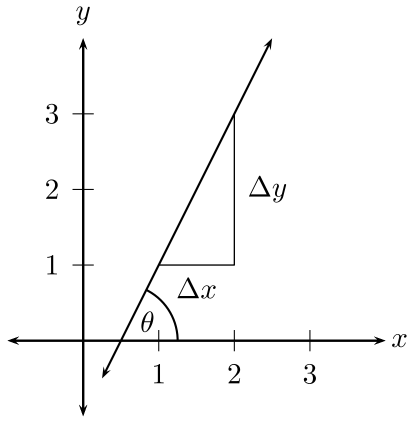
9.



Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25VR 2. 25VS 3. 25VT 4. 25VV 5. 25VW 6. 25VX
7. 25VY 8. 25VZ 9. 25W2

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za



Die diagram toon dat 'n reguitlyn 'n hoek θ met die positiewe x-as maak. Dit word die **inklinasiehoek** van 'n reguitlyn genoem.

Ons sien dat as die gradiënt verander, dan verander die waarde van θ ook, dus is daar 'n verband tussen die inklinasiehoek van 'n lyn en sy gradiënt. Ons weet dat die gradiënt die verhouding is tussen 'n verandering in die y-rigting en 'n verandering in die x-rigting:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Vanuit trigonometrie weet ons dat die tangensfunksie gedefiniëer word as die verhouding:

$$\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$$

Vanuit die diagram sien ons dat

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ \therefore m &= \tan\theta \qquad \text{vir } 0^\circ \leq \theta < 180^\circ \end{aligned}$$

Dus is die gradiënt van 'n reguitlyn gelyk aan die tangens van die hoek wat gevorm word tussen die lyn en die positiewe rigting van die x-as.

Vertikale lyne

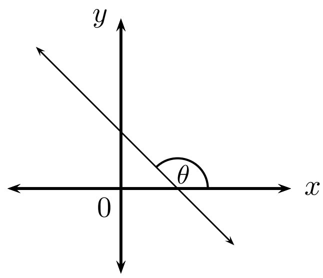
- $\theta = 90^\circ$
- Gradiënt is ongedefiniëerd aangesien daar geen verandering in die x-waardes is nie ($\Delta x = 0$).
- Dus is $\tan\theta$ ook ongedefiniëerd (die grafiek van $\tan\theta$ het 'n asimptoot by $\theta = 90^\circ$).

Horisontale lyne

- $\theta = 0°$
- Gradiënt is gelyk aan 0, aangesien daar geen verandering in die y-waardes is nie ($\Delta y = 0$).
- Dus is $\tan\theta$ ook gelyk aan 0 (die grafiek van $\tan\theta$ gaan deur die oorprong ($0°; 0$)).

Lyne met negatiewe gradiënte

As 'n reguitlyn 'n negatiewe gradiënt het ($m < 0$, $\tan\theta < 0$), dan is die hoek wat gevorm word tussen die lyn en die positiewe rigting van die x-as is stomphoek.



Vanuit die CAST diagram in trigonometrie weet ons dat die tangensfunksie negatief is in die tweede en vierde kwadrante. As ons die inklinasiehoek van 'n lyn met 'n negatiewe gradiënt bereken, moet ons $180°$ bytel om die negatiewe hoek in die vierde kwadrant te verander na 'n stomphoek in die tweede kwadrant.

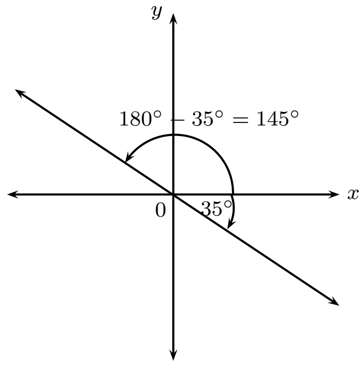
As ons 'n reguitlyn met gradiënt $m = -0{,}7$ gegee word, dan kan ons die inklinasiehoek met 'n sakrekenaar bepaal:

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= m \\
&= -0{,}7 \\
\therefore \theta &= \tan^{-1}(-0{,}7) \\
&= -35{,}0°
\end{aligned}$$

Hierdie negatiewe hoek lê in die vierde kwadrant. Ons moet $180°$ bytel om by die stomphoek in die tweede kwadrant uit te kom:

$$\begin{aligned}
\theta &= -35{,}0° + 180° \\
&= 145°
\end{aligned}$$

En ons kan altyd ons sakrekenaar gebruik om te bevestig dat die stomphoek $\theta = 145°$ 'n gradiënt van $m = -0{,}7$ gee.



Oefening 4 – 5: Inklinasiehoek

1. Bepaal die gradiënt (korrek tot 1 desimale plek) vir elk van die volgende reguitlyne, gegewe dat die inklinasiehoek gelyk is aan:

   a) $60°$
   b) $135°$
   c) $0°$
   d) $54°$
   e) $90°$
   f) $45°$
   g) $140°$
   h) $180°$
   i) $75°$

2. Bepaal die inklinasiehoek (korrek tot 1 desimale plek) vir elkeen van die volgende:

   a) 'n lyn met $m = \frac{3}{4}$
   b) $2y - x = 6$
   c) die lyn gaan deur die punte $(-4; -1)$ en $(2; 5)$
   d) $y = 4$
   e) $x = 3y + \frac{1}{2}$
   f) $x = -0{,}25$
   g) die lyn gaan deur die punte $(2; 5)$ en $(\frac{2}{3}; 1)$
   h) 'n lyn met 'n gradiënt gelyk aan $0{,}577$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25W3 1b. 25W4 1c. 25W5 1d. 25W6 1e. 25W7 1f. 25W8
1g. 25W9 1h. 25WB 1i. 25WC 2a. 25WD 2b. 25WF 2c. 25WG
2d. 25WH 2e. 25WJ 2f. 25WK 2g. 25WM 2h. 25WN

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

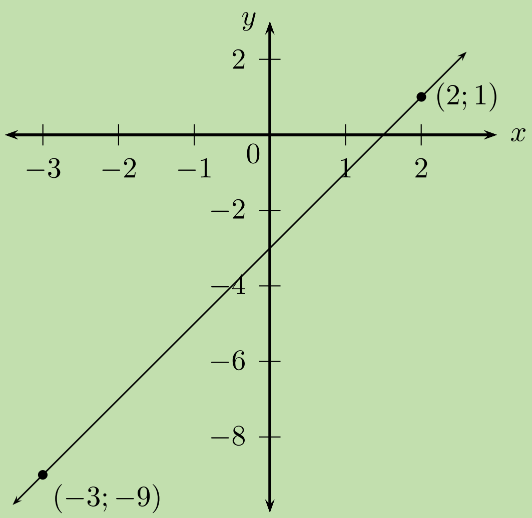
Uitgewerkte voorbeeld 8: Inklinasie van 'n reguitlyn

VRAAG

Bepaal die inklinasiehoek (korrek tot 1 desimale plek) van die reguitlyn wat deur die punte $(2;1)$ en $(-3;-9)$ gaan.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets



Stap 2: Ken veranderlikes toe aan die koördinate van die gegewe punte toe

$$x_1 = 2; \qquad y_1 = 1; \qquad x_2 = -3; \qquad y_2 = -9$$

Stap 3: Bepaal die gradiënt van 'n lyn

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-9-1}{-3-2} \\ &= \frac{-10}{-5} \\ \therefore m &= 2 \end{aligned}$$

Stap 4: Gebruik die gradiënt om die inklinasiehoek van die lyn te bepaal

$$\begin{aligned} \tan\theta &= m \\ &= 2 \\ \therefore \theta &= \tan^{-1} 2 \\ &= 63{,}4^\circ \end{aligned}$$

Belangrik: maak seker dat jou sakrekenaar op die DEG (grade) stelling is.

Stap 5: Skryf die finale antwoord neer.

Die inklinasiehoek van die reguitlyn is $63{,}4^\circ$.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Inklinasie van 'n reguitlyn

VRAAG

Bepaal die vergelyking van 'n reguitlyn wat deur die punt $(3; 1)$ gaan met 'n inklinasiehoek van $135°$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die inklinasiehoek om die gradiënt van die lyn te bepaal

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ &= \tan 135° \\ \therefore m &= -1 \end{aligned}$$

Stap 2: Skryf die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking neer

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vervang $m = -1$

$$y - y_1 = -(x - x_1)$$

Vervang die gegewe punt $(3; 1)$

$$\begin{aligned} y - 1 &= -(x - 3) \\ y &= -x + 3 + 1 \\ &= -x + 4 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van die reguitlyn is $y = -x + 4$.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Inklinasie van 'n reguitlyn

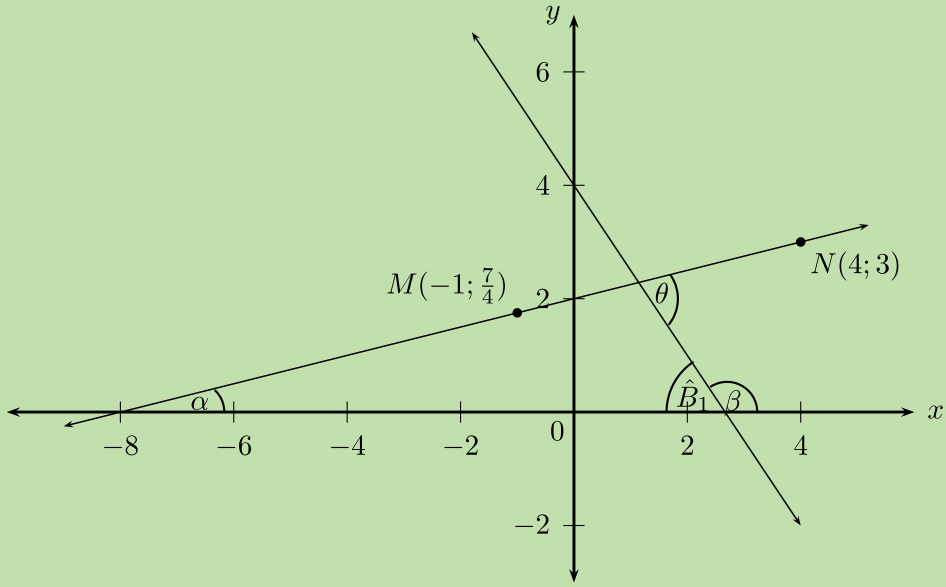
VRAAG

Bepaal die skerphoek (korrek tot 1 desimale plek) tussen die lyn wat deur die punte $M(-1; 1\frac{3}{4})$ en $N(4; 3)$ gaan en die reguitlyn $y = -\frac{3}{2}x + 4$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets

Teken die lyn deur die punte $M(-1; 1\frac{3}{4})$ en $N(4; 3)$ en die lyn $y = -\frac{3}{2}x + 4$ op 'n gepaste assestelsel. Dui α en β, die inklinasiehoeke van die twee lyne, aan. Dui ook θ, die skerphoek tussen die twee reguitlyne, aan.



Let op dat α en θ skerphoeke is en dat β 'n stomphoek is.

$$\hat{B}_1 = 180° - \beta \qquad (\angle \text{ op reguitlyn})$$

$$\text{en } \theta = \alpha + \hat{B}_1 \qquad (\text{buite } \angle \text{ van } \triangle = \text{ som teenoorst. binne } \angle\text{e})$$

$$\therefore \theta = \alpha + (180° - \beta)$$

$$= 180° + \alpha - \beta$$

Stap 2: Gebruik die gradiënt om die inklinasiehoek β te bepaal

Vanuit die vergelyking $y = -\frac{3}{2}x + 4$ kan ons sien dat $m < 0$, dus is β 'n stomphoek só dat $90° < \beta < 180°$.

$$\tan \beta = m$$

$$= -\frac{3}{2}$$

$$\tan^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right) = -56{,}3°$$

Hierdie negatiewe hoek lê in die vierde kwadrant. Ons weet dat die inklinasiehoek β 'n stomphoek is wat in die tweede kwadrant lê, dus

$$\beta = -56{,}3° + 180°$$

$$= 123{,}7°$$

Stap 3: Bepaal die gradiënt en die inklinasiehoek vir die lyn deur M en N

Bepaal die gradiënt

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{3 - \frac{7}{4}}{4 - (-1)} \\ &= \frac{\frac{5}{4}}{5} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Bepaal die inklinasiehoek

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= m \\ &= \frac{1}{4} \\ \therefore \alpha &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \\ &= 14{,}0^\circ \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

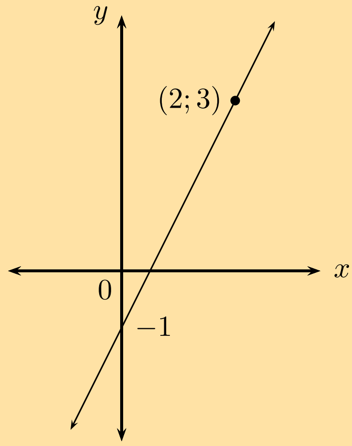
$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ + \alpha - \beta \\ &= 180^\circ + 14{,}0^\circ - 123{,}7^\circ \\ &= 70{,}3^\circ \end{aligned}$$

Die skerphoek tussen twee reguitlyne is $70{,}3^\circ$.

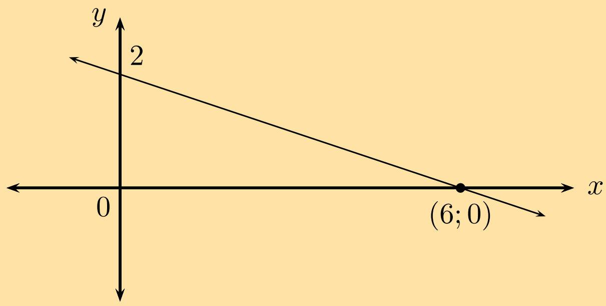
Oefening 4 – 6: Inklinasie van 'n reguitlyn

1. Bepaal die inklinasiehoek vir elkeen van die volgende:
   a) 'n lyn met $m = \frac{4}{5}$
   b) $x + y + 1 = 0$
   c) 'n lyn met $m = 5{,}69$
   d) die lyn wat deur $(1; 1)$ en $(-2; 7)$ gaan
   e) $3 - 2y = 9x$
   f) die lyn wat deur $(-1; -6)$ en $(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{2})$ gaan
   g) $5 = 10y - 15x$

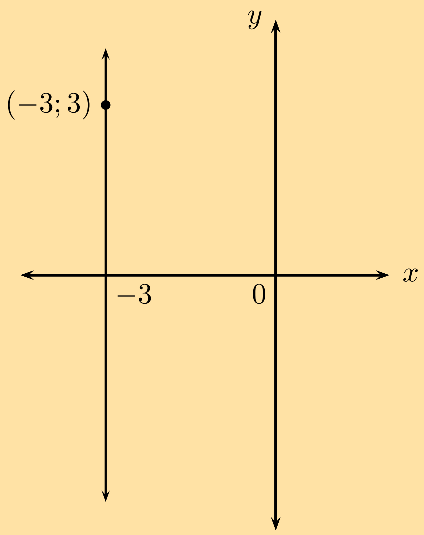
h)



i)



j)



2. Bepaal die skerphoek tussen die lyn wat deur die punte $A(-2; \frac{1}{5})$ en $B(0; 1)$ gaan en die lyn wat deur punte $C(1; 0)$ en $D(-2; 6)$ gaan.
3. Bepaal die hoek tussen die lyn $y + x = 3$ en die lyn $x = y + \frac{1}{2}$.
4. Vind die hoek tussen die lyn $y = 2x$ en die lyn wat deur die punte $(-1; \frac{7}{3})$ en $(0; 2)$ gaan.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25WP 1b. 25WQ 1c. 25WR 1d. 25WS 1e. 25WT 1f. 25WV
1g. 25WW 1h. 25WX 1i. 25WY 1j. 25WZ 2. 25X2 3. 25X3
4. 25X4

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

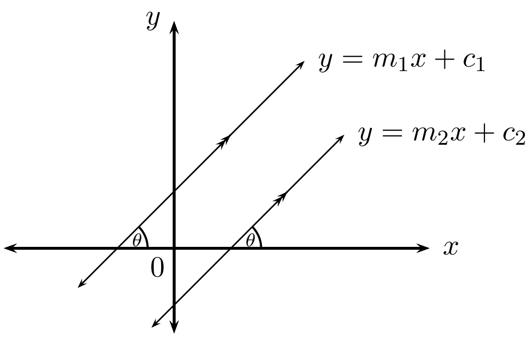
4.4 Ewewydige lyne

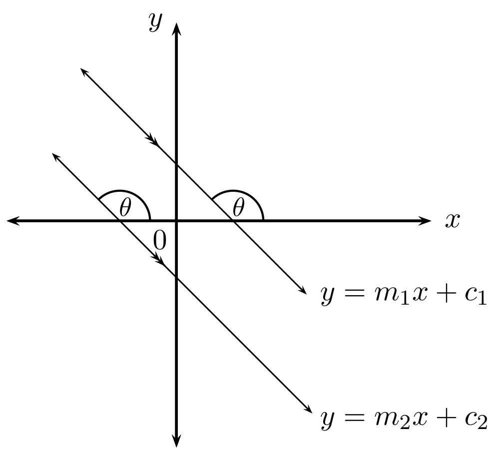
Ondersoek: Ewewydige lyne

1. Maak 'n skets van die lyn wat deur die punte $P(-1;0)$ en $Q(1;4)$ gaan en die lyn wat deur punte $R(1;2)$ en $S(2;4)$ gaan.
2. Benoem en meet α en β, die inklinasiehoeke van reguitlyne PQ en RS, onderskeidelik.
3. Beskryf die verwantskap tussen α en β.
4. "α en β is verwisselende hoeke, dus $PQ \parallel RS$." Is hierdie stelling waar? Indien nie, gee die korrekte stelling.
5. Gebruik jou sakrekenaar om $\tan\alpha$ en $\tan\beta$ te bepaal.
6. Voltooi die sin: ...... lyne het ...... inklinasiehoeke.
7. Bepaal die vergelykings van die reguitlyne PQ en RS.
8. Wat let jy op omtrent m_{PQ} en m_{RS}?
9. Voltooi die sin: ...... lyne het ...... gradiënte.

'n Ander metode om die vergelyking van 'n reguitlyn te bepaal, is om 'n punt $(x_1;y_1)$ te hê op die onbekende lyn, asook die vergelyking van 'n lyn wat parallel is aan die onbekende lyn.

Laat die vergelyking va die onbekende lyn $y = m_1x + c_1$ wees en die vergelyking van die gegewe lyn $y = m_2x + c_2$ wees.





As die twee lyne parallel is, dan

$$m_1 = m_2$$

Belangrik: wanneer die gradiënt van die lyn met behulp van die koëffisiënt van x bepaal word, maak seker dat die gegewe vergelyking in die gradiënt–afsnit (standaard) vorm geskryf is, $y = mx + c$.

Vervang die waarde van m_2 en die gegewe punt $(x_1; y_1)$, in die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

en bepaal die vergelyking van die onbekende lyn.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Ewewydige lyne

VRAAG

Bepaal die vergelyking van die lyn wat deur $(-1; 1)$ gaan en ewewydig is aan die lyn $y - 2x + 1 = 0$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf in die gradiënt–afsnit vorm

Ons skryf die gegewe vergelyking in die gradiënt–afsnit vorm en bepaal die waarde van m.

$$y = 2x - 1$$

Ons weet dat die twee lyne ewewydig is, dus $m_1 = m_2 = 2$.

Stap 2: Skryf die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking neer

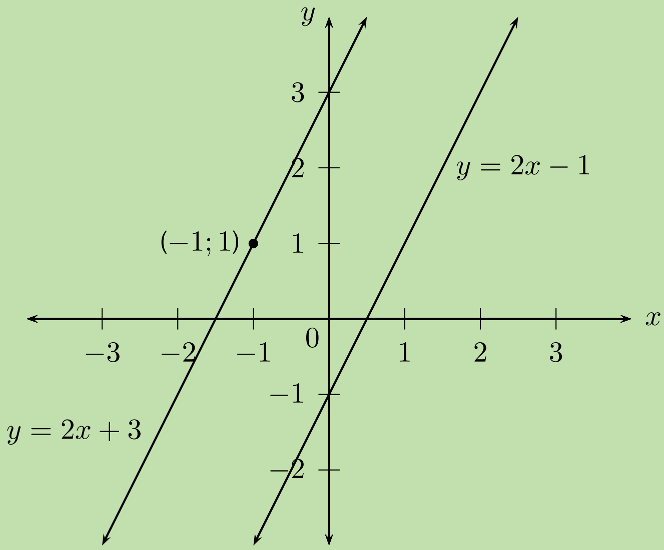
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vervang $m = 2$

$$y - y_1 = 2(x - x_1)$$

Vervang die gegewe punt $(-1; 1)$

$$\begin{aligned} y - 1 &= 2(x - (-1)) \\ y - 1 &= 2x + 2 \\ y &= 2x + 2 + 1 \\ &= 2x + 3 \end{aligned}$$



'n Skets was nie nodig nie, maar dit is altyd nuttig en kan gebruik word om antwoorde te kontroleer.

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van 'n reguitlyn is $y = 2x + 3$.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Ewewydige lyne

VRAAG

Lyn AB gaan deur die punt $A(0; 3)$ en het 'n inklinasiehoek van $153{,}4^\circ$. Bepaal die vergelyking van die lyn CD wat deur die punt $C(2; -3)$ gaan en ewewydig is aan AB.

OPLOSSING

Stap 1: Die gebruik van die gegewe inklinasiehoek om die gradiënt te bepaal

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \tan\theta \\ &= \tan 153{,}4^\circ \\ &= -0{,}5 \end{aligned}$$

Stap 2: Ewewydige lyne het dieselfde gradiënt

Aangesien aan ons gegee is dat $AB \parallel CD$,

$$m_{CD} = m_{AB} = -0{,}5$$

Stap 3: Skryf die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking neer

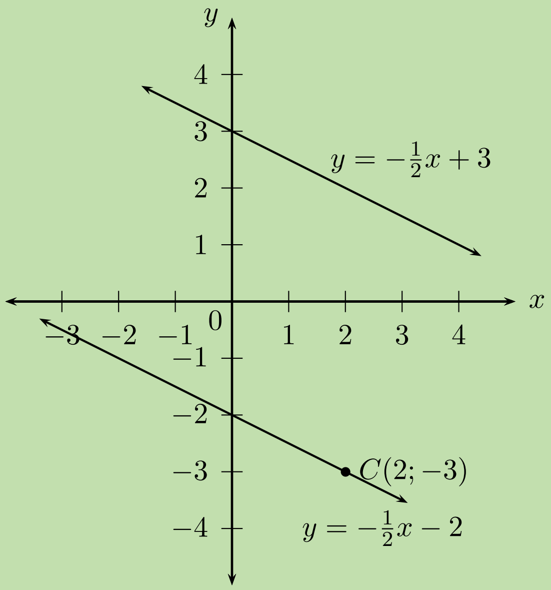
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vervang die gradiënt $m_{CD} = -0{,}5$.

$$y - y_1 = -\frac{1}{2}(x - x_1)$$

Vervang die gegewe punt $(2; -3)$.

$$\begin{aligned} y - (-3) &= -\frac{1}{2}(x - 2) \\ y + 3 &= -\frac{1}{2}x + 1 \\ y &= -\frac{1}{2}x - 2 \end{aligned}$$



'n Skets was nie nodig nie, maar is altyd nuttig.

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van 'n reguitlyn is $y = -\frac{1}{2}x - 2$.

Sien video: 25X5 op www.everythingmaths.co.za

Oefening 4 – 7: Ewewydige lyne

1. Bepaal of die volgende twee lyne ewewydig is of nie:
   a) $y + 2x = 1$ en $-2x + 3 = y$
   b) $\frac{y}{3} + x + 5 = 0$ en $2y + 6x = 1$
   c) $y = 2x - 7$ en die lyn wat deur $(1; -2)$ en $(\frac{1}{2}; -1)$ gaan
   d) $y + 1 = x$ en $x + y = 3$
   e) Die lyn wat deur punte $(-2; -1)$ en $(-4; -3)$ gaan en die lyn $-y+x-4 = 0$
   f) $y - 1 = \frac{1}{3}x$ en die lyn wat deur punte $(-2; 4)$ en $(1; 5)$ gaan
2. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(1; -5)$ gaan en ewewydig is aan die lyn $y + 2x - 1 = 0$.
3. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; -6)$ gaan en ewewydig is aan die lyn $2y + 1 = 6x$.
4. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; -2)$ gaan en ewewydig is aan die lyn met 'n inklinasiehoek van $\theta = 56{,}31°$.
5. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; \frac{2}{5})$ gaan en ewewydig is aan die lyn met 'n inklinasiehoek van $\theta = 145°$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25X6 1b. 25X7 1c. 25X8 1d. 25X9 1e. 25XB 1f. 25XC
2. 25XD 3. 25XF 4. 25XG 5. 25XH

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

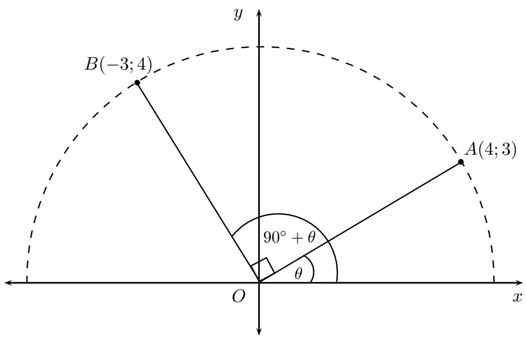
4.5 Loodregte lyne EME3G

Ondersoek: Loodregte lyne

1. Maak 'n skets van die lyn wat deur die punte $A(-2; -3)$ en $B(2; 5)$ gaan en die lyn wat deur punte $C(-1; \frac{1}{2})$ en $D(4; -2)$ gaan.
2. Benoem en meet α en β, die inklinasiehoeke van reguitlyne AB en CD, onderskeidelik.
3. Benoem en meet θ, die hoek tussen die lyne AB en CD.
4. Beskryf die verwantskap tussen die lyne AB en CD.
5. "θ is 'n refleksehoek, dus $AB \perp CD$." Is hierdie 'n waar stelling? Indien nie, gee 'n korrekte stelling.
6. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn AB en die lyn CD.

7. Gebruik jou sakrekenaar om $\tan\alpha \times \tan\beta$ te bepaal.
8. Bepaal $m_{AB} \times m_{CD}$.
9. Wat let jy op in verband met hierdie produkte?
10. Voltooi die sin: as twee lyne ...... aan mekaar is, dan is die produk van hulle ...... gelyk ......
11. Voltooi die sin: as die gradiënt van 'n reguitlyn gelyk is aan die negatief ...... van die gradiënt van 'n ander lyn, dan is die twee lyne ......

Die afleiding van die formule: $m_1 \times m_2 = -1$



Beskou die punt $A(4;3)$ met 'n inklinasiehoek van $A\hat{O}X = \theta$ op die Cartesiese vlak, roteer deur 'n hoek van $90°$ en plaas punt B by $(-3;4)$ sodat ons 'n inklinasiehoek van $B\hat{O}X = 90° + \theta$ het.

Ons bepaal die gradiënt van OA:

$$
\begin{aligned}
m_{OA} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{3-0}{4-0} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Bepaal die gradiënt van OB:

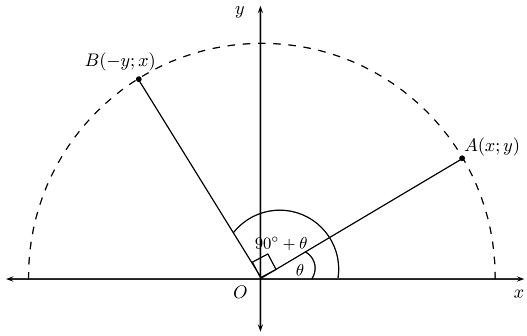
$$
\begin{aligned}
m_{OB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{4-0}{-3-0} \\
&= \frac{4}{-3}
\end{aligned}
$$

Deur $90°$ rotasie het ons dat $OB \perp OA$

$$
\begin{aligned}
m_{OA} \times m_{OB} &= \frac{3}{4} \times \frac{4}{-3} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Ons kan ook skryf dat

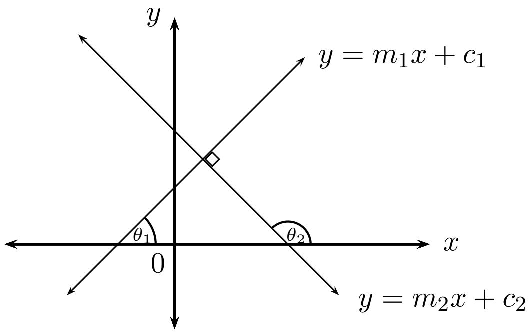
$$m_{OA} = -\frac{1}{m_{OB}}$$



As ons 'n algemene punt $A(x;y)$ het met 'n inklinasiehoek $A\hat{O}X = \theta$ en punt $B(-y;x)$ sodat $B\hat{O}X = 90° + \theta$, dan weet ons dat

$$\begin{aligned} m_{OA} &= \frac{y}{x} \\ m_{OB} &= -\frac{x}{y} \\ \therefore m_{OA} \times m_{OB} &= \frac{y}{x} \times -\frac{x}{y} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Nog 'n metode om die vergelyking van 'n reguitlyn te bepaal is om 'n punt op die lyn te hê, $(x_1;y_1)$, asook die vergelyking van 'n lyn wat loodreg op die onbekende lyn is. Laat die vergelyking van die onbekende lyn $y = m_1x + c_1$ wees en die vergelyking van die gegewe lyn $y = m_2x + c_2$ wees.



As die twee lyne loodreg is dan

$$m_1 \times m_2 = -1$$

Nota: hierdie reël is nie van toepassing op vertikale of horisontale lyne nie.

Wanneer ons die gradiënt van 'n lyn bepaal deur die koëffisiënt van x te gebruik, maak seker dat die gegewe vergelyking in die gradiënt–afsnit (standaard) vorm geskryf is $y = mx + c$. Dan weet ons dat

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Vervang die waarde van m_1 en die gegewe punt $(x_1; y_1)$, in die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking $y - y_1 = m(x - x_1)$ en bepaal die vergelyking van die onbekende lyn.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Loodregte lyne

VRAAG

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur punt $T(2; 2)$ gaan en loodreg op die lyn $3y + 2x - 6 = 0$ is.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die vergelyking in die standaardvorm

Laat die gradiënt van die onbekende lyn m_1 wees en laat die gegewe gradiënt m_2 wees. Ons skryf die gegewe vergelyking in die gradiënt–afsnit vorm en bepaal die waarde van m_2.

$$\begin{aligned} 3y + 2x - 6 &= 0 \\ 3y &= -2x + 6 \\ y &= -\frac{2}{3}x + 2 \\ \therefore m_2 &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ons weet dat die twee lyne loodreg is, dus $m_1 \times m_2 = -1$. Dus $m_1 = \frac{3}{2}$.

Stap 2: Skryf die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking neer

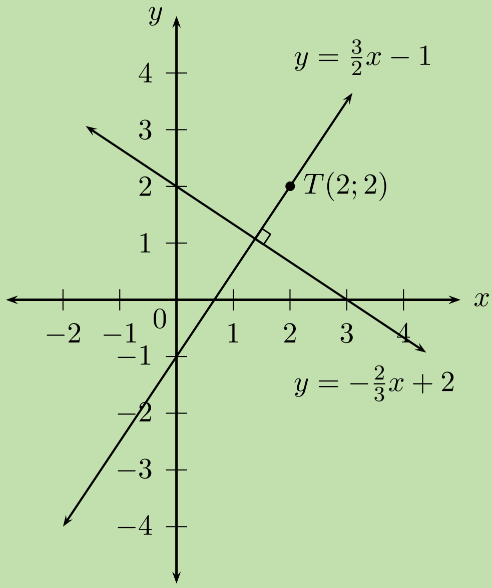
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vervang $m_1 = \frac{3}{2}$.

$$y - y_1 = \frac{3}{2}(x - x_1)$$

Vervang die gegewe punt $T(2; 2)$.

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{3}{2}(x - 2) \\ y - 2 &= \frac{3}{2}x - 3 \\ y &= \frac{3}{2}x - 1 \end{aligned}$$



'n Skets was nie nodig nie, maar is nuttig om die antwoord te kontroleer.

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van 'n reguitlyn is $y = \frac{3}{2}x - 1$.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Loodregte lyne

VRAAG

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(2; \frac{1}{3})$ gaan en loodreg is op die lyn met 'n inklinasiehoek van $71{,}57°$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die inklinasiehoek om die gradiënt te bepaal

Laat die gradiënt van die onbekende lyn m_1 wees en laat die gegewe gradiënt m_2 wees.

$$\begin{aligned} m_2 &= \tan \theta \\ &= \tan 71{,}57° \\ &= 3{,}0 \end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal die onbekende gradiënt

Ons weet die twee lyne is loodreg op mekaar,

$$\begin{aligned} m_1 \times m_2 &= -1 \\ \therefore m_1 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking neer

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Vervang die gradiënt $m_1 = -\frac{1}{3}$.

$$y - y_1 = -\frac{1}{3}(x - x_1)$$

Vervang die gegewe punt $(2; \frac{1}{3})$.

$$\begin{aligned} y - \left(\frac{1}{3}\right) &= -\frac{1}{3}(x - 2) \\ y - \frac{1}{3} &= -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \\ y &= -\frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord neer

Die vergelyking van 'n reguitlyn is $y = -\frac{1}{3}x + 1$.

Sien video: 25XJ op www.everythingmaths.co.za

Oefening 4 – 8: Loodregte lyne

1. Bepaal of die volgende twee lyne loodreg op mekaar is of nie.
   a) $y - 1 = 4x$ en $4y + x + 2 = 0$
   b) $10x = 5y - 1$ en $5y - x - 10 = 0$
   c) $x = y - 5$ en die lyn wat deur $(-1; \frac{5}{4})$ en $(3; -\frac{11}{4})$ gaan
   d) $y = 2$ en $x = 1$
   e) $\frac{y}{3} = x$ en $3y + x = 9$
   f) $1 - 2x = y$ en die lyn wat deur $(2; -1)$ en $(-1; 5)$ gaan
   g) $y = x + 2$ en $2y + 1 = 2x$
2. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; -4)$ gaan en loodreg op die lyn $y + 2x = 1$ is.
3. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(2; -7)$ gaan en loodreg op die lyn $5y - x = 0$ is.

4. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(3;-1)$ gaan en loodreg is op die lyn met 'n inklinasiehoek van $\theta = 135°$.

5. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2;\frac{2}{5})$ gaan en loodreg is op die lyn $y = \frac{4}{3}$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25XK 1b. 25XM 1c. 25XN 1d. 25XP 1e. 25XQ 1f. 25XR
1g. 25XS 2. 25XT 3. 25XV 4. 25XW 5. 25XX

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

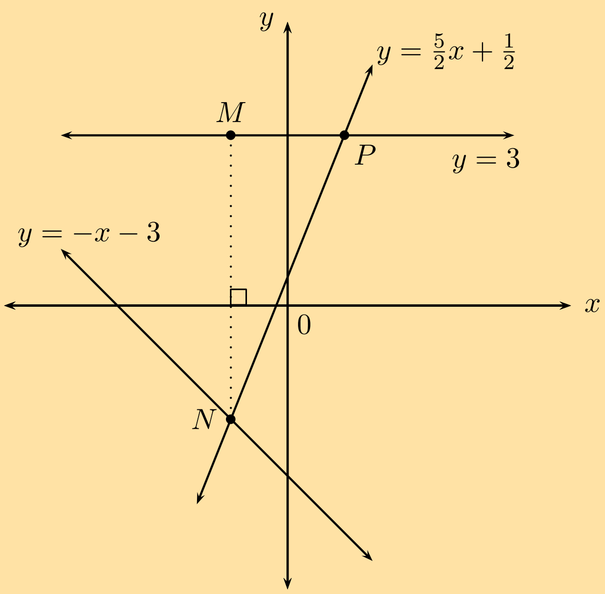
4.6 Opsomming EME3H

Sien aanbieding: 25XY op www.everythingmaths.co.za

- Afstand tussen twee punte: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- Gradiënt van 'n lyn tussen twee punte: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Middelpunt van 'n lyn: $M(x;y) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2};\dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$
- Ewewydige lyne: $m_1 = m_2$
- Loodregte lyne: $m_1 \times m_2 = -1$
- Algemene vorm van die reguitlynvergelyking: $ax + by + c = 0$
- Twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking: $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- Gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking (standaard vorm): $y = mx + c$
- Inklinasiehoek van 'n reguitlyn: θ, die hoek gevorm tussen die lyn en die positiewe x-as; $m = \tan\theta$

Oefening 4 – 9: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Bepaal die vergelyking van die lyn:
   a) deur die punte $(-1;3)$ en $(1;4)$
   b) deur die punte $(7;-3)$ en $(0;4)$
   c) ewewydig aan $y = \frac{1}{2}x + 3$ en wat deur $(-2;3)$ gaan
   d) loodreg op $y = -\frac{1}{2}x + 3$ en wat deur $(-1;2)$ gaan
   e) loodreg op $3y + x = 6$ en wat deur die oorsprong gaan
2. Bepaal die inklinasiehoeke van die volgende lyne:
   a) $y = 2x - 3$
   b) $y = \frac{1}{3}x - 7$
   c) $4y = 3x + 8$
   d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$
   e) $3y + x - 3 = 0$
3. $P(2;3)$, $Q(-4;0)$ en $R(5;-3)$ is die hoekpunte van $\triangle PQR$ in die Cartesiese vlak. PR sny die x-as by S. Bepaal die volgende:
   a) die vergelyking van die lyn PR
   b) die koördinate van punt S
   c) die inklinasiehoek van PR (korrek tot twee desimale plekke)
   d) die gradiënt van lyn PQ
   e) $Q\hat{P}R$
   f) die vergelyking van die lyn loodreg op PQ en wat deur die oorsprong gaan
   g) die middelpunt M van QR
   h) die vergelyking van die lyn ewewydig aan PR en wat deur punt M gaan
4. Punte $A(-3;5)$, $B(-7;-4)$ en $C(2;0)$ is gegee.
   a) Stip die punte op die Cartesiese vlak.
   b) Bepaal die koördinate van D as $ABCD$ 'n parallelogram is.
   c) Bewys dat $ABCD$ 'n rombus is.
5.



Beskou die skets hierbo, met die volgende lyne wat aangetoon word:

$y = -x - 3$

$y = 3$

$y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

a) Bepaal die koördinate van die punt N.
b) Bepaal die koördinate van die punt P.
c) Bepaal die vergelyking van die vertikale lynstuk MN.
d) Bepaal die lengte van die vertikale lyn MN.
e) Bepaal die grootte van $M\hat{N}P$.
f) Bepaal die vergelyking van die lyn ewewydig aan NP en wat deur die punt M gaan.

6. Die volgende punte is gegee: $A(-2;3)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$.

   a) Stip die punte op die Cartesiese vlak.
   b) Bewys dat $\triangle ABC$ 'n reghoekige gelykbenige driehoek is.
   c) Bepaal die vergelyking van lyn AB.
   d) Bepaal die koördinate van D as $ABCD$ 'n vierkant is.
   e) Bepaal die koördinate van E, die middelpunt van BC.

7. Gegewe punte $S(2;5)$, $T(-3;-4)$ en $V(4;-2)$.

   a) Bepaal die vergelyking van die lyn ST.
   b) Bepaal die grootte van $T\hat{S}V$.

8. Beskou die driehoek FGH met hoekpunte $F(-1;3)$, $G(2;1)$ en $H(4;4)$.

   a) Skets $\triangle FGH$ op die Cartesiese vlak.
   b) Wys dat $\triangle FGH$ 'n gelykbenige driehoek is.
   c) Bepaal die vergelyking van die lyn PQ, loodregte halveerlyn van FH.
   d) Lê G op die lyn PQ?
   e) Bepaal die vergelyking van die lyn ewewydig aan GH en wat deur punt F gaan.

9. Gegewe die punte $A(-1;5)$, $B(5;-3)$ en $C(0;-6)$. M is die middelpunt van AB en N is die middelpunt van AC.

   a) Teken 'n skets op die Cartesiese vlak.
   b) Toon aan dat die koördinate van M en N, onderskeidelik $(2;1)$ en $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ en is.
   c) Gebruik analitiese meetkundige metodes om die middelpuntstelling te bewys. (Bewys dat $NM \parallel CB$ en $NM = \frac{1}{2}CB$.)

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25XZ	1b. 25Y2	1c. 25Y3	1d. 25Y4	1e. 25Y5	2a. 25Y6
2b. 25Y7	2c. 25Y8	2d. 25Y9	2e. 25YB	3. 25YC	4. 25YD
5. 25YF	6. 25YG	7. 25YH	8. 25YJ	9. 25YK	

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 5

Funksies

'n Funksie beskryf 'n spesifieke verwantskap of verband tussen twee veranderlikes: waar 'n onafhanklike (invoer) veranderlike presies een afhanklike (uitvoer) veranderlike het. Elke element van die gebied beeld af op slegs een element in die terrein. Funksies kan een-tot-een of meer-tot-een verwantskappe wees. 'n Meer-tot-een verwantskap assosieer twee of meer waardes van die onafhanklike veranderlike met 'n enkele waarde van die afhanklike veranderlike. Funksies laat ons toe om verbande visueel voor te stel in die vorm van grafieke, wat baie makliker is om te lees en te interpreteer as lyste van getalle.

5.1 Kwadratiese funksies EME3J

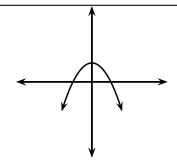
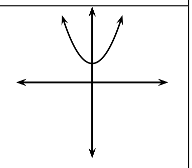
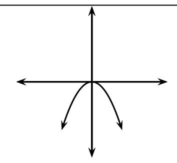
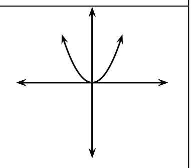
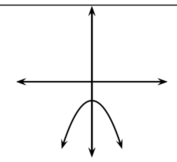
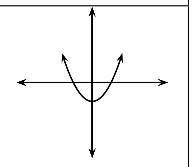
Hersiening EME3K

Funksies van die vorm $y = ax^2 + q$

Funksies van die algemene vorm $y = ax^2 + q$ word paraboliese funksies genoem, waar a en q konstantes is.

Die effek van a en q op $f(x) = ax^2 + q$:

- **Die effek van q: vertikale skuif**
  - Vir $q > 0$, word $f(x)$ vertikaal opwaarts geskuif met q eenhede.
    Die draaipunt van $f(x)$ is bokant die x-as.
  - Vir $q < 0$, is $f(x)$ vertikaal afwaarts geskuif met q eenhede.
    Die draaipunt van $f(x)$ is onder die x-as.
  - q is ook die y-afsnit van die parabool.

	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q = 0$		
$q < 0$		

- **Die effek van a: vorm**
  - Vir $a > 0$; die grafiek van $f(x)$ is 'n "glimlag" en het 'n minimum draaipunt $(0; q)$. Soos die waarde van a groter word, word die grafiek nouer.
    Soos a nader beweeg aan 0, word $f(x)$ wyer.
  - Vir $a < 0$; die grafiek van $f(x)$ is 'n "frons" en het 'n maksimum draaipunt $(0; q)$. Soos die waarde van a kleiner word, word die grafiek nouer.
    Soos a nader beweeg aan 0, word $f(x)$ wyer.

Oefening 5 – 1: Hersiening

1. Op aparte assestelsels, trek akkurate grafieke van die volgende funksies.

   - Gebruik tabelle indien nodig.
   - Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

   a) $y_1 = x^2$

   b) $y_2 = \frac{1}{2}x^2$

   c) $y_3 = -x^2 - 1$

   d) $y_4 = -2x^2 + 4$

2. Gebruik jou sketsgrafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi (die eerste kolom is reeds ingevul as 'n voorbeeld):

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$			
effek van q	$y_{\text{afsnit}} = 0$			
waarde van a	$a = 1$			
effek van a	standaard parabool			
draaipunt	$(0; 0)$			
simmetrie-as	$x = 0$ (y-as)			
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$			
terrein	$\{y : y \geq 0\}$			

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25YM 1b. 25YN 1c. 25YP 1d. 25YQ 2. 25YR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Sien video: 25YS op www.everythingmaths.co.za

Funksies van die vorm $y = a(x+p)^2 + q$ EME3M

Ons beskou nou paraboliese funksies van die vorm $y = a(x+p)^2 + q$ en die invloed van parameter p.

Ondersoek: Die effek van a, p en q op 'n paraboliese grafiek

1. Op dieselfde assestelsel, trek die volgende gafieke:

   a) $y_1 = x^2$
   b) $y_2 = (x-2)^2$
   c) $y_3 = (x-1)^2$
   d) $y_4 = (x+1)^2$
   e) $y_5 = (x+2)^2$

   Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x-afsnit(te)					
y-afsnit					
draaipunt					
simmetrie-as					
gebied					
terrein					
effek van p					

2. Op dieselfde assestelsel, trek die volgende gafieke:

   a) $y_1 = x^2 + 2$
   b) $y_2 = (x-2)^2 - 1$
   c) $y_3 = (x-1)^2 + 1$
   d) $y_4 = (x+1)^2 + 1$
   e) $y_5 = (x+2)^2 - 1$

   Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
x-afsnit(te)					
y-afsnit					
draaipunt					
simmetrie-as					
gebied					
terrein					
effek van q					

3. Oorweeg die volgende drie funksies en beantwoord die vrae wat volg:

   - $y_1 = (x-2)^2 + 1$
   - $y_2 = 2(x-2)^2 + 1$
   - $y_3 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$

   a) Wat is die waarde van a vir y_2?
   b) Het y_1 'n minimum of maksimum draaipunt?

c) Wat is die koördinate van die draaipunt van y_2?

d) Vergelyk die grafieke van y_1 en y_2. Bespreek die ooreenkomste en verskille.

e) Wat is die waarde van a vir y_3?

f) Sal die grafiek van y_3 nouer of wyer wees as die grafiek van y_1?

g) Bepaal die koördinate van die draaipunt van y_3.

h) Vergelyk die grafieke van y_1 en y_3. Beskryf enige verskille.

Sien video: 25YT op www.everythingmaths.co.za

Die effek van parameterveranderinge op $y = a(x + p)^2 + q$

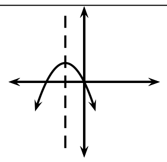
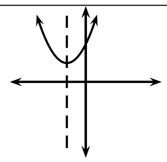
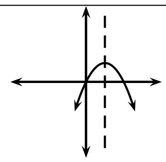
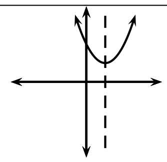
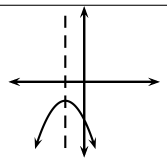
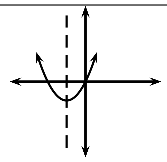
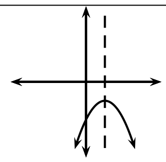
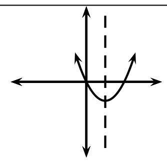
Die effek van p is 'n horisontale skuif omdat al die punte dieselfde afstand in dieselfde rigting beweeg (die hele grafiek skuif na die linkerkant of na die regterkant).

- Vir $p > 0$, word die grafiek p eenhede links geskuif.
- Vir $p < 0$, word die grafiek p eenhede regs geskuif.

Die waarde van p beïnvloed ook of die draaipunt aan die linkerkant van die y-as $(p > 0)$ of aan die regterkant van die y-as $(p < 0)$ is. Die as van simmetrie is die lyn $x = -p$.

Die effek van q is 'n vertikale skuif. Die waarde van q beïnvloed of die draaipunt bo die x-as $(q > 0)$ of onder die x-as $(q < 0)$ sal wees.

Die waarde van a beïnvloed die vorm van die grafiek. As $a < 0$, is die grafiek 'n "frons" en het 'n maksimum draaipunt. As $a > 0$ is die grafiek 'n "glimlag" en het 'n minimum draaipunt. Wanneer $a = 0$, is die grafiek 'n horisontale lyn $y = q$.

	$p > 0$		$p < 0$	
	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$				
$q < 0$				

Sien simulasie: 25YV op www.everythingmaths.co.za

Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(x) = y = a(x + p)^2 + q$:

Gebied en terrein

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ want daar is geen waarde van x waarvoor $f(x)$ ongedefiniëerd is nie.

Die terrein van $f(x)$ hang daarvan af of die waarde van a positief of negatief is. As $a > 0$ het ons:

$$\begin{aligned} (x+p)^2 &\geq 0 && \text{(volkome vierkant is altyd positief)} \\ \therefore a(x+p)^2 &\geq 0 && (a \text{ is positief}) \\ \therefore a(x+p)^2 + q &\geq q \\ \therefore f(x) &\geq q \end{aligned}$$

Die terrein is dus $\{y : y \geq q, y \in \mathbb{R}\}$ as $a > 0$. Soortgelyk, as $a < 0$, is die terrein $\{y : y \leq q, y \in \mathbb{R}\}$.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Gebied en terrein

VRAAG

Gee die gebied en terrein vir $g(x) = -2(x - 1)^2 + 3$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die gebied

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ want daar is geen waarde van x waarvoor $g(x)$ ongedefiniëerd is nie.

Stap 2: Bepaal die terrein

Die terrein van $g(x)$ kan bereken word van:

$$\begin{aligned} (x-1)^2 &\geq 0 \\ -2(x-1)^2 &\leq 0 \\ -2(x-1)^2 + 3 &\leq 3 \\ g(x) &\leq 3 \end{aligned}$$

Dus die terrein is $\{g(x) : g(x) \leq 3\}$ of in intervalnotasie $(-\infty; 3]$.

Let daarop in die voorbeeld hierbo dat dit nuttig is om die funksie te skryf in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

Ons gebruik die metode van **voltooi die vierkant** om 'n kwadratiese funksie te skryf in die algemene vorm van $y = ax^2 + bx + c$ te skryf in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ (sien Hoofstuk 2).

Oefening 5 – 2: Gebied en terrein

Gee die gebied en terrein vir elk van die volgende funksies:

1. $f(x) = (x - 4)^2 - 1$
2. $g(x) = -(x - 5)^2 + 4$
3. $h(x) = x^2 - 6x + 9$
4. $j(x) = -2(x + 1)^2$
5. $k(x) = -x^2 + 2x - 3$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25YW 2. 25YX 3. 25YY 4. 25YZ 5. 25Z2

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Afsnitte

Die y-afsnit:

Elke punt op die y-as het 'n x-koördinaat van 0, dus om die y-afsnit te bereken, stel ons $x = 0$.

Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = (x - 1)^2 + 5$ word verkry deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - 1)^2 + 5 \\ g(0) &= (0 - 1)^2 + 5 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 6)$.

Die x-afsnit:

Elke punt op die x-as het 'n y-koördinaat van 0, dus om die x-afsnit te bereken, laat ons $y = 0$.

Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = (x - 1)^2 + 5$ word verkry deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - 1)^2 + 5 \\ 0 &= (x - 1)^2 + 5 \\ -5 &= (x - 1)^2 \end{aligned}$$

wat geen reële oplossings het nie. Dus, die grafiek van $g(x)$ lê bo die x-as en het geen x-afsnitte nie.

Oefening 5 – 3: Afsnitte

Bepaal die x- en y-afsnitte vir elk van die volgende funksies:

1. $f(x) = (x+4)^2 - 1$
2. $g(x) = 16 - 8x + x^2$
3. $h(x) = -x^2 + 4x - 3$
4. $j(x) = 4(x-3)^2 - 1$
5. $k(x) = 4(x-3)^2 + 1$
6. $l(x) = 2x^2 - 3x - 4$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25Z3 2. 25Z4 3. 25Z5 4. 25Z6 5. 25Z7 6. 25Z8

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Draaipunt

Die draaipunt van die funksie $f(x) = a(x+p)^2 + q$ word bepaal deur die terrein van die funksie te ondersoek:

- As $a > 0$, het $f(x)$ 'n minimum draaipunt en die terrein is $[q; \infty)$.
  Die minimumwaarde van $f(x)$ is q.
  As $f(x) = q$, dan $a(x+p)^2 = 0$, en dus $x = -p$.
  Dit gee die draaipunt $(-p; q)$.
- As $a < 0$, het $f(x)$ 'n maksimum draaipunt en die terrein is $(-\infty; q]$.
  Die maksimumwaarde van $f(x)$ is q.
  As $f(x) = q$, dan $a(x+p)^2 = 0$, en dus $x = -p$.
  Dit gee die draaipunt $(-p; q)$.

Dus die draaipunt van die kwadratiese funksie $f(x) = a(x+p)^2 + q$ is $(-p; q)$.

Alternatiewe vorm van die kwadratiese vergelyking:

Ons kan die kwadratiese vergelyking ook skryf in die vorm

$$y = a(x-p)^2 + q$$

Die effek van p is steeds 'n horisontale skuif, maar let op dat:

- Vir $p > 0$, word die grafiek na die **regs** geskuif met p eenhede.
- Vir $p < 0$, word die grafiek na die **links** geskuif met p eenhede.

Die draaipunt is $(p; q)$ en die as van simmetrie is die lyn $x = p$.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Draaipunt

VRAAG

Bepaal die draaipunt van $g(x) = 3x^2 - 6x - 1$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die vergelyking in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$

Ons gebruik die metode van die voltooiing van die vierkant:

$$\begin{aligned} g(x) &= 3x^2 - 6x - 1 \\ &= 3(x^2 - 2x) - 1 \\ &= 3\left((x - 1)^2 - 1\right) - 1 \\ &= 3(x - 1)^2 - 3 - 1 \\ &= 3(x - 1)^2 - 4 \end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal die draaipunt $(-p; q)$

Van die vergelyking $g(x) = 3(x-1)^2 - 4$ weet ons die draaipunt van $g(x)$ is $(1; -4)$.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Draaipunt

VRAAG

1. Toon dat die x-waarde vir die draaipunt van $h(x) = ax^2 + bx + c$ gegee word deur $x = -\frac{b}{2a}$.
2. Bepaal vervolgens die draaipunt van $k(x) = 2 - 10x + 5x^2$.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die vergelyking in die vorm $y = a(x + p)^2 + q$ en wys dat $p = \frac{b}{2a}$

Ons gebruik die metode van die voltooiing van die vierkant:

$$\begin{aligned} h(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \end{aligned}$$

Neem die helfte van die koëffisiënt van die x term en kwadreer dit; tel dit dan by en trek dit af van die uitdrukking.

$$\begin{aligned} h(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

Van bostaande sien ons die draaipunt is by $x = -p = -\frac{b}{2a}$ en $y = q = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Stap 2: Bepaal die draaipunt van $k(x)$

Skryf die vergelyking in die algemene vorm $y = ax^2 + bx + c$.

$$k(x) = 5x^2 - 10x + 2$$

Dus $a = 5$; $b = -10$; $c = 2$.

Gebruik die resultate hierbo verkry om $x = -\frac{b}{2a}$ te bepaal:

$$\begin{aligned} x &= -\left(\frac{-10}{2(5)}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Substitueer $x = 1$ om die ooreenstemmende y-waarde te kry:

$$\begin{aligned} y &= 5x^2 - 10x + 2 \\ &= 5(1)^2 - 10(1) + 2 \\ &= 5 - 10 + 2 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Die draaipunt van $k(x)$ is $(1; -3)$.

Oefening 5 – 4: Draaipunte

Bepaal die draaipunt van elk van die volgende:

1. $y = x^2 - 6x + 8$
2. $y = -x^2 + 4x - 3$
3. $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 1$
4. $y = 2x^2 + 2x + 1$

5. $y = 18 + 6x - 3x^2$
6. $y = -2[(x + 1)^2 + 3]$

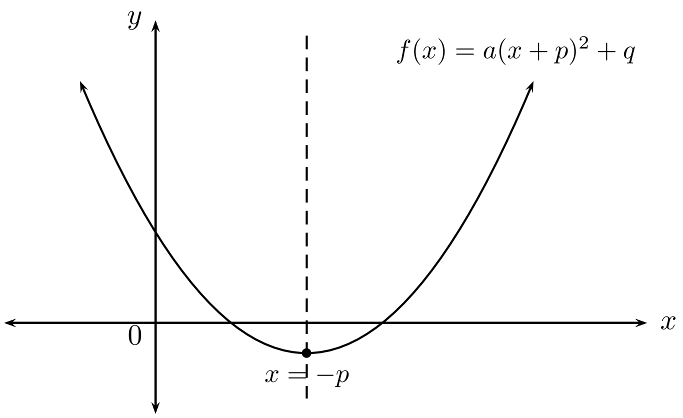
Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 25Z9 2. 25ZB 3. 25ZC 4. 25ZD 5. 25ZF 6. 25ZG

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

As van simmetrie

Die as van simmetrie vir $f(x) = a(x + p)^2 + q$ is die vertikale lyn $x = -p$. Die as van simmetrie gaan deur die draaipunt $(-p; q)$ en is ewewydig aan die y-as.



Oefening 5 – 5: As van simmetrie

1. Bepaal die as van simmetrie van elk van die volgende:
   a) $y = 2x^2 - 5x - 18$
   b) $y = 3(x - 2)^2 + 1$
   c) $y = 4x - x^2$
2. Skryf die vergelyking neer van 'n parabool waar die y-as die as van simmetrie is.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 25ZH 1b. 25ZJ 1c. 25ZK 2. 25ZM

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Skets die grafiek van die vorm $f(x) = a(x+p)^2 + q$

Ten einde die grafiek te skets van die vorm $f(x) = a(x+p)^2 + q$, moet ons vyf kenmerke bepaal:

- teken van a
- draaipunt
- y-afsnit
- x-afsnit(te) (as hulle bestaan)
- gebied en terrein

Sien video: 25ZN op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 4: Skets 'n parabool

VRAAG

Skets die grafiek van $y = -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$.

Merk die as-afsnitte, draaipunt en die as van simmetrie. Gee die gebied en terrein van die funksie.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vergelyking in die vorm $y = a(x+p)^2 + q$

Ons let op dat $a < 0$, dus is die grafiek 'n "frons" en het 'n maksimum draaipunt.

Stap 2: Bepaal die draaipunt $(-p; q)$

Van die vergelyking weet ons dat die draaipunt $(-1; -3)$ is.

Stap 3: Bepaal die as van simmetrie van $x = -p$

Van die vergelyking weet ons dat die as van simmetrie $x = -1$ is.

Stap 4: Bepaal die y-afsnit

Die y-afsnit word verkry deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\left((0)+1\right)^2 - 3 \\ &= -\frac{1}{2} - 3 \\ &= -3\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; -3\frac{1}{2})$.

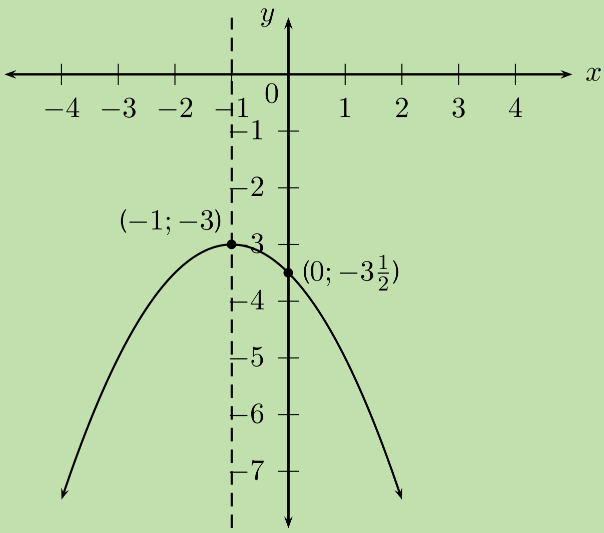
Stap 5: Bepaal die x-afsnitte

Die x-afsnitte word verkry deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 - 3 \\ 3 &= -\frac{1}{2}(x+1)^2 \\ -6 &= (x+1)^2 \end{aligned}$$

wat geen reële oplossings het nie. Dus, daar is geen x-afsnitte nie en die grafiek lê onder die x-as.

Stap 6: Stip die punte en teken die grafiek



Stap 7: Gee die gebied en die terrein

Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Terrein: $\{y : y \leq -3, y \in \mathbb{R}\}$

Sien video: 25ZP op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 5: Skets 'n parabool

VRAAG

Skets die grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2}$.

Bepaal die as-afsnitte, die draaipunt en die as van simmetrie. Gee die gebied en terrein van die funksie.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vergelyking in die vorm $y = ax^2 + bx + c$

Ons let op dat $a > 0$, dus is die grafiek 'n "glimlag" en het 'n minimum draaipunt.

Stap 2: Bepaal die draaipunt en die as van simmetrie

Kontroleer dat die vergelyking in die standaardvorm is en identifiseer die koëffisiënte.

$$a = \frac{1}{2}; \qquad b = -4; \qquad c = \frac{7}{2}$$

Bereken die x-waarde van die draaipunt

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\left(\frac{-4}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dus is die as van simmetrie $x = 4$.

Substitueer $x = 4$ in die oorspronlike vergelyking om die ooreenstemmende y-waarde te kry.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{2}(4)^2 - 4(4) + \frac{7}{2} \\ &= 8 - 16 + \frac{7}{2} \\ &= -4\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $\left(4; -4\frac{1}{2}\right)$.

Stap 3: Bepaal die y-afsnit

Die y-afsnit word verkry deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(0)^2 - 4(0) + \frac{7}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $\left(0; \frac{7}{2}\right)$.

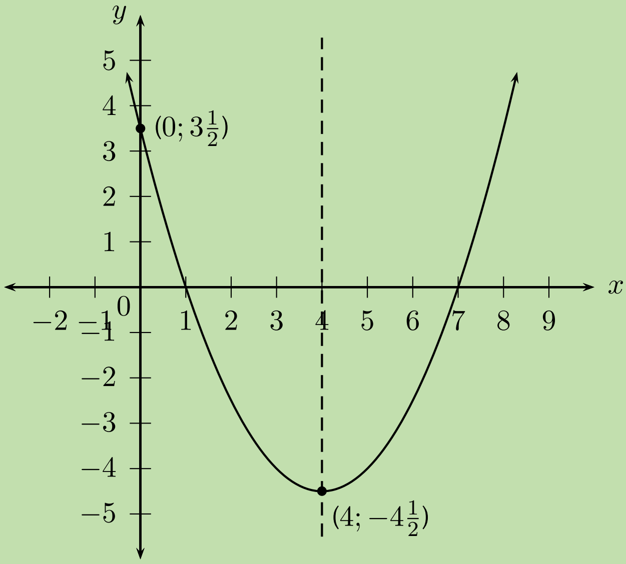
Stap 4: Bepaal die x-afsnitte

Die x-afsnitte word verkry deur te stel $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{7}{2} \\ &= x^2 - 8x + 7 \\ &= (x-1)(x-7) \end{aligned}$$

Dus $x = 1$ of $x = 7$. Dit gee die punte $(1; 0)$ en $(7; 0)$.

Stap 5: Stip die punte en teken die grafiek



Stap 6: Gee die gebied en die terrein

Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Terrein: $\{y : y \geq -4\frac{1}{2}, y \in \mathbb{R}\}$

Sien video: 25ZQ op www.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Skuif van 'n parabool

Carl en Eric doen hulle Wiskunde huiswerk en besluit om mekaar se antwoorde te kontroleer.

Huiswerkvraag:

As die parabool $y = 3x^2 + 1$, 2 eenhede na regs geskuif word, bepaal die vergelyking van die nuwe parabool.

- Carl se antwoord:

  'n Skuif na regs beteken om in die positiewe x rigting te beweeg, dus word x vervang met $x + 2$ en die nuwe vergelyking is $y = 3(x + 2)^2 + 1$.

- Eric se antwoord:

  Ons vervang x met $x - 2$, dus is die nuwe vergelyking $y = 3(x - 2)^2 + 1$.

Werk saam in pare. Bespreek die twee verskillende antwoorde en besluit watter een is korrek. Gebruik berekeninge en sketse om te help om jou redenasie te verduidelik.

Om die vergelyking te skryf van 'n parabool wat geskuif word

Die parabool word horisontaal geskuif:

- As die parabool m eenhede na regs geskuif word, word x vervang met $(x - m)$.
- As die parabool m eenhede na links geskuif word, word x vervang met $(x + m)$.

Die parabool word vertikaal geskuif:

- As die parabool n eenheid afgeskuif word, word y vervang met $(y + n)$.
- As die parabool n eenhede opskuif, word y vervang met $(y - n)$.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Skuif van 'n parabool

VRAAG

Gegee $y = x^2 - 2x - 3$.

1. As die parabool 1 eenheid na regs geskuif word, bepaal die nuwe vergelyking van die parabool.
2. As die parabool 3 eenhede afwaarts geskuif word, bepaal die nuwe vergelyking van die parabool.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die nuwe vergelyking van 'n parabool wat geskuif het

1. Die parabool word 1 eenhede na regs geskuif, dus x moet vervang word met $(x - 1)$.

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x - 3 \\ &= (x-1)^2 - 2(x-1) - 3 \\ &= x^2 - 2x + 1 - 2x + 2 - 3 \\ &= x^2 - 4x \end{aligned}$$

   Wees versigtig om nie 'n baie algemene fout te maak nie: naamlik om x te vervang met $x + 1$ vir 'n skuif na regs.

2. Die parabool word 3 eenhede afgeskuif, dus y moet vervang word met $(y + 3)$.

$$\begin{aligned} y + 3 &= x^2 - 2x - 3 \\ y &= x^2 - 2x - 3 - 3 \\ &= x^2 - 2x - 6 \end{aligned}$$

Oefening 5 – 6: Skets parabole

1. Skets grafieke van die volgende funksies. Bepaal:

   - as-afsnitte
   - draaipunt
   - asse van simmetrie
   - gebied en terrein

   a) $y = -x^2 + 4x + 5$
   b) $y = 2(x + 1)^2$
   c) $y = 3x^2 - 2(x + 2)$
   d) $y = 3(x - 2)^2 + 1$

2. Trek die volgende grafieke op dieselfde assestelsel:
   $f(x) = -x^2 + 7$
   $g(x) = -(x - 2)^2 + 7$
   $h(x) = (x - 2)^2 - 7$

3. Trek 'n skets van elk van die volgende grafieke:

   a) $y = ax^2 + bx + c$ as $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.
   b) $y = ax^2 + bx + c$ as $a < 0$, $b = 0$, $c > 0$.
   c) $y = ax^2 + bx + c$ as $a < 0$, $b < 0$, $b^2 - 4ac < 0$.
   d) $y = (x + p)^2 + q$ as $p < 0$, $q < 0$ en die x-afsnitte het verskillende tekens.
   e) $y = a(x + p)^2 + q$ as $a < 0$, $p < 0$, $q > 0$ en een wortel is nul.
   f) $y = a(x + p)^2 + q$ as $a > 0$, $p = 0$, $b^2 - 4ac > 0$.

4. Bepaal die nuwe vergelyking (in die vorm $y = ax^2 + bx + c$) as:

   a) $y = 2x^2 + 4x + 2$ met 3 eenhede links geskuif word.
   b) $y = -(x + 1)^2$ met 1 eenheid opgeskuif word.
   c) $y = 3(x - 1)^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ met 2 eenhede regs geskuif word.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

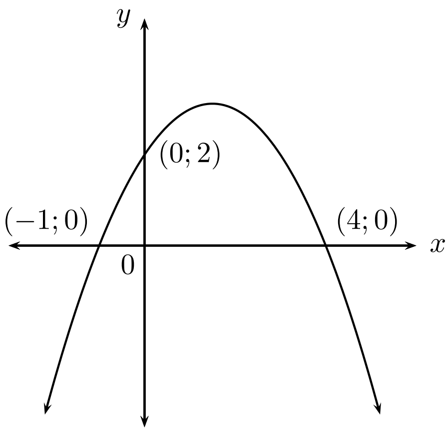
1a. 25ZR	1b. 25ZS	1c. 25ZT	1d. 25ZV	2. 25ZW	3a. 25ZX
3b. 25ZY	3c. 25ZZ	3d. 2622	3e. 2623	3f. 2624	4a. 2625
4b. 2626	4c. 2627				

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Die vind van die vergelyking van 'n parabool vanaf die grafiek

As die as-afsnitte gegee word, gebruik $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Voorbeeld:



x-afsnitte: $(-1; 0)$ en $(4; 0)$

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a(x + 1)(x - 4) \\ &= ax^2 - 3ax - 4a \end{aligned}$$

y-afsnit: $(0; 2)$

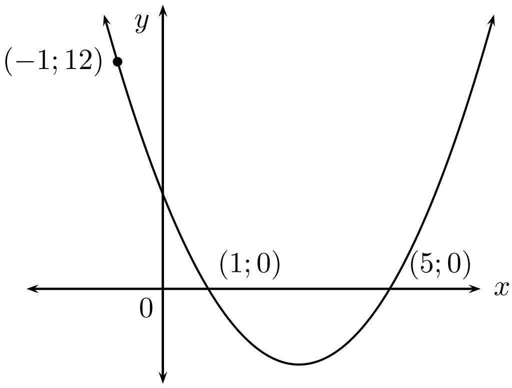
$$-4a = 2$$
$$a = -\frac{1}{2}$$

Vergelyking van die parabool:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 3ax - 4a \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)x - 4\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \end{aligned}$$

As die x-afsnitte en nog 'n punt gegee word, gebruik $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Voorbeeld:



x-afsnitte: $(1; 0)$ en $(5; 0)$

$$\begin{aligned} y &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a(x - 1)(x - 5) \\ &= ax^2 - 6ax + 5a \end{aligned}$$

Substitueer die punt: $(-1; 12)$

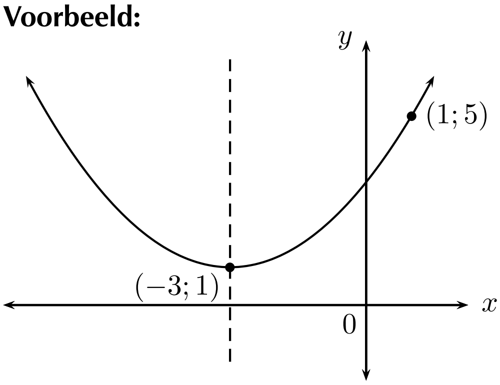
$$12 = a(-1)^2 - 6a(-1) + 5a$$
$$12 = a + 6a + 5a$$
$$12 = 12a$$
$$1 = a$$

Vergelyking van die parabool:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 - 6ax + 5a \\ &= x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

As die draaipunt en nog 'n punt gegee word, gebruik $y = a(x + p)^2 + q$.

Voorbeeld:



Draaipunt: $(-3; 1)$

$$\begin{aligned} y &= a(x + p)^2 + q \\ &= a(x + 3)^2 + 1 \\ &= ax^2 + 6ax + 9a + 1 \end{aligned}$$

Substitueer die punt: $(1; 5)$

$$5 = a(1)^2 + 6a(1) + 9a + 1$$
$$4 = 16a$$
$$\frac{1}{4} = a$$

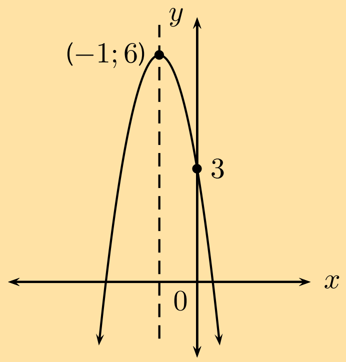
Vergelyking van die parabool:

$y = \frac{1}{4}(x + 3)^2 + 1$

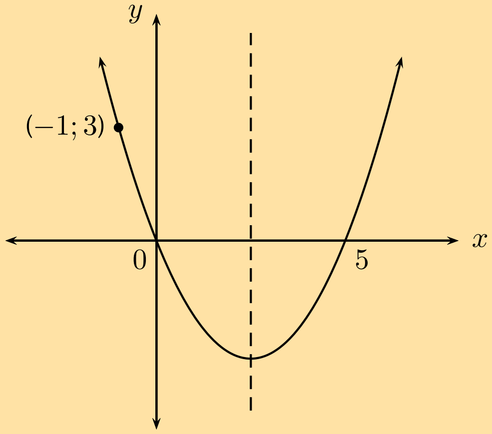
Oefening 5 – 7: Vind die vergelyking:

Bepaal die vergelykings van die volgende grafieke. Skryf jou antwoorde in die vorm $y = a(x+p)^2 + q$.

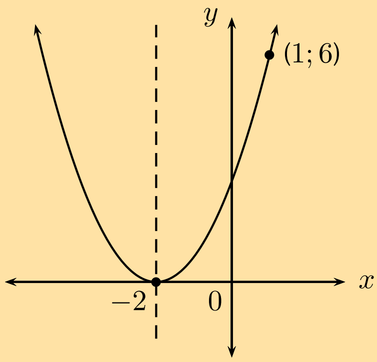
1.



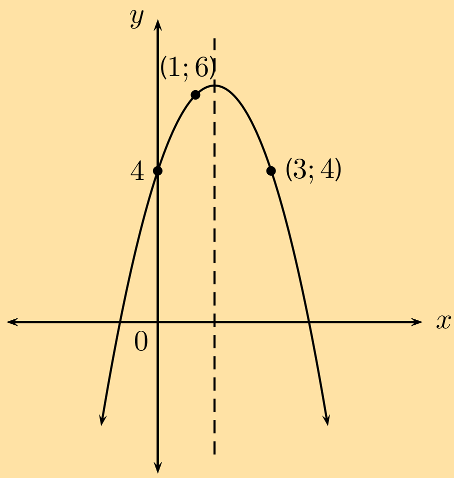
2.



3.



4.



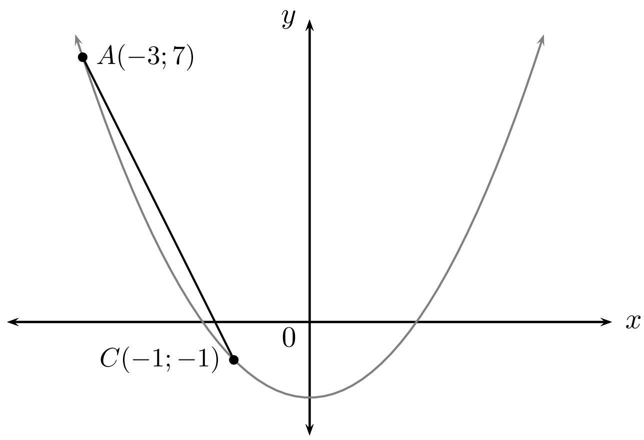
Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2628 2. 2629 3. 262B 4. 262C

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.2 Gemiddelde gradiënt EME3N

Ons let op dat die gradiënt van ’n kromme verander by elke punt op die kromme, daarom werk ons met gemiddelde gradiënt. Die gemiddelde gradiënt tussen enige twee punte op ’n kromme is die gradiënt van die reguitlyn deur die twee punte.



Vir die diagram hierbo, is die gradiënt van AC

$$\begin{aligned} \text{Gradiënt} &= \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} \\ &= \frac{7-(-1)}{-3-(-1)} \\ &= \frac{8}{-2} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Dit is die gemiddelde gradiënt van die kromme tussen die punte A en C.

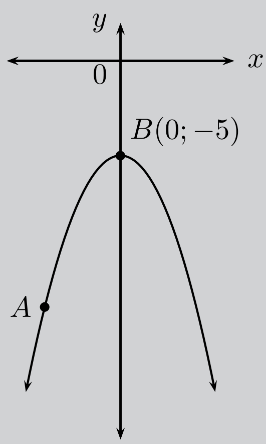
Wat gebeur met die gradiënt as ons die posisie van die een punt bevestig en die tweede punt met die kromme saam al nader beweeg na die vaste punt?

Sien video: 262D op www.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Gradiënt by ’n enkele punt op ’n kromme

Die kromme hieronder getoon word gedefiniëer deur $y = -2x^2 - 5$. Punt B is vas by $(0;-5)$ en die posisie van punt A wissel.

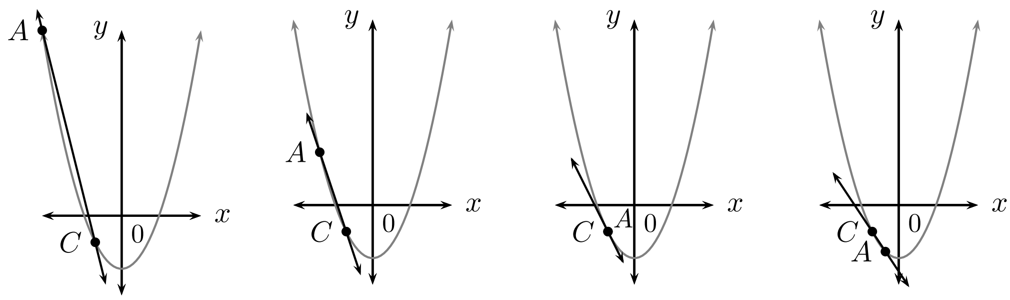
Voltooi die tabel hieronder deur die y-koördinate te bereken van punt A vir die gegewe x-koördinate en om dan die gemiddelde gradiënt tussen punte A en B te bereken.



x_A	y_A	Gemiddelde gradiënt
-2		
$-1{,}5$		
-1		
$-0{,}5$		
0		
$0{,}5$		
1		
$1{,}5$		
2		

1. Wat gebeur met die gemiddelde gradiënt soos A nader beweeg aan B?
2. Wat gebeur met die gemiddelde gradiënt soos A wegbeweeg van B?
3. Wat is die gemiddelde gradiënt wanneer A oorvleuel met B?

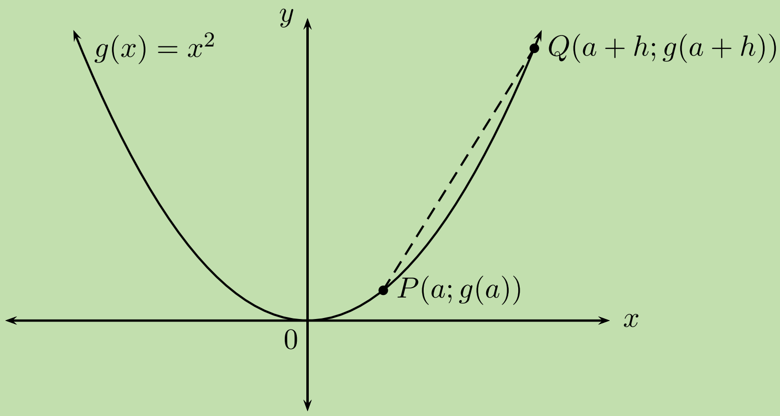
In die voorbeeld hierbo, verander die gradiënt van die reguitlyn deur die punte A en C soos A al nader beweeg aan C. By die punt waar A en C oorvleuel, gaan die reguitlyn deur slegs een punt op die kromme. Die lyn staan bekend as 'n raaklyn aan die kromme.



Ons voer vervolgens die idee in van die gradiënt by 'n enkele punt op 'n kromme. Die gradiënt by 'n punt op die kromme is die gradiënt van die raaklyn aan die kromme by 'n gegewe punt.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Gemiddelde gradiënt

VRAAG



1. Vind die gemiddelde gradiënt tussen twee punte $P\,(a; g(a))$ en $Q\,(a+h; g(a+h))$ op 'n kromme $g(x) = x^2$.
2. Bepaal die gemiddelde gradiënt tussen $P\,(2; g(2))$ en $Q\,(5; g(5))$.
3. Verduidelik wat gebeur met die gemiddelde gradiënt as Q nader beweeg aan P.

OPLOSSING

Stap 1: Benoem die x-waardes van die gegewe punte

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_2 &= a+h \end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal die ooreenstemmende y-koördinate

Deur gebruik te maak van die funksie $g(x) = x^2$, kan ons bepaal:

$$y_1 = g(a) = a^2$$

$$\begin{aligned} y_2 &= g(a+h) \\ &= (a+h)^2 \\ &= a^2 + 2ah + h^2 \end{aligned}$$

Stap 3: Bereken die gemiddelde gradiënt

$$\begin{aligned}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} &= \frac{\left(a^2 + 2ah + h^2\right) - \left(a^2\right)}{(a+h) - (a)} \\ &= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{a + h - a} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2a+h)}{h} \\ &= 2a + h\end{aligned}$$

Die gemiddelde gradiënt tussen $P\left(a; g(a)\right)$ en $Q\left(a+h; g(a+h)\right)$ op die kromme $g(x) = x^2$ is $2a + h$.

Stap 4: Bereken die gemiddelde gradiënt tussen $P\left(2; g(2)\right)$ en $Q\left(5; g(5)\right)$

Die x-koördinaat van P is a en die x-koördinaat van Q is $a + h$. Dus, as ons weet dat $a = 2$ en $a + h = 5$, dan $h = 3$.

Die gemiddelde gradiënt is dus $2a + h = 2\left(2\right) + \left(3\right) = 7$

Stap 5: Wanneer Q al nader beweeg aan P

Wanneer punt Q al nader beweeg aan punt P, word h al kleiner.

Wanneer die punt Q oorvleuel met die punt P, $h = 0$ en die gradiënt word gegee deur $2a$.

Ons kan die formule vir die gemiddelde gradiënt ook in 'n ander vorm skryf. Gegee 'n kromme $f(x)$ met twee punte P en Q met $P\left(a; f(a)\right)$ en $Q\left(a+h; f(a+h)\right)$. Die gemiddelde gradiënt tussen P en Q is:

$$\begin{aligned}\text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - (a)} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}\end{aligned}$$

Hierdie resultaat is belangrik vir die berekening van die gradiënt by 'n punt op die kromme en sal in groter besonderhede bestudeer word in Graad 12.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Gemiddelde gradiënt

VRAAG

Gegee $f(x) = -2x^2$.

1. Teken die skets van die funksie en bepaal die gemiddelde gradiënt tussen die punte A, waar $x = 1$, en B, waar $x = 3$.

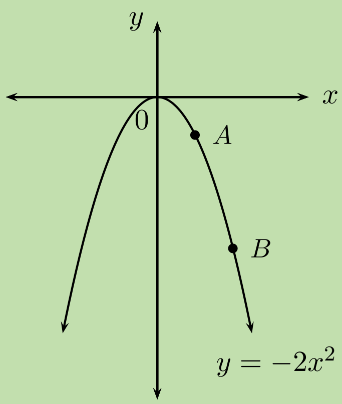
2. Bepaal die gradiënt van die kromme by die punt A.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vorm van die vergelyking

Van die vergelyking sien ons dat $a < 0$, dus is die grafiek 'n "frons" en het 'n maksimum draaipunt. Ons sien ook dat wanneer $x = 0$, $y = 0$, dus gaan die grafiek deur die oorsprong.

Stap 2: Teken 'n rowwe skets



Stap 3: Bereken die gemiddelde gradiënt tussen A en B

$$\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \\
&= \frac{-2(3)^2 - (-2(1)^2)}{2} \\
&= \frac{-18 + 2}{2} \\
&= \frac{-16}{2} \\
&= -8
\end{aligned}$$

Stap 4: Bereken die gemiddelde gradiënt vir $f(x)$

$$\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} \\
&= \frac{-2(a+h)^2-(-2a^2)}{h} \\
&= \frac{-2a^2-4ah-2h^2+2a^2}{h} \\
&= \frac{-4ah-2h^2}{h} \\
&= \frac{h(-4a-2h)}{h} \\
&= -4a-2h
\end{aligned}$$

By punt A, $h=0$ en $a=1$. Dus

$$\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt} &= -4a-2h \\
&= -4(1)-2(0) \\
&= -4
\end{aligned}$$

Oefening 5 – 8:

1. a) Bepaal die gemiddelde gradiënt van die kromme $f(x)=x(x+3)$ tussen $x=5$ en $x=3$.
   b) Sê vervolgens wat jy kan aflei oor die funksie f tussen $x=5$ en $x=3$.
2. $A(1;3)$ is 'n punt op $f(x)=3x^2$.
   a) Teken 'n skets van $f(x)$ en benoem punt A.
   b) Bepaal die gradiënt van die kromme by die punt A.
   c) Bepaal die vergelyking van die raaklyn by A.
3. Gegee: $g(x)=-x^2+1$.
   a) Teken 'n skets van $g(x)$.
   b) Bepaal die gemiddelde gradiënt van die kromme tussen $x=-2$ en $x=1$.
   c) Bepaal die gradiënt van g by $x=2$.
   d) Bepaal die gradiënt van g by $x=0$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 262F 2. 262G 3. 262H

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

5.3 Hiperboliese funksies EME3P

Hersiening EME3Q

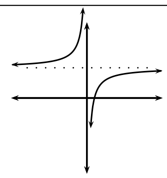
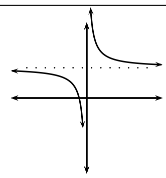
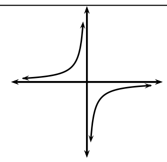
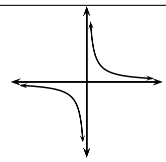
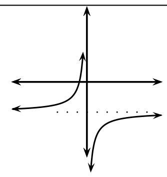
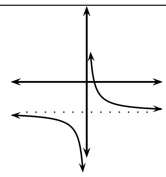
Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$

Funksies van die algemene vorm $y = \frac{a}{x} + q$ word hiperboliese funksies genoem, waar a en q konstantes is.

Die effek van a en q op $f(x) = \frac{a}{x} + q$:

- **Die effek van q: vertikale skuif**
  - Vir $q > 0$, word $f(x)$ vertikaal opwaarts geskuif met q eenhede.
  - Vir $q < 0$, word $f(x)$ vertikaal afwaarts geskuif met q eenhede.
  - Die horisontale asimptoot is die lyn $y = q$.
  - Die vertikale asimptoot is die y-as, die lyn $x = 0$.

- **Die effek van a: vorm en kwadrante**
  - Vir $a > 0$, lê $f(x)$ in die eerste en derde kwadrante.
  - Vir $a > 1$, sal $f(x)$ verder wees van beide asse af as vir $y = \frac{1}{x}$.
  - Vir $0 < a < 1$, soos a nader kom aan 0, beweeg $f(x)$ nader aan die asse as $y = \frac{1}{x}$.
  - Vir $a < 0$, lê $f(x)$ in die tweede en vierde kwadrante.
  - Vir $a < -1$, sal $f(x)$ verder wees van beide asse af as vir $y = -\frac{1}{x}$.
  - Vir $-1 < a < 0$, soos a nader kom aan 0, beweeg $f(x)$ nader aan die asse as $y = -\frac{1}{x}$.

	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q = 0$		
$q < 0$		

Oefening 5 – 9: Hersiening

1. Beskou die volgende hiperboliese funksies:
   - $y_1 = \frac{1}{x}$
   - $y_2 = -\frac{4}{x}$
   - $y_3 = \frac{4}{x} - 2$
   - $y_4 = -\frac{4}{x} + 1$

Voltooi die tabel om die eienskappe van die hiperboliese funksie op te som:

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$			
effek van q	geen vertikale skuif			
waarde van a	$a = 1$			
effek van a	lê in kwadrant I en III			
asimptote	y-as, $x = 0$ x-as, $y = 0$			
simmetrie-asse	$y = x$ $y = -x$			
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$			
terrein	$\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$			

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 262J

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Sien video: 262K op www.everythingmaths.co.za

Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$ EME3R

Ons beskou nou hiperboliese funksies van die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$ en die effek van parameters p.

Ondersoek: Die invloed van a, p en q op 'n hiperboliese grafiek

1. Op dieselfde assestelsel, trek die volgende gafieke:

   a) $y_1 = \frac{1}{x}$

   b) $y_2 = \frac{1}{x-2}$

   c) $y_3 = \frac{1}{x-1}$

   d) $y_4 = \frac{1}{x+1}$

   Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4
as-afsnit(te)				
asimptote				
simmetrie-asse				
gebied				
terrein				
effek van p				

2. Voltooi die volgende sinne vir funksies van die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$:

   a) 'n Verandering in p veroorsaak 'n ...... skuif.

   b) As die waarde van p toeneem, sal die grafiek en die vertikale asimptoot ......

   c) As die waarde van q verander, sal die ...... asimptoot van die hiperbool skuif.

   d) As die waarde van p afneem, sal die grafiek en die vertikale asimptoot ......

Die effek van parameterveranderinge op $y = \frac{a}{x+p} + q$

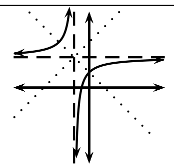
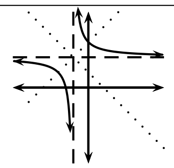
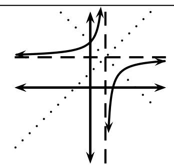
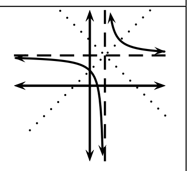
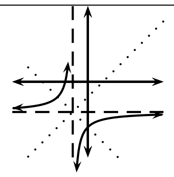
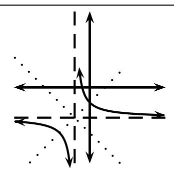
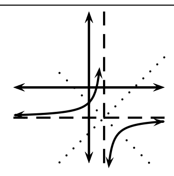
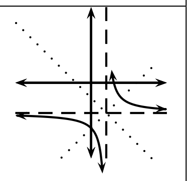
Die effek van p is 'n horisontale skuif omdat al die punte dieselfde afstand in dieselfde rigting beweeg (die hele grafiek skuif na die linkerkant of na die regterkant).

- Vir $p > 0$, word die grafiek p eenhede links geskuif.
- Vir $p < 0$, word die grafiek p eenhede regs geskuif.

Die waarde van p beïnvloed ook die vertikale asimptoot, naamlik die lyn $x = -p$.

Die invloed van q is 'n vertikale skuif. Die waarde van q beïnvloed ook die horisontale asimptoot, naamlik die lyn $y = q$.

Die waarde van a beïnvloed die vorm van die grafiek en die posisie in die Cartesiese vlak.

	$p > 0$		$p < 0$	
	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$				
$q < 0$				

Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(x) = y = \frac{a}{x+p} + q$:

Gebied en terrein

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -p\}$. As $x = -p$, is die noemer gelyk aan nul en die funksie is ongedefiniëer.

Ons sien dat

$$y = \frac{a}{x+p} + q$$

herskryf kan word as:

$$y - q = \frac{a}{x+p}$$

As $x \neq -p$ dan:

$$\begin{aligned}(y-q)(x+p) &= a \\ x+p &= \frac{a}{y-q}\end{aligned}$$

Die terrein is dus $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq q\}$

Hierdie beperkings op die gebied en die terrein bepaal die vertikale asimptoot $x = -p$ en die horisontale asimptoot $y = q$.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Gebied en terrein

VRAAG

Bepaal die gebied en terrein vir $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die gebied

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$ aangesien $g(x)$ ongedefiniëerd is vir $x = -1$.

Stap 2: Bepaal die terrein

Laat $g(x) = y$:

$$\begin{aligned}y &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ y - 2 &= \frac{2}{x+1} \\ (y-2)(x+1) &= 2 \\ x+1 &= \frac{2}{y-2}\end{aligned}$$

Dus is die terrein $\{g(x) : g(x) \in \mathbb{R}, g(x) \neq 2\}$.

Oefening 5 – 10: Gebied en terrein

Bepaal die gebied en terrein vir elk van die volgende funksies:

1. $y = \frac{1}{x} + 1$
2. $g(x) = \frac{8}{x-8} + 4$
3. $y = -\frac{4}{x+1} - 3$
4. $x = \frac{2}{3-y} + 5$
5. $(y-2)(x+2) = 3$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 262M 2. 262N 3. 262P 4. 262Q 5. 262R

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Afsnitte

Die y-afsnit:

Om die y-afsnit te bereken, stel ons $x = 0$. Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$ word bepaal deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ g(0) &= \frac{2}{0+1} + 2 \\ &= 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 4)$.

Die x-afsnit:

Om die x-afsnit te bereken, stel ons $y = 0$. Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = \frac{2}{x+1} + 2$ word bepaal deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ 0 &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ -2 &= \frac{2}{x+1} \\ -2(x+1) &= 2 \\ -2x - 2 &= 2 \\ -2x &= 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(-2; 0)$.

Oefening 5 – 11: Afsnitte

Bepaal die x- en y-afsnitte vir elk van die volgende funksies:

1. $f(x) = \frac{1}{x+4} - 2$
2. $g(x) = -\frac{5}{x} + 2$
3. $j(x) = \frac{2}{x-1} + 3$
4. $h(x) = \frac{3}{6-x} + 1$
5. $k(x) = \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 262S 2. 262T 3. 262V 4. 262W 5. 262X

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Asimptote

Daar is twee asimptote vir funksies van die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$. Die asimptote gee die waardes van x waarvoor die funksie nie bestaan nie. Met ander woorde, die waardes wat uitgesluit is uit die gebied en terrein. Die horisontale asimptoot is die lyn $y = q$ en die vertikale asimptoot is die lyn $x = -p$.

Oefening 5 – 12: Asimptote

Bepaal die asimptote vir elk van die volgende funksies:

1. $y = \frac{1}{x+4} - 2$
2. $y = -\frac{5}{x}$
3. $y = \frac{3}{2-x} + 1$
4. $y = \frac{1}{x} - 8$
5. $y = -\frac{2}{x-2}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 262Y 2. 262Z 3. 2632 4. 2633 5. 2634

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Asse van simmetrie

Daar is twee lyne ten opsigte waarvan die hiperbool simmetries is.

Vir die standaard hiperbool $y = \frac{1}{x}$, sien ons dat as ons $x \Rightarrow y$ en $y \Rightarrow x$ vervang, kry ons $y = \frac{1}{x}$. Soortgelyk, as ons $x \Rightarrow -y$ en $y \Rightarrow -x$ vervang, bly die funksie dieselfde. Dus die funksie is simmetries met betrekking tot die lyne $y = x$ en $y = -x$.

Vir die geskuifde hiperbool $y = \frac{a}{x+p} + q$, sny die asse van simmetrie by die punt $(-p; q)$.

Om die asse van simmetrie te bepaal, definiëer ons twee reguitlyne $y_1 = m_1x + c_1$ en $y_2 = m_2x + c_2$. Vir die standaard en geskuifde hiperboliese funksie, is die gradiënt van een van die lyne van simmetrie 1 en die gradiënt van die ander lyn van simmetrie is -1. Die asse van simmetrie is loodreg op mekaar en die produk van hulle gradiënte is gelyk aan -1. Dus ons stel $y_1 = x + c_1$ en $y_2 = -x + c_2$. Dan substitueer ons $(-p; q)$, die snypunt van die simmetrie-asse, in beide vergelykings in om die waardes van c_1 en c_2 te bereken.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Asse van simmetrie

VRAAG

Bepaal die asse van simmetrie vir $y = \frac{2}{x+1} - 2$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die snypunt van $(-p; q)$

Van die vergelyking sien ons dat $p = 1$ en $q = -2$. So, die asse an simmetrie sal sny by $(-1; -2)$.

Stap 2: Definiëer twee reguitlynvergelykings

$$\begin{aligned} y_1 &= x + c_1 \\ y_2 &= -x + c_2 \end{aligned}$$

Stap 3: Los op vir c_1 en c_2

Gebruik $(-1; -2)$ om op te los vir c_1:

$$\begin{aligned} y_1 &= x + c_1 \\ -2 &= -1 + c_1 \\ -1 &= c_1 \end{aligned}$$

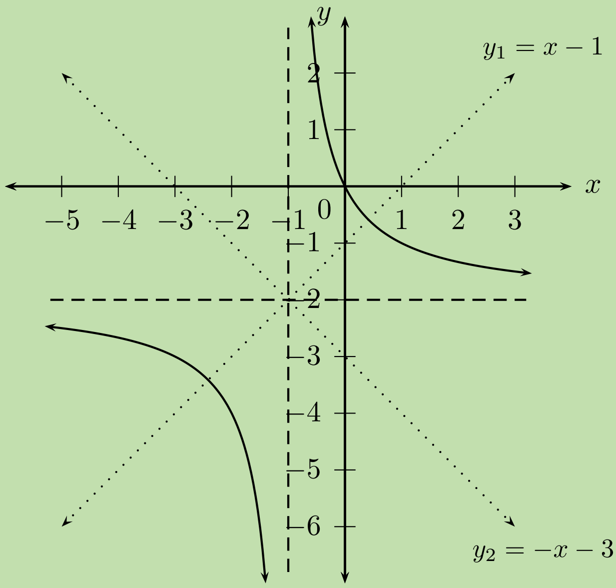
Gebruik $(-1; -2)$ om op te los vir c_2:

$$\begin{aligned} y_2 &= -x + c_2 \\ -2 &= -(-1) + c_2 \\ -3 &= c_2 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die asse van simmetrie vir $y = \frac{2}{x+1} - 2$ is die lyne

$$\begin{aligned} y_1 &= x - 1 \\ y_2 &= -x - 3 \end{aligned}$$



Oefening 5 – 13: Asse van simmetrie

1. Voltooi die volgende vir $f(x)$ en $g(x)$:

   - Skets die grafiek.
   - Bepaal $(-p; q)$.
   - Vind die asse van simmetrie.

   Vergelyk $f(x)$ en $g(x)$ asook hulle asse van simmetrie. Wat let jy op?

   a) $f(x) = \frac{2}{x}$
      $g(x) = \frac{2}{x} + 1$
   b) $f(x) = -\frac{3}{x}$
      $g(x) = -\frac{3}{x+1}$
   c) $f(x) = \frac{5}{x}$
      $g(x) = \frac{5}{x-1} - 1$

2. 'n Hiperbool van die vorm $k(x) = \frac{a}{x+p} + q$ gaan deur die punt $(4; 3)$. As die asse van simmetrie sny by $(-1; 2)$, bepaal die vergelyking van $k(x)$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2635 1b. 2636 1c. 2637 2. 2638

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Skets die grafiek van die vorm $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$

Ten einde die grafieke te skets van funksies van die vorm, $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$, moet ons vyf eienskappe bepaal:

- kwadrante
- asimptote
- y-afsnit
- x-afsnit
- gebied en terrein

Uitgewerkte voorbeeld 11: Skets 'n hiperbool

VRAAG

Skets die grafiek van $y = \frac{2}{x+1} + 2$. Bepaal die afsnitte, asimptote en asse van simmetrie. Gee die gebied en terrein van die funksie.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vergelyking in die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$

Ons let op $a > 0$, dus sal die grafiek in die eerste en derde kwadrante lê.

Stap 2: Bepaal die asimptote

Van die vergelyking weet ons dat $p = 1$ en $q = 2$.

Die horisontale asimptoot is dus die lyn $y = 2$ en die vertikale asimptoot is die lyn $x = -1$.

Stap 3: Bepaal die y-afsnit

Die y-afsnit word verkry deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{0+1} + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 4)$.

Stap 4: Bepaal die x-afsnit

Die x-afsnit word verkry deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{x+1} + 2 \\ -2 &= \frac{2}{x+1} \\ -2(x+1) &= 2 \\ -2x - 2 &= 2 \\ -2x &= 4 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(-2; 0)$.

Stap 5: Bepaal die asse van simmetrie

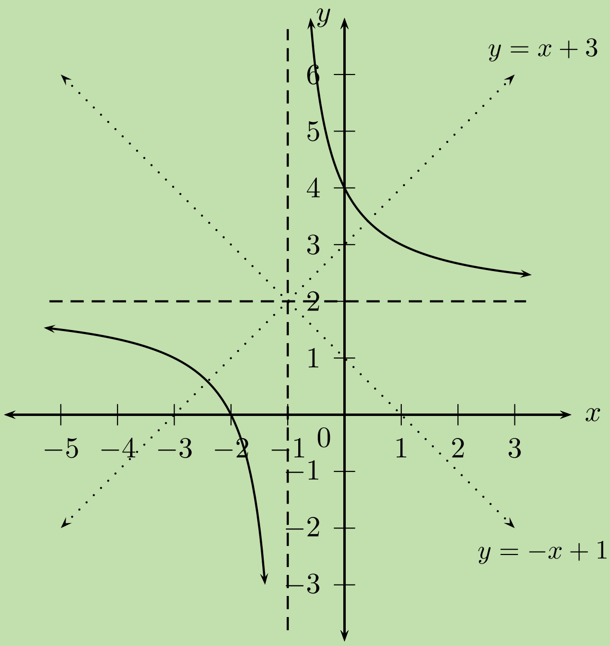
Gebruik $(-1; 2)$ om op te los vir c_1:

$$\begin{aligned} y_1 &= x + c_1 \\ 2 &= -1 + c_1 \\ 3 &= c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= -x + c_2 \\ 2 &= -(-1) + c_2 \\ 1 &= c_2 \end{aligned}$$

Dus die asse van simmetrie is $y = x + 3$ en $y = -x + 1$.

Stap 6: Stip die punte en teken die grafiek



Stap 7: Gee die gebied en die terrein

Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$

Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$

Uitgewerkte voorbeeld 12: Skets 'n hiperbool

VRAAG

Gebruik horisontale en vertikale skuiwe om die grafiek van $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ te skets.

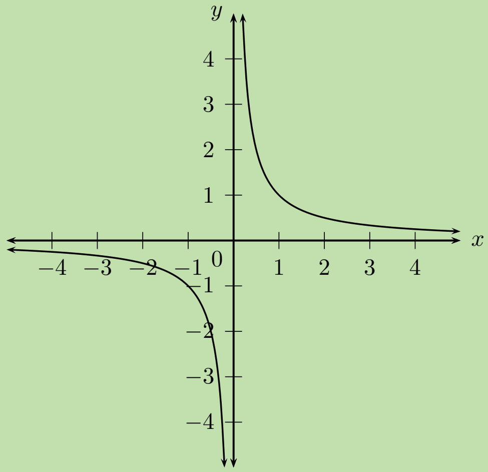
OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vergelyking in die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$

Ons let op $a > 0$, dus sal die grafiek in die eerste en derde kwadrante lê.

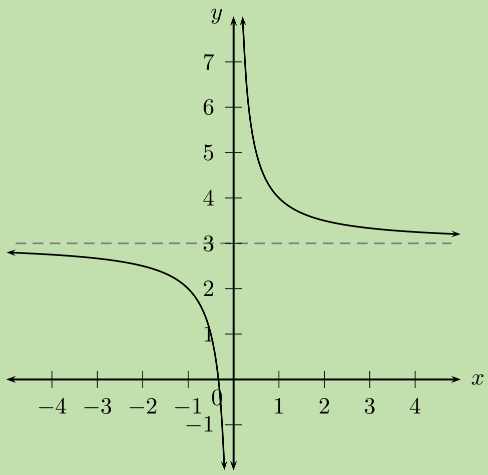
Stap 2: Skets die standaard hiperbool $y = \frac{1}{x}$

Begin met die skets van die standaard hiperbool $g(x) = \frac{1}{x}$. Die vertikale asimptoot is $x = 0$ en die horisontale asimptoot is $y = 0$.



Stap 3: Bepaal die vertikale skuif

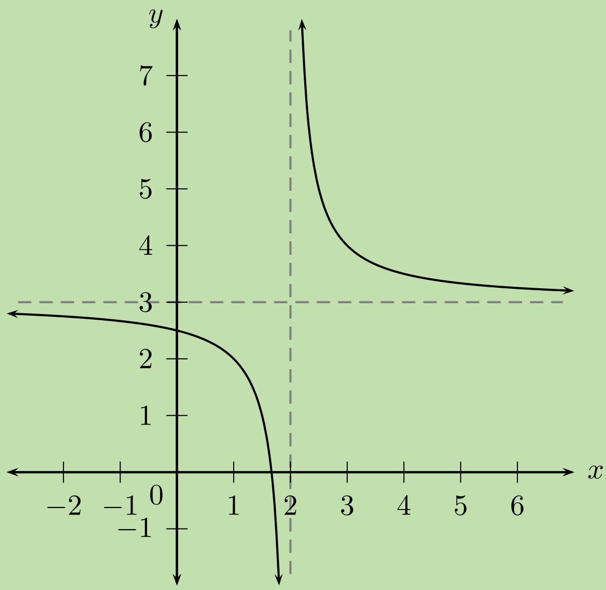
Van die vergelyking sien ons dat $q = 3$, wat beteken $g(x)$ moet 3 eenhede opgeskuif word. Die horisontale asimptoot skuif ook 3 eenhede op na $y = 3$.



Stap 4: Bepaal die horisontale skuif

Van die vergelyking sien ons dat $p = -2$, wat beteken $g(x)$ skuif 2 eenhede regs.

Die vertikale asimptoot skuif ook 2 eenhede regs.



Stap 5: Bepaal die y-afsnit

Die y-afsnit word verkry deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{0-2} + 3 \\ &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 2\frac{1}{2})$.

Stap 6: Bepaal die x-afsnit

Die x-afsnit word verkry deur $y = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{x-2} + 3 \\ -3 &= \frac{1}{x-2} \\ -3(x-2) &= 1 \\ -3x + 6 &= 1 \\ -3x &= -5 \\ x &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(\frac{5}{3}; 0)$.

Stap 7: Bepaal die gebied en terrein

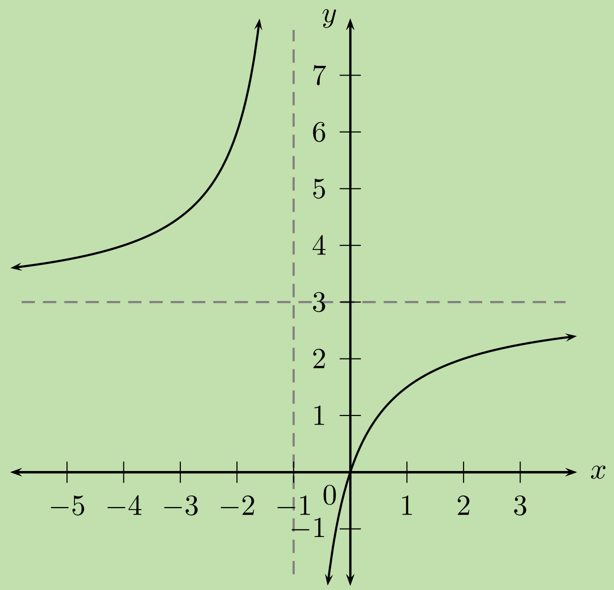
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$

Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 3\}$

Uitgewerkte voorbeeld 13: Vind die vergelyking van 'n hiperbool vanaf die grafiek

VRAAG

Gebruik die grafiek hieronder om die waardes van a, p en q te bepaal vir $y = \frac{a}{x+p} + q$.



OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die grafiek en lei af wat is die teken van a

Ons sien die grafiek lê in die tweede en vierde kwadrante, dus $a < 0$.

Stap 2: Bepaal die asimptote

Van die grafiek sien ons die vertikale asimptoot is $x = -1$, dus $p = 1$. Die horisontale asimptoot is $y = 3$, en dus $q = 3$.

$$y = \frac{a}{x+1} + 3$$

Stap 3: Bepaal die waarde van a

Om die waarde van a te bepaal, substitueer ons 'n punt op die grafiek, naamlik $(0; 0)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x+1} + 3 \\ 0 &= \frac{a}{0+1} + 3 \\ \therefore -3 &= a \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$$y = -\frac{3}{x+1} + 3$$

Oefening 5 – 14: Skets grafieke

1. Trek die grafieke van die volgende funksies en dui aan:
   - die asimptote
   - die as-afsnitte, waar van toepassing
   - die asse van simmetrie
   - die gebied en terrein

   a) $y = \frac{1}{x} + 2$

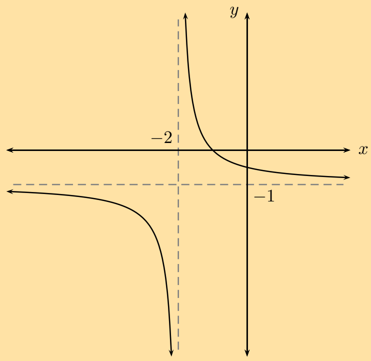
   b) $y = \frac{1}{x+4} - 2$

   c) $y = -\frac{1}{x+1} + 3$

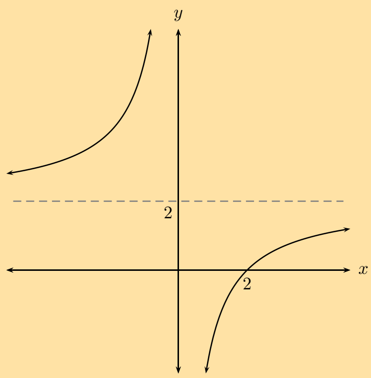
   d) $y = -\frac{5}{x-2\frac{1}{2}} - 2$

   e) $y = \frac{8}{x-8} + 4$

2. Gegee die grafiek van die hiperbool van die vorm $y = \frac{1}{x+p} + q$, bepaal die waardes van p en q.



3. Gegee 'n skets van die funksie van die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$, bepaal die waardes van a, p en q.



4. a) Teken die grafiek van $f(x) = -\frac{3}{x}$, $x > 0$.

   b) Bepaal die gemiddelde gradiënt van die grafiek tussen $x = 1$ en $x = 3$.

   c) Is die gradiënt by $(\frac{1}{2}; -6)$ minder of meer as die gemiddelde gradiënt tussen $x = 1$ en $x = 3$? Illustreer dit op jou grafiek.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2639 1b. 263B 1c. 263C 1d. 263D 1e. 263F 2. 263G
3. 263H 4. 263J

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Hersiening EME3T

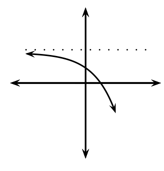
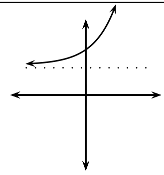
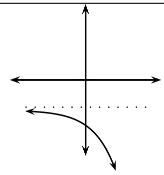
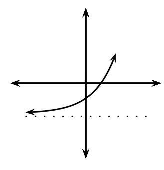
Funksies van die vorm $y = ab^x + q$

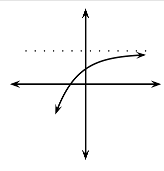
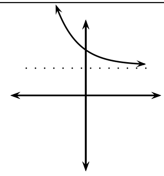
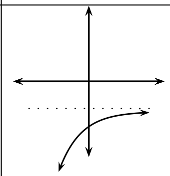
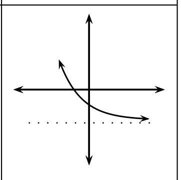
Funksies van die algemene vorm $y = ab^x + q$, vir $b > 0$, word eksponensiële funksies genoem, waar a, b en q konstantes is.

Die effek van a, b en q op $f(x) = ab^x + q$:

- **Die effek van q: vertikale skuif**
  - Vir $q > 0$, word $f(x)$ vertikaal opwaarts geskuif met q eenhede.
  - Vir $q < 0$, is $f(x)$ vertikaal afwaarts geskuif met q eenhede.
  - Die horisontale asimptoot is die lyn $y = q$.
- **Die effek van a: vorm**
  - Vir $a > 0$, neem $f(x)$ toe.
  - Vir $a < 0$, neem $f(x)$ af. Die grafiek word gereflekteer rondom die horisontale asimptoot.
- **Die effek van b:**

  Neem aan $a > 0$:
  - As $b > 1$, is $f(x)$ 'n toenemende funksie.
  - As $0 < b < 1$, $f(x)$ is 'n afnemende funksie.
  - As $b \leq 0$, $f(x)$ is nie gedefiniëer nie.

$b > 1$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q < 0$		

$0 < b < 1$	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q < 0$		

Oefening 5 – 15: Hersiening

1. Op aparte assestelsels, trek akkurate grafieke van elk van die volgende funksies:
   - Gebruik tabelle indien nodig.
   - Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

   a) $y_1 = 3^x$

   b) $y_2 = -2 \times 3^x$

   c) $y_3 = 2 \times 3^x + 1$

   d) $y_4 = 3^x - 2$

2. Gebruik jou sketsgrafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi (die eerste kolom is reeds ingevul as 'n voorbeeld):

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$			
effek van q	geen vertikale skuif			
waarde van a	$a = 1$			
effek van a	toenemend			
asimptoot	x-as, $y = 0$			
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$			
terrein	$\{y : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$			

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 263K 1b. 263M 1c. 263N 1d. 263P 2. 263Q

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Funksies van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$ EME3V

Ons ondersoek nou eksponensiële funksies van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$ en die effek van parameter p.

Sien video: 263R op www.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Die effek van a, p en q op 'n eksponensiële grafiek

1. Op dieselfde assestelsel, trek die volgende gafieke:

   a) $y_1 = 2^x$

   b) $y_2 = 2^{(x-2)}$

   c) $y_3 = 2^{(x-1)}$

   d) $y_4 = 2^{(x+1)}$

   e) $y_5 = 2^{(x+2)}$

   Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
as-afsnit(te)					
asimptoot					
gebied					
terrein					
effek van p					

2. Op dieselfde assestelsel, trek die volgende gafieke:

   a) $y_1 = 2^{(x-1)} + 2$

   b) $y_2 = 3 \times 2^{(x-1)} + 2$

   c) $y_3 = \frac{1}{2} \times 2^{(x-1)} + 2$

   d) $y_4 = 0 \times 2^{(x-1)} + 2$

   e) $y_5 = -3 \times 2^{(x-1)} + 2$

   Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
as-afsnit(te)					
asimptote					
gebied					
terrein					
effek van a					

Die effek van parameterveranderinge op $y = ab^{x+p} + q$

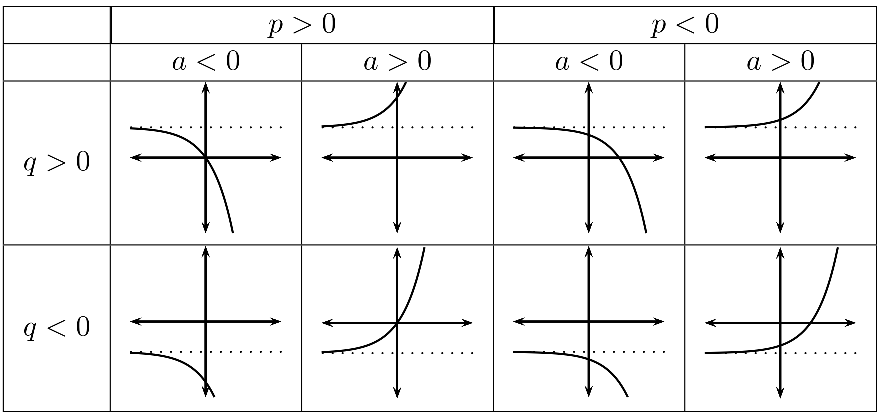
Die effek van p is 'n horisontale skuif omdat al die punte dieselfde afstand in dieselfde rigting beweeg (die hele grafiek skuif na die linkerkant of na die regterkant).

- Vir $p > 0$, word die grafiek p eenhede links geskuif.
- Vir $p < 0$, word die grafiek p eenhede regs geskuif.

Die invloed van q is 'n vertikale skuif. Die waarde van q beïnvloed ook die horisontale asimptoot, naamlik die lyn $y = q$.

Die waarde van a beïnvloed die vorm van die grafiek en sy posisie relatief tot die horisontale asimptoot.

- Vir $a > 0$, lê die grafiek bokant die horisontale asimptoot, $y = q$.
- Vir $a < 0$, lê die grafiek onder die horisontale asimptoot, $y = q$.



Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(x) = y = ab^{(x+p)} + q$:

Gebied en terrein

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ want daar is geen waarde van x waarvoor $f(x)$ ongedefiniëerd is nie.

Die terrein van $f(x)$ is afhanklik daarvan of die waarde van a positief of negatief is.

As $a > 0$ het ons:

$$\begin{aligned} b^{(x+p)} &> 0 \\ ab^{(x+p)} &> 0 \\ ab^{(x+p)} + q &> q \\ f(x) &> q \end{aligned}$$

Die terrein is dus $\{y : y > q, y \in \mathbb{R}\}$

Soortgelyk, as $a < 0$, is die terrein $\{y : y < q, y \in \mathbb{R}\}$.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Gebied en terrein

VRAAG

Gee die gebied en terrein vir $g(x) = 5 \times 3^{(x+1)} - 1$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die gebied

Die gebied is $\{x : x \in \mathbb{R}\}$ want daar is geen waarde van x waarvoor $g(x)$ ongedefiniëerd is nie.

Stap 2: Bepaal die terrein

Die terrein van $g(x)$ kan bereken word van:

$$\begin{aligned} 3^{(x+1)} &> 0 \\ 5 \times 3^{(x+1)} &> 0 \\ 5 \times 3^{(x+1)} - 1 &> -1 \\ \therefore g(x) &> -1 \end{aligned}$$

Dus die terrein is $\{g(x) : g(x) > -1\}$ of in intervalnotasie $(-1; \infty)$.

Oefening 5 – 16: Gebied en terrein

Gee die gebied en terrein vir elk van die volgende funksies:

1. $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)}$
2. $f(x) = -5^{(x-2)} + 1$
3. $y + 3 = 2^{(x+1)}$
4. $y = n + 3^{(x-m)}$
5. $\frac{y}{2} = 3^{(x-1)} - 1$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 263S 2. 263T 3. 263V 4. 263W 5. 263X

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Afsnitte

Die y-afsnit:

Om die y-afsnit te bereken, stel ons $x = 0$. Byvoorbeeld, die y-afsnit van $g(x) = 3 \times 2^{(x+1)} + 2$ word bepaal deur te stel $x = 0$:

$$\begin{aligned} g(0) &= 3 \times 2^{(0+1)} + 2 \\ &= 3 \times 2 + 2 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 8)$.

Die x-afsnit:

Om die x-afsnit te bereken, stel ons $y = 0$. Byvoorbeeld, die x-afsnit van $g(x) = 3 \times 2^{(x+1)} + 2$ word bepaal deur te stel $y = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= 3 \times 2^{(x+1)} + 2 \\ -2 &= 3 \times 2^{(x+1)} \\ -\frac{2}{3} &= 2^{(x+1)} \end{aligned}$$

wat geen reële oplossings het nie. Dus, die grafiek van $g(x)$ lê bo die x-as en het geen x-afsnitte nie.

Oefening 5 – 17: Afsnitte

Bepaal die x- en y-afsnitte vir elk van die volgende funksies:

1. $f(x) = 2^{(x+1)} - 8$
2. $y = 2 \times 3^{(x-1)} - 18$
3. $y + 5^{(x+2)} = 5$
4. $y = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)} - 0{,}75$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 263Y 2. 263Z 3. 2642 4. 2643

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Asimptoot

Eksponensiële funksies van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$ het 'n horisontale asimptoot, naamlik die lyn $y = q$.

Uitgewerkte voorbeeld 15: Asimptoot

VRAAG

Bepaal die asimptoot vir $y = 5 \times 3^{(x+1)} - 1$.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die asimptoot

Die asimptoot van $g(x)$ kan bereken word as:

$$\begin{aligned} 3^{(x+1)} &\neq 0 \\ 5 \times 3^{(x+1)} &\neq 0 \\ 5 \times 3^{(x+1)} - 1 &\neq -1 \\ \therefore y &\neq -1 \end{aligned}$$

Die asimptoot van die lyn is dus $y = -1$.

Oefening 5 – 18: Asimptoot

Gee die asimptoot vir elk van die volgende funksies:

1. $y = -5^{(x+1)}$
2. $y = 3^{(x-2)} + 1$
3. $\left(\frac{3y}{2}\right) = 5^{(x+3)} - 1$
4. $y = 7^{(x+1)} - 2$
5. $\frac{y}{2} + 1 = 3^{(x+2)}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2644 2. 2645 3. 2646 4. 2647 5. 2648

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Skets die grafiek van die vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$

Ten einde die grafiek van funksies van hierdie vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$ te skets, moet ons vyf karakteristieke eienskappe bepaal:

- vorm
- y-afsnit
- x-afsnit
- asimptoot
- gebied en terrein

Uitgewerkte voorbeeld 16: Skets 'n eksponensiële grafiek

VRAAG

Skets die grafiek van $2y = 10 \times 2^{(x+1)} - 5$.

Merk die as-afsnit(te) en asimptote. Gee die gebied en terrein van die funksie.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vergelyking in die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$

Ons sien dat $a > 0$ en $b > 1$, dus die funksie is toenemend.

Stap 2: Bepaal die y-afsnit

Die y-afsnit word verkry deur $x = 0$ te stel:

$$\begin{aligned} 2y &= 10 \times 2^{(0+1)} - 5 \\ &= 10 \times 2 - 5 \\ &= 15 \\ \therefore y &= 7\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 7\frac{1}{2})$.

Stap 3: Bepaal die x-afsnit

Die x-afsnit word verkry deur $y = 0$ te stel:

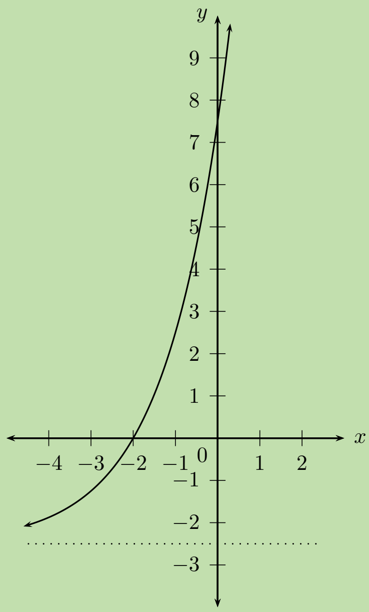
$$\begin{aligned} 0 &= 10 \times 2^{(x+1)} - 5 \\ 5 &= 10 \times 2^{(x+1)} \\ \frac{1}{2} &= 2^{(x+1)} \\ 2^{-1} &= 2^{(x+1)} \\ \therefore -1 &= x + 1 \quad \text{(dieselfde grondtal)} \\ -2 &= x \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(-2; 0)$.

Stap 4: Bepaal die asimptoot

Die horisontale asimptoot is die lyn $y = -\frac{5}{2}$.

Stap 5: Stip die punte en teken die grafiek



Stap 6: Gee die gebied en die terrein

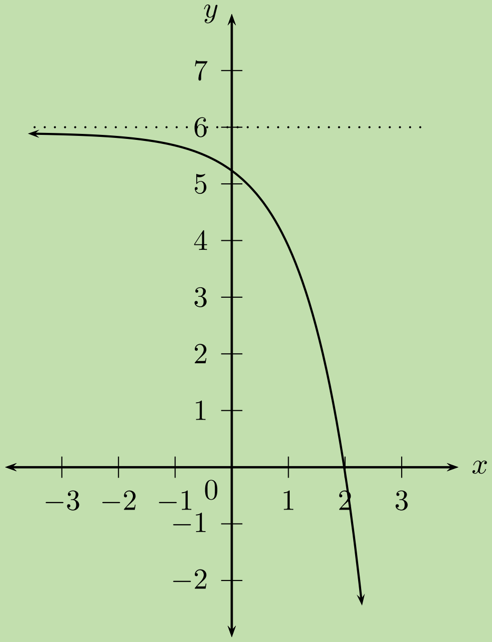
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Terrein: $\{y : y > -\frac{5}{2}, y \in \mathbb{R}\}$

Uitgewerkte voorbeeld 17: Vind die vergelyking van ’n eksponensiële funksie vanaf die grafiek

VRAAG

Gebruik die gegewe grafiek van $y = -2 \times 3^{(x+p)} + q$ om die waardes van p en q te vind.



OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vergelyking in die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$

Vanaf die grafiek sien ons die funksie is afnemend. Ons sien dat $a = -2$ en $b = 3$. Ons moet vir p en q oplos.

Stap 2: Gebruik die asimptote om q te bepaal

Die horisontale asimptoot $y = 6$ word gegee, dus weet ons dat $q = 6$.

$$y = -2 \times 3^{(x+p)} + 6$$

Stap 3: Gebruik die x-afsnit om p te bepaal

Substitueer $(2; 0)$ in die vergelyking en los op vir p:

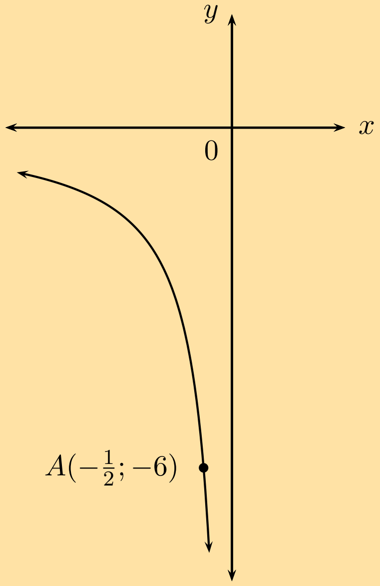
$$\begin{aligned} y &= -2 \times 3^{(x+p)} + 6 \\ 0 &= -2 \times 3^{(2+p)} + 6 \\ -6 &= -2 \times 3^{(2+p)} \\ 3 &= 3^{(2+p)} \\ \therefore 1 &= 2 + p \quad \text{(dieselfde grondtal)} \\ \therefore p &= -1 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$$y = -2 \times 3^{(x-1)} + 6$$

Oefening 5 – 19: Gemengde oefeninge

1. Gegee die grafiek van die hiperbool van die vorm $h(x) = \frac{k}{x}$, $x < 0$, wat gaan deur die punt $A(-\frac{1}{2}; -6)$.



a) Wys dat $k = 3$.

b) Skryf die vergelyking neer van die nuwe funksie wat gevorm word as $h(x)$:

i. 3 eenhede vertikaal opwaarts skuif

ii. 3 eenhede regs skuif

iii. reflekteer rondom die y-as

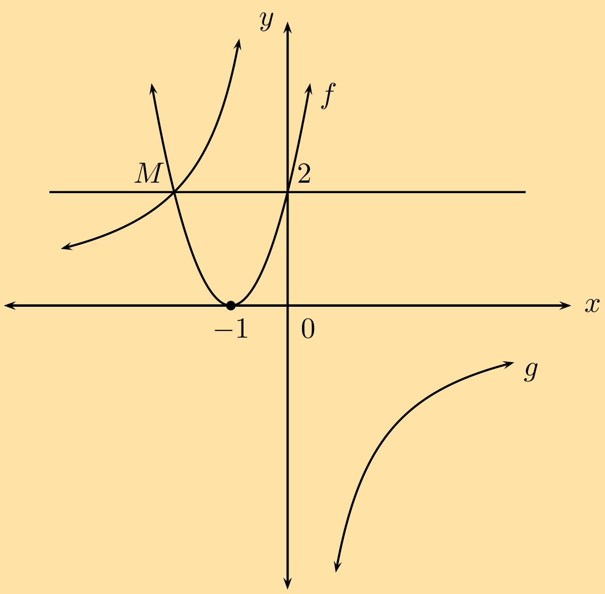
iv. so skuif dat die asimptote $x = 0$ en $y = -\frac{1}{4}$ sal wees

v. opwaarts skuif om deur die punt $(-1; 1)$ te gaan

vi. 2 eenhede links en 1 eenheid vertikaal afwaarts skuif (vir $x < 0$)

2. Gegee die grafieke van $f(x) = a(x + p)^2$ en $g(x) = \frac{a}{x}$.

Die as van simmetrie vir $f(x)$ is $x = -1$ en $f(x)$ en $g(x)$ sny by punt M. Die lyn $y = 2$ gaan ook deur M.



Bepaal:

a) die koördinate van M

b) die vergelyking van $g(x)$

c) die vergelyking van $f(x)$

d) die waardes waarvoor $f(x) < g(x)$

e) die terrein van $f(x)$

3. Op dieselfde assestelsel, skets:

a) die grafieke van $k(x) = 2(x + \frac{1}{2})^2 - 4\frac{1}{2}$ en $h(x) = 2^{(x+\frac{1}{2})}$. Bepaal alle as-afsnitte, draaipunt(e) en asimptote.

b) die refleksie van $h(x)$ rondom die x-as. Benoem hierdie funksie as $j(x)$.

4. Skets die grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ vir:

a) $a < 0$, $b > 0$, $b^2 < 4ac$

b) $a > 0$, $b > 0$, een wortel $= 0$

5. Op verskillende stelle asse, teken die grafieke vir:

$y = \frac{2}{x-2}$

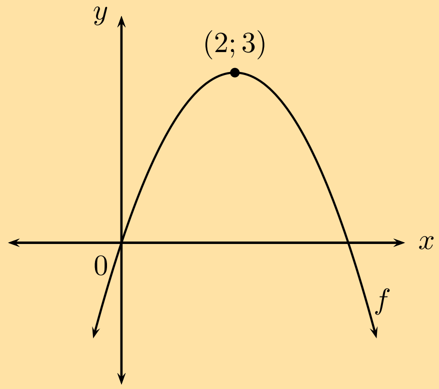
$y = \frac{2}{x} - 2$

$y = -2^{(x-2)}$

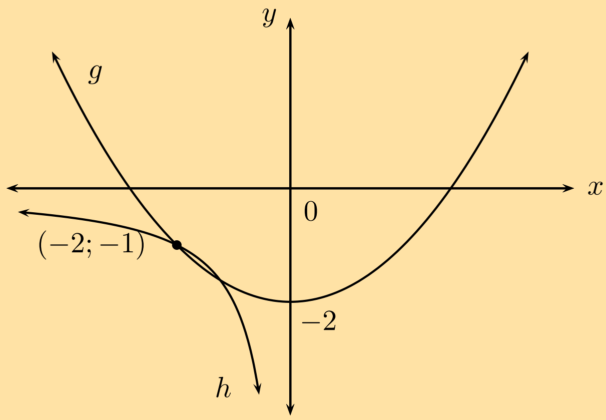
6. Vir die diagramme hieronder, bepaal:

- die vergelykings van die funksies; $f(x) = a(x + p)^2 + q$, $g(x) = ax^2 + q$, $h(x) = \frac{a}{x}, x < 0$ en $k(x) = b^x + q$
- die simmetrie-asse van elke funksie
- die definisiegebied en terrein van elke funksie

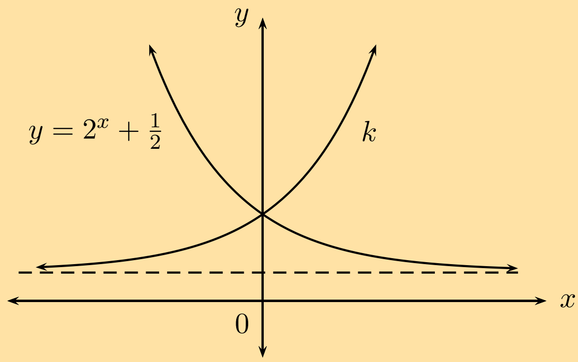
a)



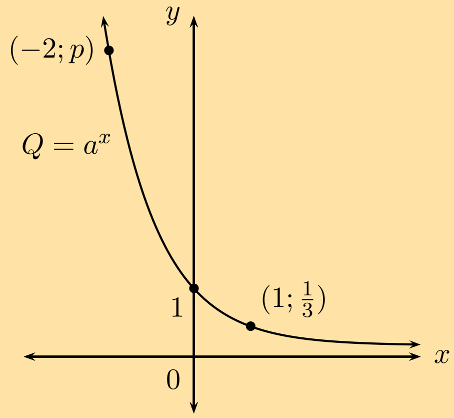
b)



c)



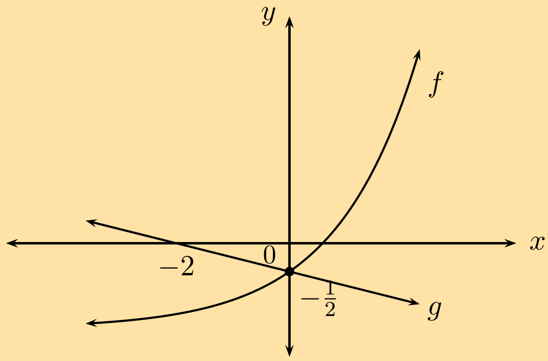
7. Gegewe die grafiek van die funksie $Q(x) = a^x$.



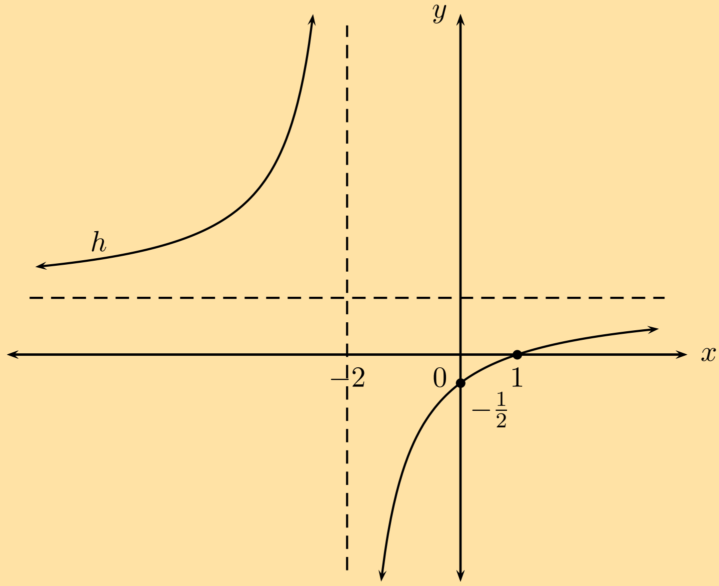
a) Wys dat $a = \frac{1}{3}$.
b) Vind die waarde van p as die punt $(-2;p)$ op Q is.
c) Bereken die gemiddelde gradiënt van die kurwe tussen $x = -2$ en $x = 1$.
d) Bepaal die vergelyking van die nuwe funksie wat gevorm word as Q met 2 eenhede vertikaal afwaarts en met 2 eenhede na links geskuif word.

8. Vind die vergelyking van elkeen van die volgende funksies:

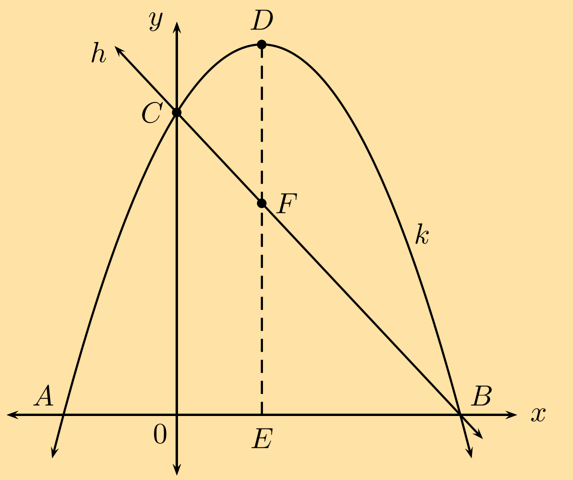
a) $f(x) = 2^x + q$
$g(x) = mx + c$



b) $h(x) = \frac{k}{x+p} + q$



9. Gegewe: die grafiek van $k(x) = -x^2 + 3x + 10$ met die draaipunt by D. Die grafiek van die reguitlyn $h(x) = mx + c$ wat deur punte B en C gaan word ook aangedui.



Bepaal:

a) die lengtes AO, OB, OC en DE

b) die vergelyking van DE

c) die vergelyking van $h(x)$

d) die x-waardes waarvoor $k(x) < 0$

e) die x-waardes waarvoor $k(x) \geq h(x)$

f) die lengte van DF

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2649	2. 264B	3. 264C	4. 264D	5. 264F	6a. 264G
6b. 264H	6c. 264J	7. 264K	8a. 264M	8b. 264N	9. 264P

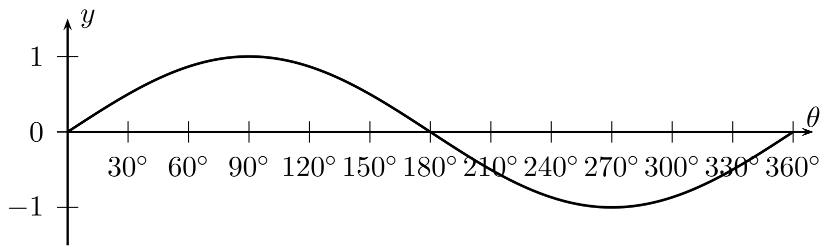
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

BELANGRIK: Trigonometriese funksies word getoets in VRAESTEL 2.

5.5 Sinusfunksies EME3W

Hersiening EME3X

Funksies van die vorm $y = \sin\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$



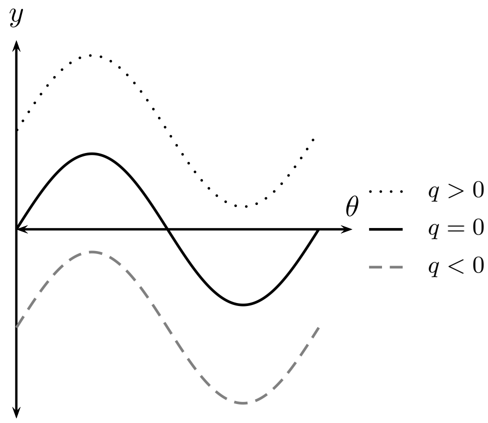
- Periode van een volledige golf is $360°$.
- Amplitude is die maksimum hoogte van die golf bo en onder die x-as en is altyd positief. Amplitude $= 1$.
- Gebied: $[0°; 360°]$

  Vir $y = \sin\theta$ is die definisiegebied $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, maar in hierdie geval is die definisiegebied beperk tot die interval $0° \leq \theta \leq 360°$.
- Terrein: $[-1; 1]$
- x-afsnitte: $(0°; 0)$, $(180°; 0)$, $(360°; 0)$
- y-afsnitte: $(0°; 0)$
- Maksimum draaipunt: $(90°; 1)$
- Minimum draaipunt: $(270°; -1)$

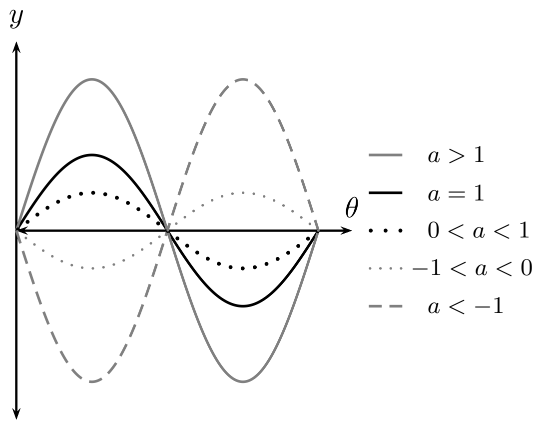
Funksies van die vorm $y = a\sin\theta + q$

Die effek van a en q op $f(\theta) = a\sin\theta + q$:

- **Die effek van q: vertikale skuif**
  - Vir $q > 0$, word $f(\theta)$ vertikaal opwaarts geskuif met q eenhede.
  - Vir $q < 0$, word $f(\theta)$ vertikaal afwaarts geskuif met q eenhede.



- **Die effek van a: vorm**
  - Vir $a > 1$, vermeerder die amplitude van $f(\theta)$.
  - Vir $0 < a < 1$, verminder die amplitude van $f(\theta)$.
  - Vir $a < 0$ is daar 'n refleksie om die x-as.
  - Vir $-1 < a < 0$ is daar 'n refleksie om die x-as en die amplitude verminder.
  - Vir $a < -1$ is daar 'n refleksie om die x-as en die amplitude vermeerder.



Oefening 5 – 20: Hersiening

Teken akkurate grafieke van elkeen van die volgende funksies, vir $0° \leq \theta \leq 360°$, op verskillende assestelsels.

- Gebruik tabelle indien nodig.
- Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

Bepaal ook die volgende vir elke funksie:

- Periode
- Amplitude
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Maksimum en minimum draaipunte

1. $y_1 = \sin\theta$
2. $y_2 = -2\sin\theta$
3. $y_3 = \sin\theta + 1$
4. $y_4 = \frac{1}{2}\sin\theta - 1$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 264Q 2. 264R 3. 264S 4. 264T

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Funksies van die vorm $y = \sin k\theta$ EME3Y

Ondersoek: Die uitwerking van k op 'n sinusgrafiek

1. Voltooi die volgende tabel vir $y_1 = \sin\theta$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$:

θ	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta$									

Gebruik die waardetabel om die kromme van $y_1 = \sin\theta$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$ te teken.

3. Op dieselfde assestelsel, trek die volgende gafieke:

   a) $y_2 = \sin(-\theta)$
   b) $y_3 = \sin 2\theta$
   c) $y_4 = \sin\frac{\theta}{2}$

4. Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4
periode				
amplitude				
gebied				
terrein				
maksimum draaipunte				
minimum draaipunte				
y-afsnit(te)				
x-afsnit(te)				
effek van k				

5. Wat merk jy op omtrent $y_1 = \sin\theta$ en $y_2 = \sin(-\theta)$?

6. Is $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ 'n waar bewering? Verduidelik jou antwoord.
7. Kan jy 'n formule aflei om die waarde van $y = \sin k\theta$ te bepaal?

Die uitwerking van die parameter op $y = \sin k\theta$

Die waarde van k beïnvloed die periode van die sinusfunksie. As k negatief is, dan word die grafiek om die y-as gereflekteer.

- **Vir** $k > 0$:

  Vir $k > 1$ verklein die periode van die sinusfunksie.

  Vir $0 < k < 1$ vergroot die periode van die sinusfunksie.

- **Vir** $k < 0$:

  Vir $-1 < k < 0$ word die grafiek om die y-as gereflekteer, en die periode vergroot.

  Vir $k < -1$ word die grafiek om die y-as gereflekteer en die periode verklein.

Negatiewe hoeke :

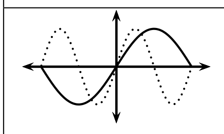
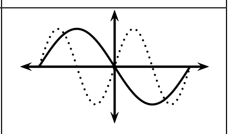
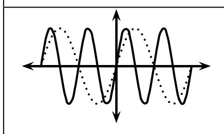
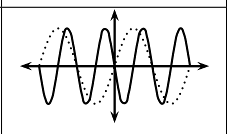
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

Berekening van die periode:

Om die periode van $y = \sin k\theta$ te bepaal, gebruik ons,

$$\text{Periode} = \frac{360°}{|k|}$$

waar $|k|$ die absolute waarde van k is (dit beteken k word altyd as positief beskou).

$0 < k < 1$	$-1 < k < 0$
	
$k > 1$	$k < -1$
	

Uitgewerkte voorbeeld 18: Sinusfunksie

VRAAG

1. Teken die volgende funksies op dieselfde stel asse vir $-180° \leq \theta \leq 180°$.

   a) $y_1 = \sin\theta$

   b) $y_2 = \sin\frac{3\theta}{2}$

2. Bepaal die volgende vir elke funksie:

   a) Periode

   b) Amplitude

   c) Gebied en terrein

   d) x- en y-afsnitte

   e) Maksimum en minimum draaipunte

OPLOSSING

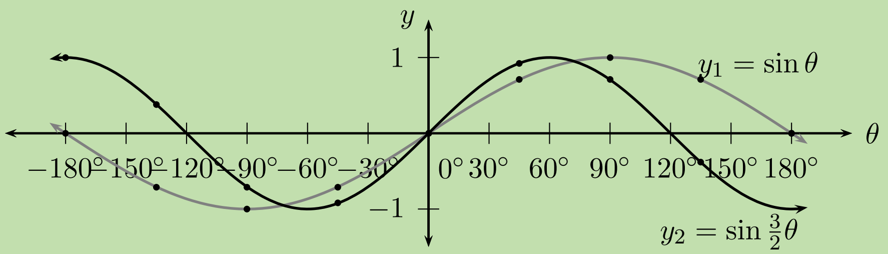
Stap 1: Bestudeer die vergelykings van die vorm $y = \sin k\theta$

Let daarop dat $k > 1$ vir $y_2 = \sin\frac{3\theta}{2}$, daarom verminder die periode van die grafiek.

Stap 2: Voltooi 'n tabel met waardes

θ	$-180°$	$-135°$	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$-0{,}71$	-1	$-0{,}71$	0	0,71	1	0,71	0
$\sin\frac{3\theta}{2}$	1	0,38	$-0{,}71$	$-0{,}92$	0	0,92	0,71	$-0{,}38$	-1

Stap 3: Teken die sinusgrafieke



Stap 4: Voltooi die tabel

	$y_1 = \sin\theta$	$y_2 = \sin\frac{3\theta}{2}$
periode	$360°$	$240°$
amplitude	1	1
gebied	$[-180°; 180°]$	$[-180°; 180°]$
terrein	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
maksimum draaipunte	$(90°; 1)$	$(-180°; 1)$ en $(60°; 1)$
minimum draaipunte	$(-90°; -1)$	$(-60°; -1)$ en $(180°; 1)$
y-afsnit(te)	$(0°; 0)$	$(0°; 0)$
x-afsnit(te)	$(-180°; 0)$, $(0°; 0)$ en $(180°; 0)$	$(-120°; 0)$, $(0°; 0)$ en $(120°; 0)$

Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(\theta) = y = \sin k\theta$:

Gebied en terrein

Die definisiegebied is $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ omdat daar geen waarde vir θ is waarvoor $f(\theta)$ nie gedefiniëer is nie.

Die reeks is $\{f(\theta) : -1 \leq f(\theta) \leq 1, f(\theta) \in \mathbb{R}\}$ of $[-1; 1]$.

Afsnitte

Die x-afsnitte word bepaal deur $f(\theta) = 0$ te laat wees en vir θ op te los.

Die y-afsnit word bereken deur $\theta = 0°$ te laat wees en $f(\theta)$ te bereken.

$$\begin{aligned} y &= \sin k\theta \\ &= \sin 0° \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0°; 0)$.

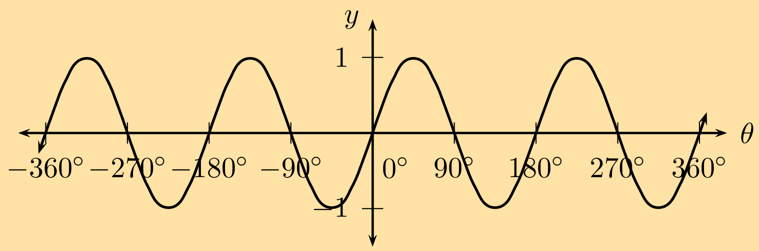
Oefening 5 – 21: Sinusfunksies van die vorm $y = \sin k\theta$

1. Teken die volgende funksies vir $-180° \leq \theta \leq 180°$. Bepaal vir elke grafiek:
   - Periode
   - Amplitude
   - Gebied en terrein
   - x- en y-afsnitte
   - Maksimum en minimum draaipunte

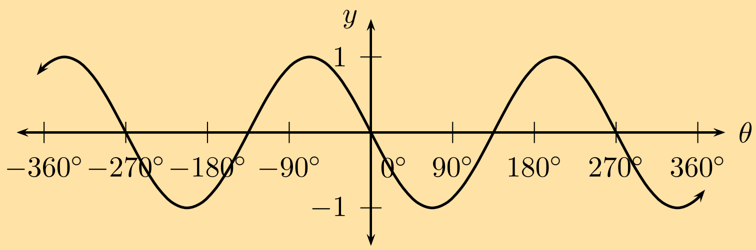
   a) $f(\theta) = \sin 3\theta$
   b) $g(\theta) = \sin \frac{\theta}{3}$
   c) $h(\theta) = \sin(-2\theta)$
   d) $k(\theta) = \sin \frac{3\theta}{4}$

2. Bepaal die waarde van k vir elke grafiek van die vorm $f(\theta) = \sin k\theta$:

   a)



b)



Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 264V 1b. 264W 1c. 264X 1d. 264Y 2a. 264Z 2b. 2652

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Funksies van die vorm $y = \sin(\theta + p)$ EME3Z

Ondersoek: Die uitwerking van p op 'n sinusgrafiek

1. Op dieselfde assestelsel, teken die volgende grafieke vir $-360° \leq \theta \leq 360°$:

   a) $y_1 = \sin \theta$

   b) $y_2 = \sin(\theta - 90°)$

   c) $y_3 = \sin(\theta - 60°)$

   d) $y_4 = \sin(\theta + 90°)$

   e) $y_5 = \sin(\theta + 180°)$

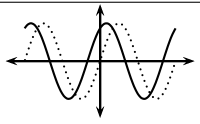
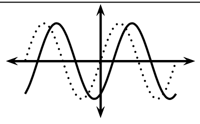
2. Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
periode					
amplitude					
gebied					
terrein					
maksimum draaipunte					
minimum draaipunte					
y-afsnit(te)					
x-afsnit(te)					
effek van p					

Die uitwerking van die parameter op $y = \sin(\theta + p)$

Die uitwerking van p op die sinusfunksie is 'n horisontale verskuiwing, ook genoem 'n 'fase-verskuiwing'; die hele grafiek skuif na links of na regs.

- Vir $p > 0$ skuif die grafiek van die sinusfunksie na links met p grade.
- Vir $p < 0$ skuif die grafiek van die sinusfunksie na regs met p grade.

$p > 0$	$p < 0$
	

Uitgewerkte voorbeeld 19: Sinusfunksie

VRAAG

1. Teken die volgende funksies op dieselfde stel asse vir $-360° \leq \theta \leq 360°$.
   a) $y_1 = \sin\theta$
   b) $y_2 = \sin(\theta - 30°)$
2. Bepaal die volgende vir elke funksie:
   a) Periode
   b) Amplitude
   c) Gebied en terrein
   d) x- en y-afsnitte
   e) Maksimum en minimum draaipunte

OPLOSSING

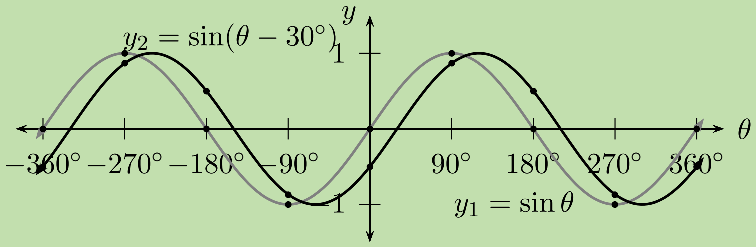
Stap 1: Bestudeer die vergelykings van die vorm $y = \sin(\theta + p)$

Let daarop dat vir $y_1 = \sin\theta$ het ons $p = 0$ (geen fase-verskuiwing), en vir $y_2 = \sin(\theta - 30°)$ het ons $p < 0$, daarom skuif die grafiek met $30°$ na regs.

Stap 2: Voltooi 'n tabel met waardes

θ	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\theta$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\sin(\theta - 30°)$	$-0{,}5$	$0{,}87$	$0{,}5$	$-0{,}87$	$-0{,}5$	$0{,}87$	$0{,}5$	$-0{,}87$	$-0{,}5$

Stap 3: Teken die sinusgrafieke



Stap 4: Voltooi die tabel

	$y_1 = \sin\theta$	$y_2 = \sin(\theta - 30°)$
periode	$360°$	$360°$
amplitude	1	1
gebied	$[-360°; 360°]$	$[-360°; 360°]$
terrein	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
maksimum draaipunte	$(-270°; 1)$ en $(90°; 1)$	$(-240°; 1)$ en $(120°; 1)$
minimum draaipunte	$(-90°; -1)$ en $(270°; -1)$	$(-60°; -1)$ en $(300°; -1)$
y**-afsnit(te)**	$(0°; 0)$	$(0°; -\frac{1}{2})$
x**-afsnit(te)**	$(-360°; 0)$, $(-180°; 0)$, $(0°; 0)$, $(180°; 0)$ en $(360°; 0)$	$(-330°; 0)$, $(-150°; 0)$, $(30°; 0)$ en $(210°; 0)$

Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(\theta) = y = \sin(\theta + p)$:

Gebied en terrein

Die definisiegebied is $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ omdat daar geen waarde vir θ is waarvoor $f(\theta)$ nie gedefiniëer is nie.

Die terrein is $\{f(\theta) : -1 \leq f(\theta) \leq 1, f(\theta) \in \mathbb{R}\}$.

Afsnitte

Die x-afsnitte word bepaal deur $f(\theta) = 0$ te laat wees en θ op te los.

Die y-afsnit word bereken deur $\theta = 0°$ te laat wees en $f(\theta)$ te bereken.

Oefening 5 – 22: Sinusfunksies van die vorm $y = \sin(\theta + p)$

Teken die volgende funksies vir $-360° \leq \theta \leq 360°$.

Bepaal vir elke funksie:

- Periode
- Amplitude
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Maksimum en minimum draaipunte

1. $f(\theta) = \sin(\theta + 30°)$
2. $g(\theta) = \sin(\theta - 45°)$
3. $h(\theta) = \sin(\theta + 60°)$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2653 2. 2654 3. 2655

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Teken van sinusgrafieke EME42

Uitgewerkte voorbeeld 20: Teken van 'n sinusgrafiek

VRAAG

Teken die grafiek van $f(\theta) = \sin(45° - \theta)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vorm van die vergelyking

Skryf die vergelyking in die vorm $y = \sin(\theta + p)$.

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin(45° - \theta) \\ &= \sin(-\theta + 45°) \\ &= \sin\left(-(\theta - 45°)\right) \\ &= -\sin(\theta - 45°) \end{aligned}$$

Om 'n grafiek van die funksie hierbo te teken, weet ons dat die standaard sinusgrafiek,

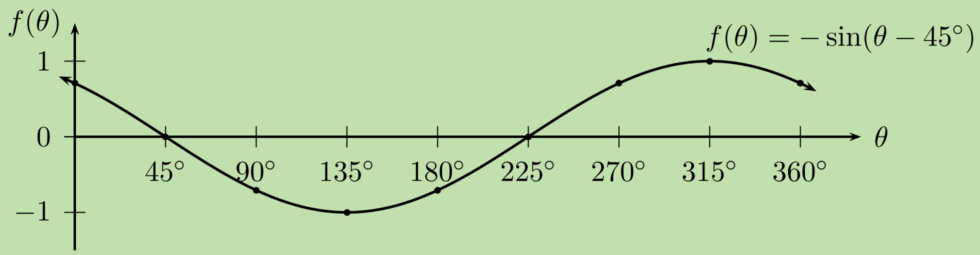
$y = \sin\theta$, moet:

- om die x-as gereflekteer word
- na regs geskuif word met $45°$

Stap 2: Voltooi 'n tabel met waardes

θ	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$f(\theta)$	$0{,}71$	0	$-0{,}71$	-1	$-0{,}71$	0	$0{,}71$	1	$0{,}71$

Stap 3: Stip die punte uit en verbind met 'n gladde kromme



Periode: $360°$
Amplitude: 1
Gebied: $[-360°; 360°]$
Terrein: $[-1; 1]$
Maksimum draaipunt: $(315°; 1)$
Minimum draaipunt: $(135°; -1)$
y-afsnit: $(0°; 0{,}71)$
x-afsnitte: $(45°; 0)$ en $(225°; 0)$

Uitgewerkte voorbeeld 21: Teken van 'n sinusgrafiek

VRAAG

Teken die grafiek van $f(\theta) = \sin(3\theta + 60°)$ vir $0° \leq \theta \leq 180°$.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vorm van die vergelyking

Skryf die vergelyking in die vorm $y = \sin k(\theta + p)$.

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sin(3\theta + 60°) \\ &= \sin 3(\theta + 20°) \end{aligned}$$

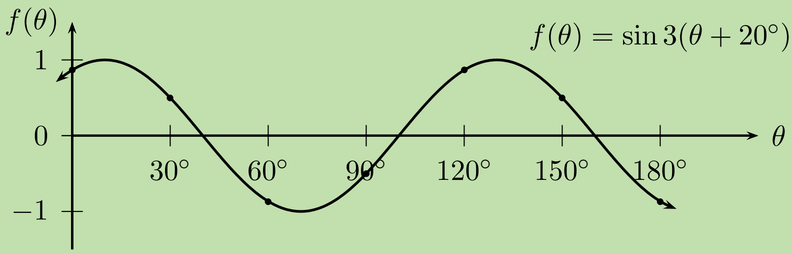
Om 'n grafiek van die vergelyking hierbo te teken moet die standaard sinusgrafiek, $y = \sin\theta$, op die volgende maniere verander word:

- verminder die periode met 'n faktor van 3
- skuif grafiek $20°$ na links

Stap 2: Voltooi 'n tabel met waardes

θ	$0°$	$30°$	$60°$	$90°$	$120°$	$150°$	$180°$
$f(\theta)$	$0{,}87$	$0{,}5$	$-0{,}87$	$-0{,}5$	$0{,}87$	$0{,}5$	$-0{,}87$

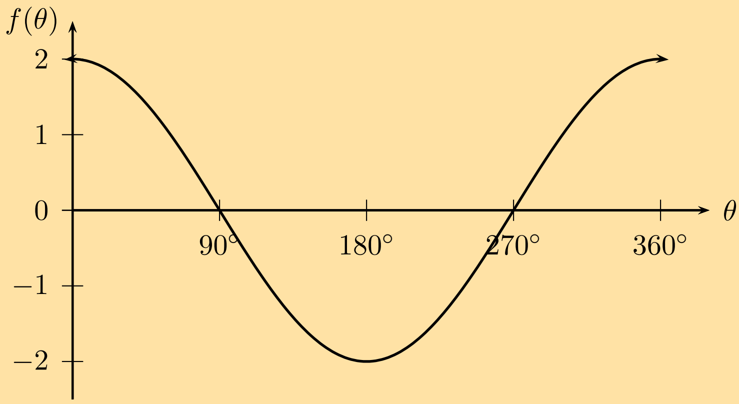
Stap 3: Stip die punte uit en verbind met 'n gladde kromme



Periode: $120°$
Amplitude: 1
Gebied: $[0°; 180°]$
Terrein: $[-1; 1]$
Maksimum draaipunt: $(10°; 1)$ en $(130°; 1)$
Minimum draaipunt: $(70°; -1)$
y-afsnitte: $(0°; 0{,}87)$
x-afsnitte: $(40°; 0)$, $(100°; 0)$ en $(160°; 0)$

Oefening 5 – 23: Die sinusfunksie

1. Teken die volgende grafieke op verskillende asse:
   a) $y = 2\sin\frac{\theta}{2}$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$
   b) $f(\theta) = \frac{1}{2}\sin(\theta - 45°)$ vir $-90° \leq \theta \leq 90°$
   c) $y = \sin(\theta + 90°) + 1$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$
   d) $y = \sin(-\frac{3\theta}{2})$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$
   e) $y = \sin(30° - \theta)$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$
2. Gegewe die grafiek van die funksie $y = a\sin(\theta + p)$, bepaal die waardes van a en p.



Kan jy hierdie grafiek beskryf in terme van $\cos\theta$?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

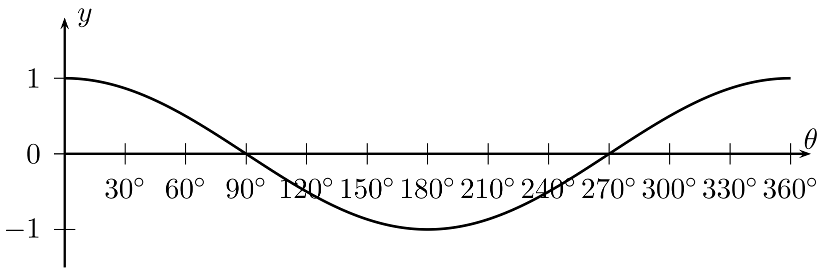
1a. 2656 1b. 2657 1c. 2658 1d. 2659 1e. 265B 2. 265C

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.6 Kosinusfunksies EME43

Hersiening EME44

Funksies van die vorm $y = \cos\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$



- Die periode is $360°$ en die amplitude is 1.
- Gebied: $[0°; 360°]$

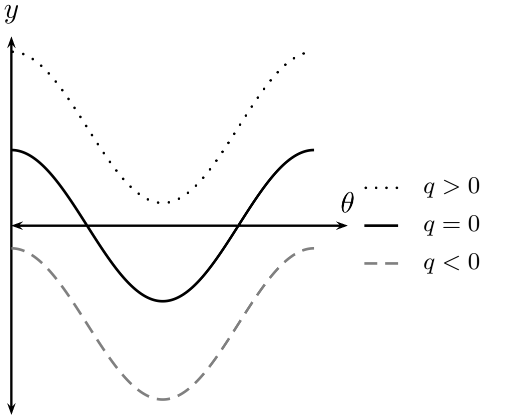
  Vir $y = \cos\theta$ is die definisiegebied $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, maar in hierdie geval is die definisiegebied beperk tot die interval $0° \leq \theta \leq 360°$.
- Terrein: $[-1; 1]$
- x-afsnitte: $(90°; 0)$, $(270°; 0)$
- y-afsnitte: $(0°; 1)$
- Maksimum draaipunte: $(0°; 1)$, $(360°; 1)$
- Minimum draaipunt: $(180°; -1)$

Funksies van die vorm $y = a\cos\theta + q$

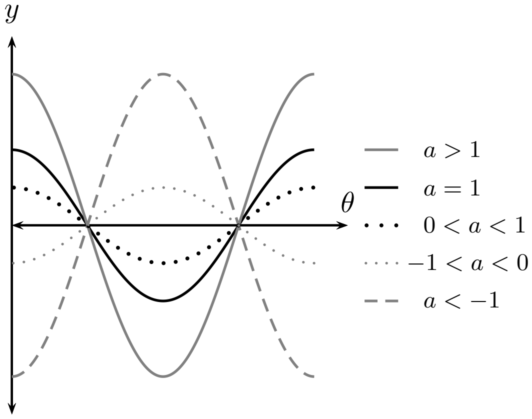
Kosinusfunksies van die algemene vorm $y = a\cos\theta + q$, waar a en q konstantes is.

Die effek van a en q op $f(\theta) = a\cos\theta + q$:

- **Die effek van q: vertikale skuif**
  - Vir $q > 0$, word $f(\theta)$ vertikaal opwaarts geskuif met q eenhede.
  - Vir $q < 0$, is $f(\theta)$ vertikaal afwaarts geskuif met q eenhede.



- **Die effek van a: vorm**
  - Vir $a > 1$, vermeerder die amplitude van $f(\theta)$.
  - Vir $0 < a < 1$, verminder die amplitude van $f(\theta)$.
  - Vir $a < 0$ is daar 'n refleksie om die x-as.
  - Vir $-1 < a < 0$ is daar 'n refleksie om die x-as en die amplitude verminder.
  - Vir $a < -1$ is daar 'n refleksie om die x-as en die amplitude vermeerder.



Oefening 5 – 24: Hersiening

Teken akkurate grafieke van elkeen van die volgende funksies, vir $0° \leq \theta \leq 360°$, op verskillende assestelsels.

- Gebruik tabelle indien nodig.
- Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

Bepaal ook die volgende vir elke funksie:

- Periode
- Amplitude
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Maksimum en minimum draaipunte

1. $y_1 = \cos\theta$
2. $y_2 = -3\cos\theta$
3. $y_3 = \cos\theta + 2$
4. $y_4 = \frac{1}{2}\cos\theta - 1$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 265D 2. 265F 3. 265G 4. 265H

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Funksies van die vorm $y = \cos(k\theta)$ EME45

Ons kyk nou na kosinusfunksies van die vorm $y = \cos k\theta$ en die uitwerking van parameter k.

Ondersoek: Die uitwerking van k op 'n kosinusgrafiek

1. Voltooi die volgende tabel vir $y_1 = \cos\theta$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$:

θ	$-360°$	$-300°$	$-240°$	$-180°$	$-120°$	$-60°$	$0°$
$\cos\theta$							
θ	$60°$	$120°$	$180°$	$240°$	$300°$	$360°$	
$\cos\theta$							

Gebruik die waardetabel om die kromme van $y_1 = \cos\theta$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$ te teken.

3. Op dieselfde assestelsel, trek die volgende gafieke:

a) $y_2 = \cos(-\theta)$

b) $y_3 = \cos 3\theta$

c) $y_4 = \cos\frac{3\theta}{4}$

4. Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4
periode				
amplitude				
gebied				
terrein				
maksimum draaipunte				
minimum draaipunte				
y-afsnit(te)				
x-afsnit(te)				
effek van k				

5. Wat merk jy op omtrent $y_1 = \cos\theta$ en $y_2 = \cos(-\theta)$?

6. Is $\cos(-\theta) = -\cos\theta$ 'n waar stelling? Verduidelik jou antwoord.

7. Kan jy 'n formule aflei om die waarde van $y = \cos k\theta$ te bepaal?

Die uitwerking van die parameter k op $y = \cos k\theta$

Die waarde van k beïnvloed die periode van die kosinusfunksie.

- **Vir** $k > 0$:
  Vir $k > 1$, verklein die periode van die kosinusfunksie.
  Vir $0 < k < 1$, vergroot die periode van die kosinusfunksie.
- **Vir** $k < 0$:
  Vir $-1 < k < 0$, vergroot die periode.
  Vir $k < -1$, verklein die periode.

Negatiewe hoeke:

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

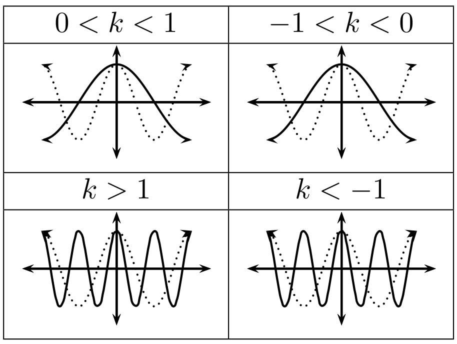
Let daarop dat vir negatiewe waardes van θ word die grafiek **nie** gereflekteer om die x-as nie.

Berekening van die periode:

Om die periode van $y = \cos k\theta$ te bepaal, gebruik ons,

$$\text{Periode } = \frac{360^\circ}{|k|}$$

waar $|k|$ die absolute waarde van k is.



Uitgewerkte voorbeeld 22: Kosinusfunksie

VRAAG

1. Teken die volgende funksies op dieselfde stel asse vir $-180° \leq \theta \leq 180°$.
   a) $y_1 = \cos\theta$
   b) $y_2 = \cos\frac{\theta}{2}$
2. Bepaal die volgende vir elke funksie:
   a) Periode
   b) Amplitude
   c) Gebied en terrein
   d) x- en y-afsnitte
   e) Maksimum en minimum draaipunte

OPLOSSING

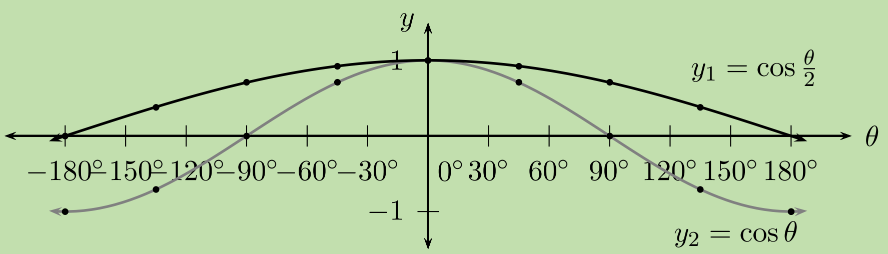
Stap 1: Bestudeer die vergelykings van die vorm $y = \cos k\theta$

Let op dat $y_2 = \cos\frac{\theta}{2}$; $k < 1$, daarom sal die periode van die grafiek toeneem.

Stap 2: Voltooi 'n tabel van waardes

θ	$-180°$	$-135°$	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$
$\cos\theta$	-1	$-0{,}71$	0	$0{,}71$	1	$0{,}71$	0	$-0{,}71$	-1
$\cos\frac{\theta}{2}$	0	$0{,}38$	$0{,}71$	$0{,}92$	1	$0{,}92$	$0{,}71$	$0{,}38$	0

Stap 3: Skets die kosinusgrafieke



Stap 4: Voltooi die tabel

	$y_1 = \cos\theta$	$y_2 = \cos\frac{\theta}{2}$
periode	$360°$	$720°$
amplitude	1	1
gebied	$[-180°; 180°]$	$[-180°; 180°]$
terrein	$[-1; 1]$	$[0; 1]$
maksimum draaipunte	$(0°; 1)$	$(0°; 1)$
minimum draaipunte	$(-180°; -1)$ en $(180°; -1)$	geen
y-afsnit(te)	$(0°; 1)$	$(0°; 1)$
x-afsnit(te)	$(-90°; 0)$ en $(90°; 0)$	$(-180°; 0)$ en $(180°; 0)$

Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(\theta) = y = \cos k\theta$:

Gebied en terrein

Die definisiegebied is $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ omdat daar geen waarde vir θ is waarvoor $f(\theta)$ nie gedefiniëer is nie.

Die terrein is $\{f(\theta) : -1 \leq f(\theta) \leq 1, f(\theta) \in \mathbb{R}\}$ of $[-1; 1]$.

Afsnitte

Die x-afsnitte word bepaal deur $f(\theta) = 0$ te laat wees en vir θ op te los.

Die y-afsnit word bereken deur $\theta = 0°$ te laat wees en $f(\theta)$ te bereken.

$$\begin{aligned} y &= \cos k\theta \\ &= \cos 0° \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0°; 1)$.

Oefening 5 – 25: Kosinusfunksies van die vorm $y = \cos k\theta$

1. Skets die volgende funksies vir $-180° \leq \theta \leq 180°$. Vir elke grafiek bepaal:
   - Periode
   - Amplitude
   - Gebied en terrein
   - x- en y-afsnitte
   - Maksimum en minimum draaipunte

   a) $f(\theta) = \cos 2\theta$

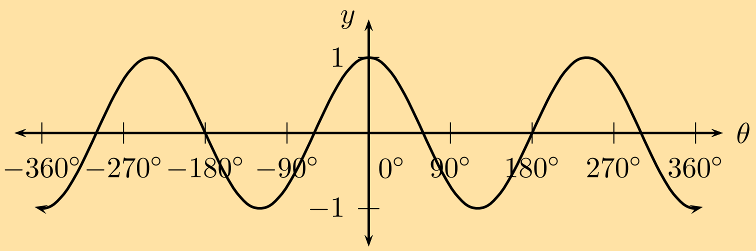
   b) $g(\theta) = \cos \frac{\theta}{3}$

   c) $h(\theta) = \cos(-2\theta)$

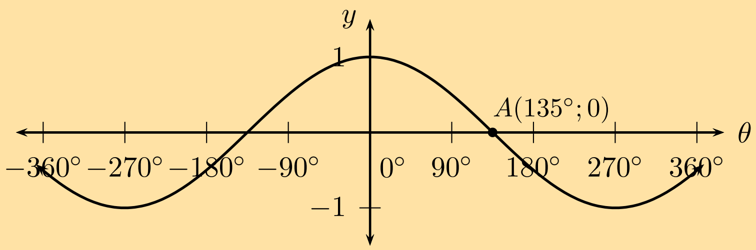
   d) $k(\theta) = \cos \frac{3\theta}{4}$

2. Bepaal die waarde van k vir elke grafiek van die vorm $f(\theta) = \cos k\theta$:

   a)



b)



Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 265J 1b. 265K 1c. 265M 1d. 265N 2a. 265P 2b. 265Q

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

Funksies van die vorm $y = \cos(\theta + p)$ EME46

Ons kyk nou na kosinusfunksies van die vorm $y = \cos(\theta + p)$ en die uitwerking van parameter p.

Ondersoek: Die uitwerking van p op 'n kosinusgrafiek

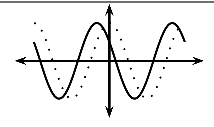
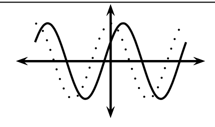
1. Op dieselfde assestelsel teken die volgende grafieke vir $-360° \leq \theta \leq 360°$:
    a) $y_1 = \cos\theta$
    b) $y_2 = \cos(\theta - 90°)$
    c) $y_3 = \cos(\theta - 60°)$
    d) $y_4 = \cos(\theta + 90°)$
    e) $y_5 = \cos(\theta + 180°)$
2. Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
periode					
amplitude					
gebied					
terrein					
maksimum draaipunte					
minimum draaipunte					
y-afsnit(te)					
x-afsnit(te)					
effek van p					

Die uitwerking van die parameter op $y = \cos(\theta + p)$

Die effek van p op die kosinusfunksie is 'n horisontale verskuiwing (of faseverskuiwing); die hele grafiek beweeg na links of na regs.

- Vir $p > 0$, skuif die grafiek van die kosinusfunksie na links met p grade.
- Vir $p < 0$, skuif die grafiek van die kosinusfunksie na regs met p grade.

$p > 0$	$p < 0$
	

Uitgewerkte voorbeeld 23: Kosinusfunksie

VRAAG

1. Teken die volgende funksies op dieselfde stel asse vir $-360° \leq \theta \leq 360°$.

   a) $y_1 = \cos\theta$

   b) $y_2 = \cos(\theta + 30°)$

   Bepaal die volgende vir elke funksie:

2. a) Periode

   b) Amplitude

   c) Gebied en terrein

   d) x- en y-afsnitte

   e) Maksimum en minimum draaipunte

OPLOSSING

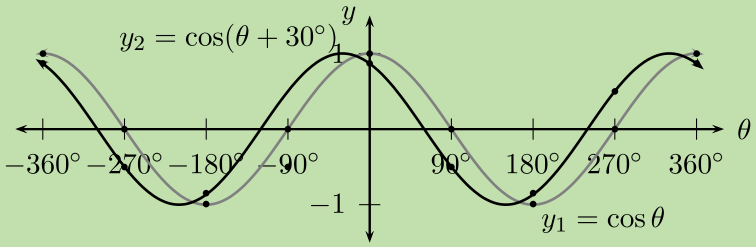
Stap 1: Bestudeer die vergelykings van die vorm $y = \cos(\theta + p)$

Let op dat vir $y_1 = \cos\theta$ het ons $p = 0$ (geen faseverskuiwing) en vir $y_2 = \cos(\theta + 30°)$ is $p < 0$. Dus skuif die grafiek na links met $30°$.

Stap 2: Voltooi 'n tabel van waardes

θ	$-360°$	$-270°$	$-180°$	$-90°$	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\cos\theta$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
$\cos(\theta + 30°)$	$0{,}87$	$-0{,}5$	$-0{,}87$	$0{,}5$	$0{,}87$	$-0{,}5$	$-0{,}87$	$0{,}5$	$0{,}87$

Stap 3: Skets die kosinusgrafieke



Stap 4: Voltooi die tabel

	y_1	y_2
periode	$360°$	$360°$
amplitude	1	1
gebied	$[-360°; 360°]$	$[-360°; 360°]$
terrein	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
maksimum draaipunte	$(-360°; 1)$, $(0°; 1)$ en $(360°; 1)$	$(-30°; 1)$ en $(330°; 1)$
minimum draaipunte	$(-180°; -1)$ en $(180°; -1)$	$(-210°; -1)$ en $(150°; -1)$
y-afsnit(te)	$(0°; 0)$	$(0°; 0{,}87)$
x-afsnit(te)	$(-270°; 0)$, $(-90°; 0)$, $(90°; 0)$ en $(270°; 0)$	$(-300°; 0)$, $(-120°; 0)$, $(60°; 0)$ en $(240°; 0)$

Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(\theta) = y = \cos(\theta + p)$:

Gebied en terrein

Die definisiegebied is $\{\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$ omdat daar geen waarde vir θ is waarvoor $f(\theta)$ nie gedefiniëer is nie.

Die terrein is $\{f(\theta) : -1 \leq f(\theta) \leq 1, f(\theta) \in \mathbb{R}\}$.

Afsnitte

Die x-afsnitte word bepaal deur $f(\theta) = 0$ te laat wees en vir θ op te los.

Die y-snypunt word bereken deur $\theta = 0°$ te laat wees en $f(\theta)$ te bereken.

$$\begin{aligned} y &= \cos(\theta + p) \\ &= \cos(0° + p) \\ &= \cos p \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0°; \cos p)$.

Oefening 5 – 26: Kosinusfunksies van die vorm $y = \cos(\theta + p)$

Teken die volgende funksies vir $-360° \leq \theta \leq 360°$.

Bepaal vir elke funksie:

- Periode
- Amplitude
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Maksimum en minimum draaipunte

1. $f(\theta) = \cos(\theta + 45°)$
2. $g(\theta) = \cos(\theta - 30°)$
3. $h(\theta) = \cos(\theta + 60°)$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 265R 2. 265S 3. 265T

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Skets van kosinusgrafieke EME47

Uitgewerkte voorbeeld 24: Skets van 'n kosinusgrafiek

VRAAG

Teken die grafiek van $f(\theta) = \cos(180° - 3\theta)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vorm van die vergelyking

Skryf die vergelyking in die vorm $y = \cos k(\theta + p)$.

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos(180° - 3\theta) \\ &= \cos(-3\theta + 180°) \\ &= \cos\left(-3(\theta - 60°)\right) \\ &= \cos 3(\theta - 60°) \end{aligned}$$

Om 'n grafiek van bostaande funksie te teken, moet die standaard kosinusgrafiek, $y =$

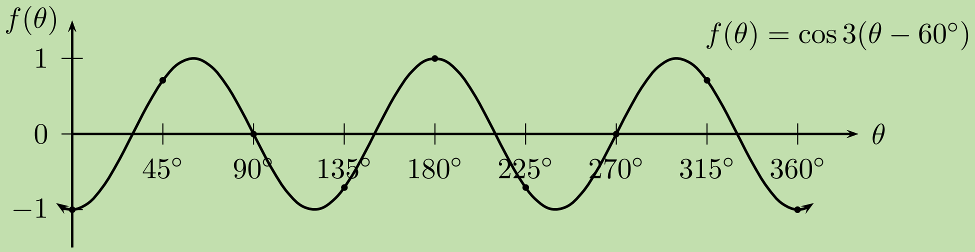
$\cos\theta$, op die volgende wyses verander word:

- verminder die periode met 'n faktor van 3
- skuif grafiek $60°$ na regs

Stap 2: Voltooi 'n tabel van waardes

θ	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$	$315°$	$360°$
$f(\theta)$	-1	$0{,}71$	0	$-0{,}71$	1	$-0{,}71$	0	$0{,}71$	-1

Stap 3: Stip die punte uit en verbind met 'n gladde kromme

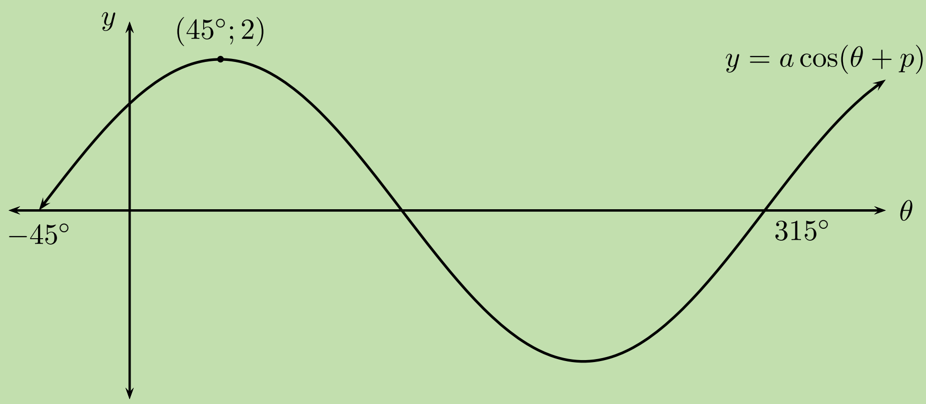


Periode: $120°$
Amplitude: 1
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-1; 1]$
Maksimum draaipunte: $(60°; 1)$, $(180°; 1)$ en $(300°; 1)$
Minimum draaipunte: $(0°; -1)$, $(120°; -1)$, $(240°; -1)$ en $(360°; -1)$
y-afsnit: $(0°; -1)$
x-afsnit: $(30°; 0)$, $(90°; 0)$, $(150°; 0)$, $(210°; 0)$, $(270°; 0)$ en $(330°; 0)$

Uitgewerkte voorbeeld 25: Die vind van die vergelyking van 'n kosinusgrafiek

VRAAG

Gegewe die grafiek van $y = a\cos(k\theta + p)$, bepaal die waardes van a, k, p en die minimum draaipunt.



OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die waarde van k

Vanuit die grafiek sien ons dat die periode van die grafiek $360°$ is, dus $k = 1$.

$$y = a\cos(\theta + p)$$

Stap 2: Bepaal die waarde van a

Vanuit die skets kan ons sien dat die maksimum draaipunt $(45°; 2)$ is, dus weet ons dat die amplitude van die grafiek 2 is, en dus $a = 2$.

$$y = 2\cos(\theta + p)$$

Stap 3: Bepaal die waarde van p

Vergelyk die gegewe grafiek met die standaard kosinusfunksie $y = \cos\theta$ en let op die verskil in die maksimum draaipunte. Ons sien dat die gegewe funksie met $45°$ na regs geskuif het, dus $p = 45°$.

$$y = 2\cos(\theta - 45°)$$

Stap 4: Bepaal die minimum draaipunt

By die minimum draaipunt, $y = -2$:

$$\begin{aligned} y &= 2\cos(\theta - 45°) \\ -2 &= 2\cos(\theta - 45°) \\ -1 &= \cos(\theta - 45°) \\ \cos^{-1}(-1) &= \theta - 45° \\ 180° &= \theta - 45° \\ 225° &= \theta \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(225°; -2)$.

Oefening 5 – 27: Die kosinusfunksie

1. Teken die volgende grafieke op verskillende asse:

   a) $y = \cos(\theta + 15°)$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$

   b) $f(\theta) = \frac{1}{3}\cos(\theta - 60°)$ vir $-90° \leq \theta \leq 90°$

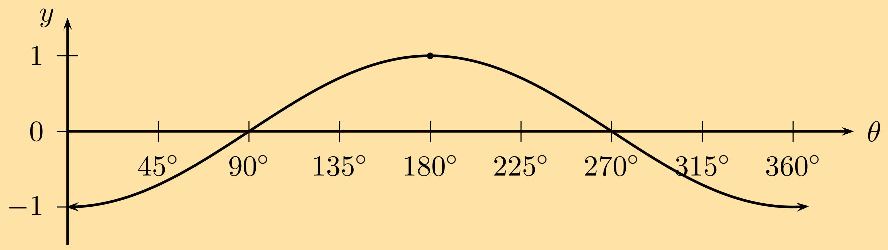
   c) $y = -2\cos\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

   d) $y = \cos(30° - \theta)$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$

   e) $g(\theta) = 1 + \cos(\theta - 90°)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

   f) $y = \cos(2\theta + 60°)$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$

2. Die volgende grafiek word aan twee meisies gegee:



   a) Audrey besluit dat die vergelyking vir die grafiek 'n kosinusfunksie van die vorm $y = a\cos\theta$ is. Bepaal die waarde van a.

   b) Megan dink dat die vergelyking vir die grafiek 'n kosinusfunksie van die vorm $y = \cos(\theta + p)$ is. Bepaal die waarde van p.

   c) Wat kan hulle hieruit aflei?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

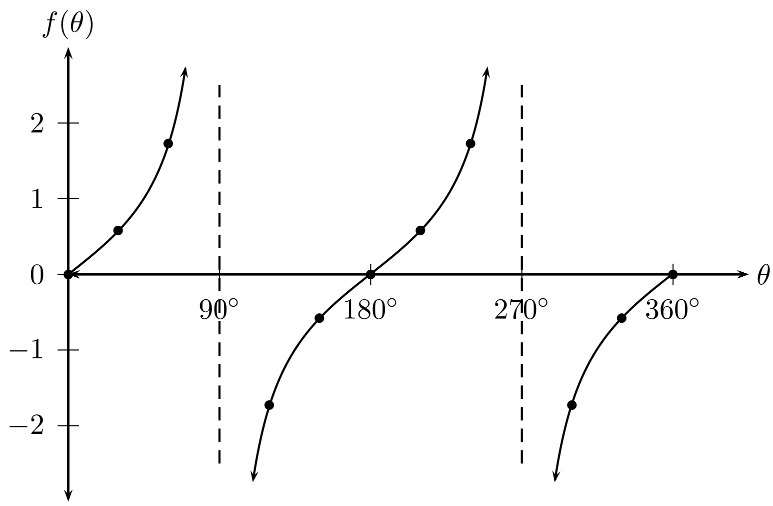
1a. 265V 1b. 265W 1c. 265X 1d. 265Y 1e. 265Z 1f. 2662
2. 2663

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.7 Tangensfunksies EME48

Hersiening EME49

Funksies van die vorm $y = \tan\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$



Die vertikale stippellyne word asimptote genoem. Die asimptote is by die waardes van θ waar $\tan\theta$ nie gedefiniëerd is.

- Periode: $180°$
- Gebied: $\{\theta : 0° \leq \theta \leq 360°, \theta \neq 90°; 270°\}$
- Terrein: $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$
- x-afsnitte: $(0°; 0)$, $(180°; 0)$, $(360°; 0)$
- y-afsnitte: $(0°; 0)$
- Asimptote: $\theta = 90°$ en $\theta = 270°$

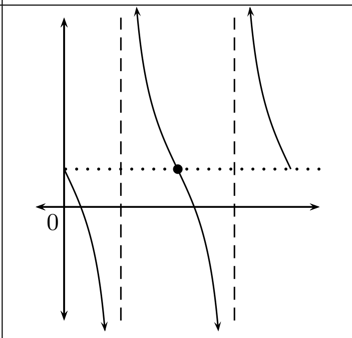
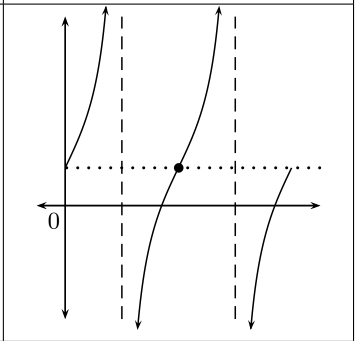
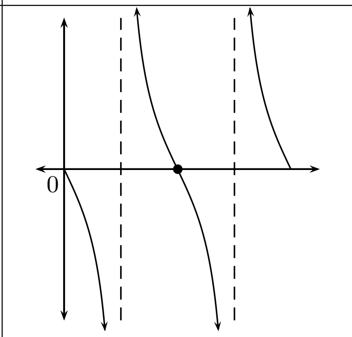
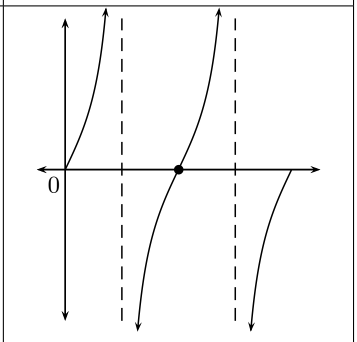
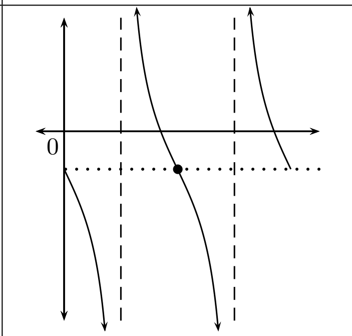
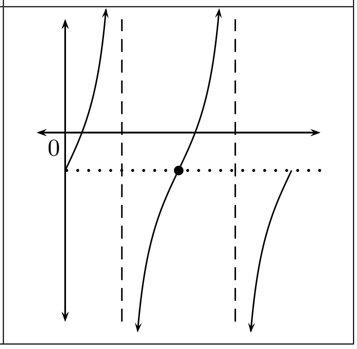
Funksies van die vorm $y = a\tan\theta + q$

Tangensfunksies het die algemene vorm $y = a\tan\theta + q$, waar a en q konstantes is.

Die effek van a en q op $f(\theta) = a\tan\theta + q$:

- **Die effek van q: vertikale skuif**
  - Vir $q > 0$, word $f(\theta)$ vertikaal opwaarts geskuif met q eenhede.
  - Vir $q < 0$, word $f(\theta)$ vertikaal afwaarts geskuif met q eenhede.
- **Die effek van a: vorm**
  - Vir $a > 1$, is die takke van $f(\theta)$ steiler.
  - Vir $0 < a < 1$, is die takke van $f(\theta)$ minder steil en buig meer.

- Vir $a < 0$ is daar 'n refleksie om die x-as.
- Vir $-1 < a < 0$, is daar 'n refleksie rondom die x-as en die takke van die grafiek is minder steil.
- Vir $a < -1$, is daar 'n refleksie rondom die x-as en die takke van die grafiek is steiler.

	$a < 0$	$a > 0$
$q > 0$		
$q = 0$		
$q < 0$		

Oefening 5 – 28: Hersiening

Teken elkeen van die volgende funksies vir $0° \leq \theta \leq 360°$ akkuraat op aparte asse:

- Gebruik tabelle indien nodig.
- Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

Bepaal ook die volgende vir elke funksie:

- Periode
- Gebied en terrein

- x- en y-afsnitte
- Asimptote

1. $y_1 = \tan\theta - \frac{1}{2}$
2. $y_2 = -3\tan\theta$
3. $y_3 = \tan\theta + 2$
4. $y_4 = 2\tan\theta - 1$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2664 2. 2665 3. 2666 4. 2667

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Funksies van die vorm $y = \tan(k\theta)$ EME4B

Ondersoek: Die effek van k op 'n tangensgrafiek

1. Voltooi die volgende tabel vir $y_1 = \tan\theta$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$:

θ	$-360°$	$-300°$	$-240°$	$-180°$	$-120°$	$-60°$	$0°$
$\tan\theta$							
θ	$60°$	$120°$	$180°$	$240°$	$300°$	$360°$	
$\tan\theta$							

2. Gebruik die waardetabel om die kromme van $y_1 = \tan\theta$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$ te teken.
3. Op dieselfde assestelsel, trek die volgende gafieke:
   a) $y_2 = \tan(-\theta)$
   b) $y_3 = \tan 3\theta$
   c) $y_4 = \tan\frac{\theta}{2}$
4. Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4
periode				
gebied				
terrein				
y-afsnit(te)				
x-afsnit(te)				
asimptote				
effek van k				

5. Wat merk jy op omtrent $y_1 = \tan\theta$ en $y_2 = \tan(-\theta)$?
6. Is $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ 'n waar stelling? Verduidelik jou antwoord.
7. Kan jy 'n formule aflei om die waarde van $y = \tan k\theta$ te bepaal?

Die uitwerking van die parameter op $y = \tan k\theta$

Die waarde van k affekteer die periode van die tangensfunksie. As k negatief is, dan is die grafiek gereflekteer rondom die y-as.

- **Vir** $k > 0$:

  Vir $k > 1$, neem die periode van die tangensfunksie af.

  Vir $0 < k < 1$, neem die periode van die tangensfunksie toe.

- **Vir** $k < 0$:

  Vir $-1 < k < 0$ word die grafiek om die y-as gereflekteer, en die periode vergroot.

  Vir $k < -1$ word die grafiek om die y-as gereflekteer en die periode verklein.

Negatiewe hoeke :

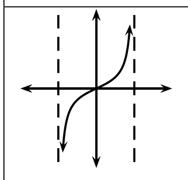
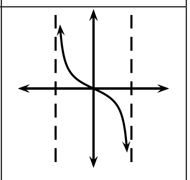
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

Berekening van die periode:

Om die periode van $y = \tan k\theta$ te bepaal, gebruik ons

$$\text{Periode } = \frac{180^\circ}{|k|}$$

waar $|k|$ die absolute waarde van k is.

$k > 0$	$k < 0$
	

Uitgewerkte voorbeeld 26: Tangens-funksie

VRAAG

1. Teken die volgende funksies op dieselfde stel asse vir $-180° \leq \theta \leq 180°$.
   a) $y_1 = \tan\theta$
   b) $y_2 = \tan\frac{3\theta}{2}$
2. Bepaal die volgende vir elke funksie:
   - Periode
   - Gebied en terrein
   - x- en y-afsnitte
   - Asimptote

OPLOSSING

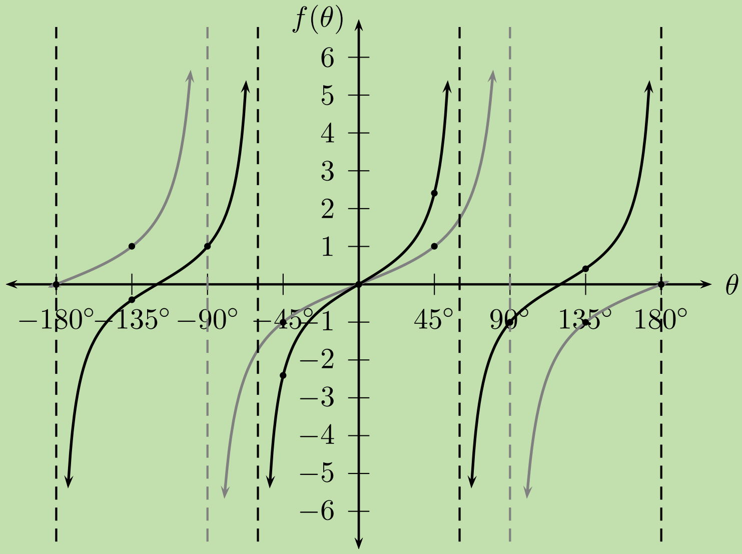
Stap 1: Bestudeer die vergelykings van die vorm $y = \tan k\theta$

Let daarop dat $k > 1$ vir $y_2 = \tan\frac{3\theta}{2}$, daarom verminder die periode van die grafiek.

Stap 2: Voltooi 'n waardetabel

θ	$-180°$	$-135°$	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$
$\tan\theta$	0	1	ONGDF	-1	0	1	ONGDF	-1	0
$\tan\frac{3\theta}{2}$	ONGDF	$-0{,}41$	1	$-2{,}41$	0	$2{,}41$	-1	$0{,}41$	ONGDF

Stap 3: Skets die tangensfunksie



Stap 4: Voltooi die tabel

	$y_1 = \tan\theta$	$y_2 = \tan\frac{3\theta}{2}$
periode	$180°$	$120°$
gebied	$\{\theta : -180° \leq \theta \leq 180°, \theta \neq -90°; 90°\}$	$\{\theta : -180° < \theta < 180°, \theta \neq -60°; 60°\}$
terrein	$\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$	$\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$
y-afsnit(te)	$(0°; 0)$	$(0°; 0)$
x-afsnit(te)	$(-180°; 0)$, $(0°; 0)$ en $(180°; 0)$	$(-120°; 0)$, $(0°; 0)$ en $(120°; 0)$
asimptote	$\theta = -90°$ en $\theta = 90°$	$\theta = -180°$; $-60°$ en $180°$

Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(\theta) = y = \tan k\theta$:

Gebied en terrein

Die gebied van een vertakking is $\{\theta : -\frac{90°}{k} < \theta < \frac{90°}{k}, \theta \in \mathbb{R}\}$ omdat $f(\theta)$ ongedefinëer is vir $\theta = -\frac{90°}{k}$ en $\theta = \frac{90°}{k}$.

Die terrein is $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$ of $(-\infty; \infty)$.

Afsnitte

Die x-afsnitte word bepaal deur $f(\theta) = 0$ te stel en θ op te los.

Die y-afsnit word bepaal deur $\theta = 0$ te stel en $f(\theta)$ te bereken.

$$\begin{aligned} y &= \tan k\theta \\ &= \tan 0° \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0°; 0)$.

Asimptote

Hierdie is die waarde van $k\theta$ waarvoor $\tan k\theta$ ongedefiniëerd is.

Oefening 5 – 29: Tangensfunksies van die vorm $y = \tan k\theta$

Skets die volgende funksies vir $-180° \leq \theta \leq 180°$. Vir elke grafiek bepaal:

- Periode
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Asimptote

1. $f(\theta) = \tan 2\theta$
2. $g(\theta) = \tan \frac{3\theta}{4}$
3. $h(\theta) = \tan(-2\theta)$
4. $k(\theta) = \tan \frac{2\theta}{3}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 2668   2. 2669   3. 266B   4. 266C

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

Ons kyk nou na die tangensfunksies van die vorm $y = \tan(\theta + p)$ en die effek van die parameter p.

Ondersoek: Die effek van p op 'n tangens-grafiek.

1. Op dieselfde assestelsel teken die volgende grafieke vir $-360° \leq \theta \leq 360°$:

   a) $y_1 = \tan\theta$

   b) $y_2 = \tan(\theta - 60°)$

   c) $y_3 = \tan(\theta - 90°)$

   d) $y_4 = \tan(\theta + 60°)$

   e) $y_5 = \tan(\theta + 180°)$

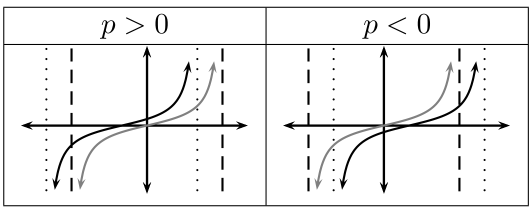
2. Gebruik jou grafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi:

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
periode					
gebied					
terrein					
y-afsnit(te)					
x-afsnit(te)					
asimptote					
effek van p					

Die uitwerking van die parameter op $y = \tan(\theta + p)$

Die effek van p op die tangensfunksie is 'n horisontale verskuiwing (of faseverskuiwing); die hele grafiek skuif na links of na regs.

- Vir $p > 0$, skuif die grafiek van die tangensfunksie na links met p grade.
- Vir $p < 0$, skuif die grafiek van die tangensfunksie na regs met p grade.



Uitgewerkte voorbeeld 27: Tangensfunksie

VRAAG

1. Teken die volgende funksies op dieselfde stel asse vir $-180° \leq \theta \leq 180°$.
   a) $y_1 = \tan\theta$
   b) $y_2 = \tan(\theta + 30°)$
2. Bepaal die volgende vir elke funksie:
   - Periode
   - Gebied en terrein
   - x- en y-afsnitte
   - Asimptote

OPLOSSING

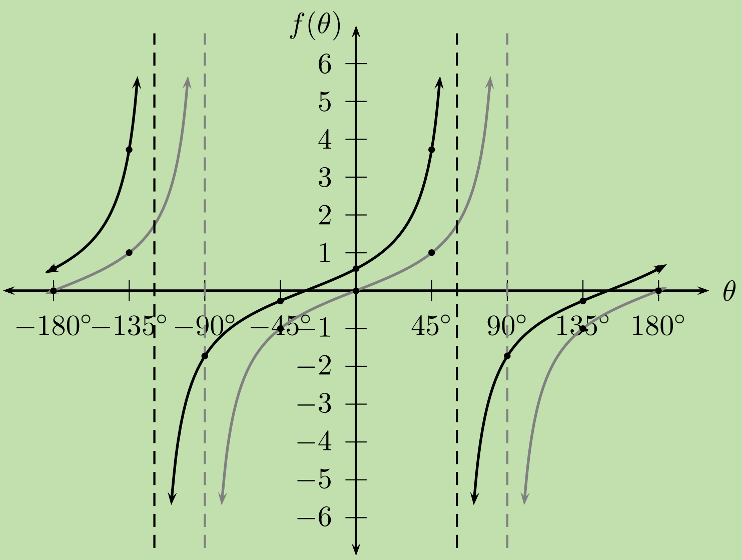
Stap 1: Bestudeer die vergelykings van die vorm $y = \tan(\theta + p)$

Let op dat vir $y_1 = \tan\theta$ het ons $p = 0°$ (geen faseverskuiwing) en vir $y_2 = \tan(\theta+30°)$ het ons $p = 30° > 0$ en dus skuif die grafiek met $30°$ na links.

Stap 2: Voltooi 'n waardetabel

θ	$-180°$	$-135°$	$-90°$	$-45°$	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$
$\tan\theta$	0	1	ONGDF	-1	0	1	ONGDF	-1	0
$\tan(\theta+30°)$	$0{,}58$	$3{,}73$	$-1{,}73$	$-0{,}27$	$0{,}58$	$3{,}73$	$-1{,}73$	$-0{,}27$	$0{,}58$

Stap 3: Skets die tangensfunksie



Stap 4: Voltooi die tabel

	$y_1 = \tan\theta$	$y_2 = \tan(\theta + \mathbf{30}°)$
periode	$180°$	$180°$
gebied	$\{\theta : -180° \leq \theta \leq 180°, \theta \neq -90°; 90°\}$	$\{\theta : -180° \leq \theta \leq 180°, \theta \neq -120°; 60°\}$
terrein	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
y-afsnit(te)	$(0°; 0)$	$(0°; 0{,}58)$
x-afsnit(te)	$(-180°; 0)$, $(0°; 0)$ en $(180°; 0)$	$(-30°; 0)$ en $(150°; 0)$
asimptote	$\theta = -90°$ en $\theta = 90°$	$\theta = -120°$ en $\theta = 60°$

Ontdek die eienskappe

Vir funksies van die algemene vorm: $f(\theta) = y = \tan(\theta + p)$:

Gebied en terrein

Die gebied van een tak is $\{\theta : \theta \in (-90^\circ - p; 90^\circ - p)\}$ omdat die funksie ongedefiniëerd is vir $\theta = -90^\circ - p$ en $\theta = 90^\circ - p$.

Die terrein is $\{f(\theta) : f(\theta) \in \mathbb{R}\}$.

Afsnitte

Die x-afsnitte word bepaal deur $f(\theta) = 0$ te stel en θ op te los.

Die y-afsnit word bepaal deur $\theta = 0^\circ$ te stel en $f(\theta)$ te bereken.

$$\begin{aligned} y &= \tan(\theta + p) \\ &= \tan(0^\circ + p) \\ &= \tan p \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0^\circ; \tan p)$.

Oefening 5 – 30: Tangensfunksies van die vorm $y = \tan(\theta + p)$

Teken die volgende funksies vir $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Vir elke grafiek bepaal:

- Periode
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Asimptote

1. $f(\theta) = \tan(\theta + 45^\circ)$
2. $g(\theta) = \tan(\theta - 30^\circ)$
3. $h(\theta) = \tan(\theta + 60^\circ)$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 266D 2. 266F 3. 266G

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 28: Skets 'n tangensfunksie

VRAAG

Teken die grafiek van $f(\theta) = \tan \frac{1}{2}(\theta - 30°)$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$.

OPLOSSING

Stap 1: Ondersoek die vorm van die vergelyking

Vanuit die vergelyking kan ons sien dat $0 < k < 1$, dus sal die takke van die grafiek minder steil wees as die standaard tangensgrafiek $y = \tan \theta$. Ons let ook op dat $p < 0$, en dus sal die grafiek na regs skuif op die x-as.

Stap 2: Bepaal die periode

Die periode van $f(\theta) = \tan \frac{1}{2}(\theta - 30°)$ is:

$$\begin{aligned} \text{Period} &= \frac{180°}{|k|} \\ &= \frac{180°}{\frac{1}{2}} \\ &= 360° \end{aligned}$$

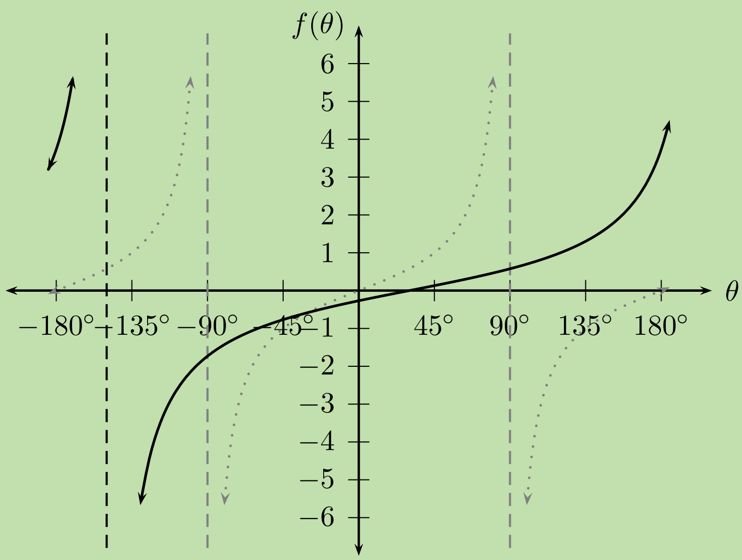
Stap 3: Bepaal die asimptote

Die standaard tangensgrafiek, $y = \tan \theta$, vir $-180° \leq \theta \leq 180°$ is ongedefiniëerd by $\theta = -90°$ en $\theta = 90°$. Dus kan ons die asimptote van $f(\theta) = \tan \frac{1}{2}(\theta - 30°)$ bepaal:

- $\frac{-90°}{0{,}5} + 30° = -150°$
- $\frac{90°}{0{,}5} + 30° = 210°$

Die asimptote by $\theta = 210°$ lê buite die gevraagde interval.

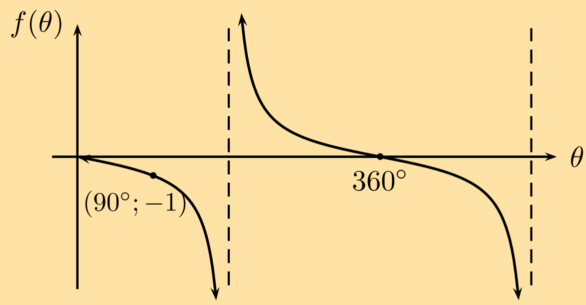
Stap 4: Stip die punte uit en verbind met 'n gladde kromme



Periode: $360°$
Gebied: $\{\theta : -180° \leq \theta \leq 180°, \theta \neq -150°\}$
Terrein: $(-\infty; \infty)$
y-afsnit: $(0°; -0{,}27)$
x-afsnitte: $(30°; 0)$
Asimptote: $\theta = -150°$

Oefening 5 – 31: Die tangensfunksie

1. Teken die volgende grafieke op verskillende asse:
   a) $y = \tan\theta - 1$ vir $-90° \leq \theta \leq 90°$
   b) $f(\theta) = -\tan 2\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 90°$
   c) $y = \frac{1}{2}\tan(\theta + 45°)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$
   d) $y = \tan(30° - \theta)$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$
2. Gegewe die grafiek van $y = a\tan k\theta$, bepaal die waardes van a en k.



Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

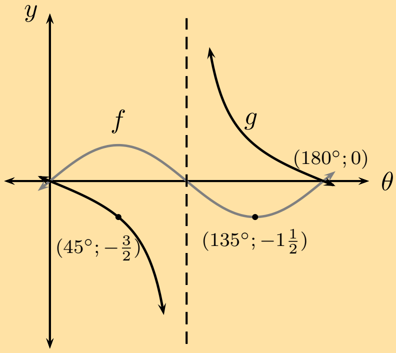
1a. 266H 1b. 266J 1c. 266K 1d. 266M 2. 266N

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

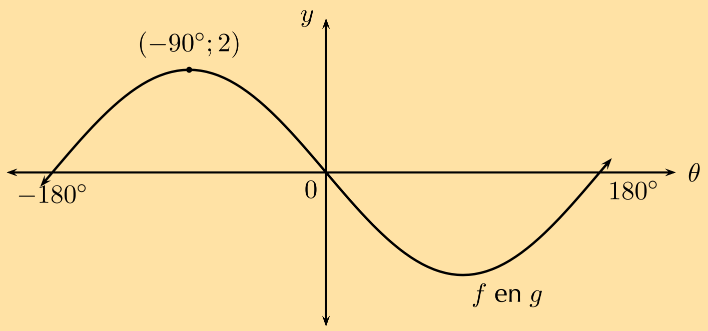
Oefening 5 – 32: Gemengde oefeninge

1. Bepaal die vergelyking vir elk van die volgende:

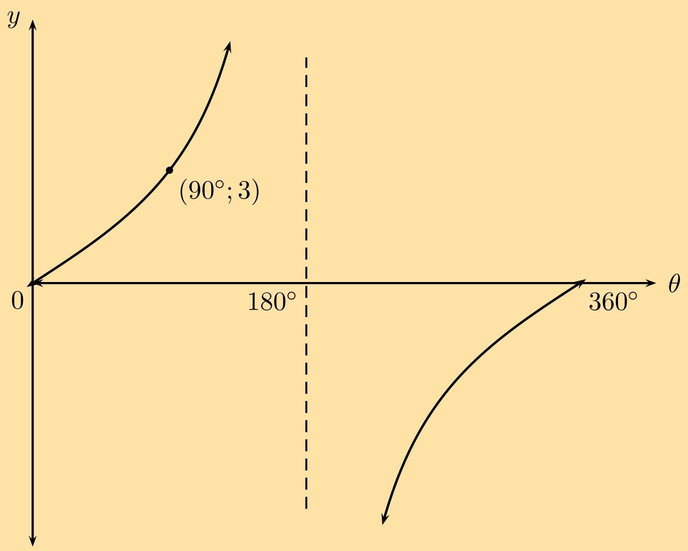
   a) $f(\theta) = a \sin k\theta$ en $g(\theta) = a \tan \theta$



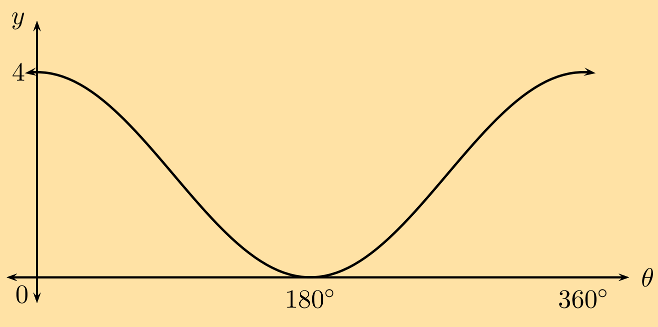
   b) $f(\theta) = a \sin k\theta$ en $g(\theta) = a \cos(\theta + p)$



   c) $y = a \tan k\theta$



   d) $y = a \cos \theta + q$



2. Gegewe die funksies $f(\theta) = 2\sin\theta$ en $g(\theta) = \cos\theta + 1$:

   a) Skets die grafieke van beide funksies op dieselfde assestelsel, vir $0° \leq \theta \leq 360°$. Dui die draaipunte en afsnitte op die diagram aan.

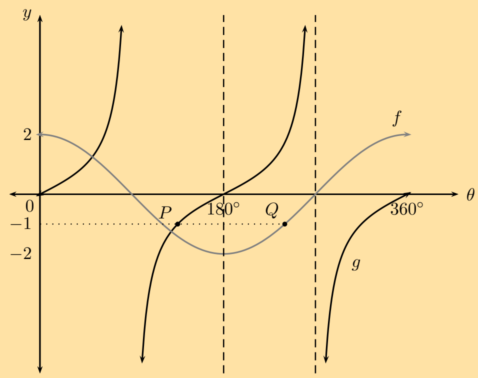
   b) Wat is die periode van f?

   c) Wat is die amplitude van g?

   d) Gebruik jou skets om te bepaal hoeveel oplossings daar is vir die vergelyking $2\sin\theta - \cos\theta = 1$. Gee een van die oplossings.

   e) Dui op jou skets aan waar op die grafiek die oplossing vir $2\sin\theta = -1$ gevind kan word.

3. Die skets toon twee funksies $f(\theta) = a\cos\theta$ en $g(\theta) = \tan\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$. Punte $P(135°; b)$ en $Q(c; -1)$ lê op $g(\theta)$ en $f(\theta)$, respektiewelik.



   a) Bepaal die waardes van a, b en c.

   b) Wat is die periode van g?

   c) Los die vergelyking $\cos\theta = \frac{1}{2}$ grafies op en dui jou antwoord(e) op die diagram aan.

   d) Bepaal die vergelyking van die nuwe grafiek as g gereflekteer word rondom die x-as en na regs geskuif word met $45°$.

4. Skets die grafieke van $y_1 = -\frac{1}{2}\sin(\theta + 30°)$ en $y_2 = \cos(\theta - 60°)$, op dieselfde assestelsel vir $0° \leq \theta \leq 360°$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 266P 1b. 266Q 1c. 266R 1d. 266S 2. 266T 3. 266V 4. 266W

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

5.8 Opsomming EME4F

Sien aanbieding: 266X op www.everythingmaths.co.za

1. Paraboliese funksies:

   Standaardvorm: $y = ax^2 + bx + c$

   - y-afsnitte: $(0; c)$
   - x-afsnitte: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
   - Draaipunt: $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$
   - As van simmetrie: $x = -\frac{b}{2a}$

   Voltooide vierkant vorm: $y = a(x + p)^2 + q$

   - Draaipunt: $(-p; q)$
   - $p > 0$: horisontale verskuiwing na links
   - $p < 0$: horisontale verskuiwing na regs
   - $q > 0$: vertikale verskuiwing opwaarts
   - $q < 0$: vertikale verskuiwing afwaarts

2. Gemiddelde gradiënt:

   - Gemiddelde gradiënt $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

3. Hiperboliese funksies

   Standaardvorm: $y = \frac{k}{x}$

   - $k > 0$: eerste en derde kwadrant
   - $k < 0$: tweede en vierde kwadrant

   Geskuifde vorm: $y = \frac{k}{x+p} + q$

   - $p > 0$: horisontale verskuiwing na links
   - $p < 0$: horisontale verskuiwing na regs
   - $q > 0$: vertikale verskuiwing opwaarts
   - $q < 0$: vertikale verskuiwing afwaarts
   - Asimptote: $x = -p$ en $y = q$

4. Eksponensiële funksies

   Standaardvorm: $y = ab^x$

   - $a > 0$: bo x-as
   - $a < 0$: onder x-as
   - $b > 1$: toenemende funksie as $a > 0$; afnemende funksie as $a < 0$
   - $0 < b < 1$: afnemende funksie as $a > 0$; toenemende funksie as $a < 0$

   Geskuifde vorm: $y = ab^{(x+p)} + q$

   - $p > 0$: horisontale verskuiwing na links
   - $p < 0$: horisontale verskuiwing na regs

- $q > 0$: vertikale verskuiwing opwaarts
- $q < 0$: vertikale verskuiwing afwaarts
- Asimptoot: $y = q$

5. Sinusfunksies:

   Geskuifde vorm: $y = a\sin(k\theta + p) + q$

   - Periode $= \frac{360°}{|k|}$
   - $k > 1$ of $k < -1$: periode neem af
   - $0 < k < 1$ of $-1 < k < 0$: periode neem toe
   - $p > 0$: horisontale verskuiwing na links
   - $p < 0$: horisontale verskuiwing na regs
   - $q > 0$: vertikale verskuiwing opwaarts
   - $q < 0$: vertikale verskuiwing afwaarts
   - $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

6. Kosinusfunksies:

   Geskuifde vorm: $y = a\cos(k\theta + p) + q$

   - Periode $= \frac{360°}{|k|}$
   - $k > 1$ of $k < -1$: periode neem af
   - $0 < k < 1$ of $-1 < k < 0$: periode neem toe
   - $p > 0$: horisontale verskuiwing na links
   - $p < 0$: horisontale verskuiwing na regs
   - $q > 0$: vertikale verskuiwing opwaarts
   - $q < 0$: vertikale verskuiwing afwaarts
   - $\cos(-\theta) = \cos\theta$

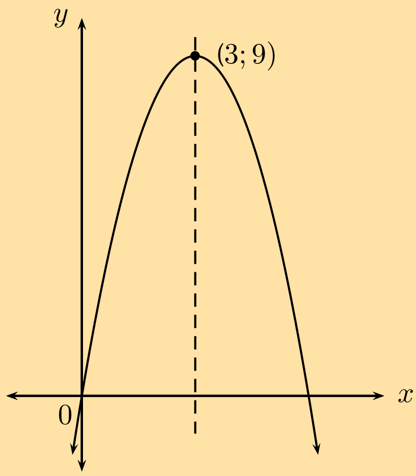
7. Tangensfunksies:

   Geskuifde vorm: $y = a\tan(k\theta + p) + q$

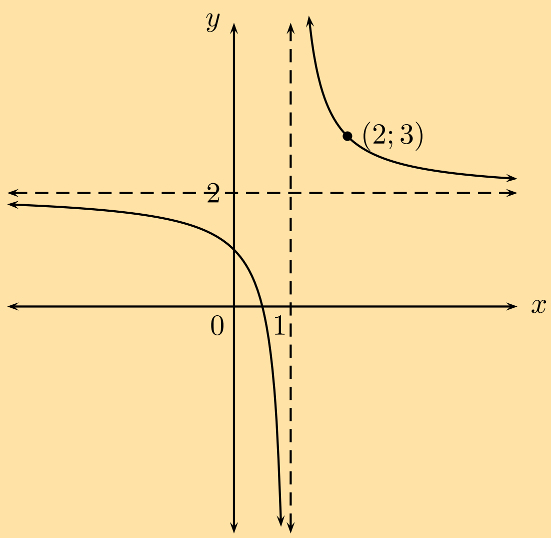
   - Periode $= \frac{180°}{|k|}$
   - $k > 1$ of $k < -1$: periode neem af
   - $0 < k < 1$ of $-1 < k < 0$: periode neem toe
   - $p > 0$: horisontale verskuiwing na links
   - $p < 0$: horisontale verskuiwing na regs
   - $q > 0$: vertikale verskuiwing opwaarts
   - $q < 0$: vertikale verskuiwing afwaarts
   - $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
   - Asimptote: $\frac{90°-p}{k} \pm \frac{180°n}{k}$, $n \in \mathbb{Z}$

Oefening 5 – 33: Einde van hoofstuk oefeninge

1. Wys dat as $a < 0$, dan is die waardeversameling (terrein) van $f(x) = a(x+p)^2 + q$ $\{f(x) : f(x) \in (-\infty, q]\}$.
2. As $(2;7)$ die draaipunt is van $f(x) = -2x^2 - 4ax + k$, vind die waardes van die konstantes a en k.
3. Die volgende grafiek word deur die vergelyking $f(x) = ax^2 + bx$ voorgestel. Die koördinate van die draaipunt is $(3;9)$. Toon dat $a = -1$ en $b = 6$.



4. Gegewe: $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Gee die vergelyking van die nuwe grafiek wat ontstaan wanneer:
   a) die grafiek van f drie eenhede na links geskuif word.
   b) die x-as drie eenhede na onder geskuif word.
5. 'n Parabool met draaipunt $(-1;-4)$ word vertikaal met 4 eenhede opwaarts geskuif. Wat is die koördinate van die draaipunt van die verskuifde parabool?
6. Trek die grafiek van die hiperbool gedefineer deur $y = \frac{2}{x}$ vir $-4 \leq x \leq 4$. Veronderstel die hiperbool word met 3 eenhede na regs en 1 eenhede af geskuif. Wat is dan die nuwe vergelyking?
7. Gebaseer op die grafiek van $y = \frac{k}{(x+p)} + q$, bepaal die vergelyking van die grafiek met asimptote $y = 2$ en $x = 1$ en wat deur die punt $(2;3)$ gaan.



8. Die kolomme in die tabel hieronder gee die y-waardes van die volgende funksies: $y = a^x$, $y = a^{x+1}$ en $y = a^x + 1$. Pas elke funksie by die korrekte kolom.

x	A	B	C
-2	$7{,}25$	$6{,}25$	$2{,}5$
-1	$3{,}5$	$2{,}5$	1
0	2	1	$0{,}4$
1	$1{,}4$	$0{,}4$	$0{,}16$
2	$1{,}16$	$0{,}16$	$0{,}064$

9. Die grafiek van $f(x) = 1 + a \,.\, 2^x$ (a is 'n konstante) gaan deur die oorsprong.

   a) Bepaal die waarde van a.

   b) Bepaal die waardes van $f(-15)$ korrek tot vyf desimale plekke.

   c) Bepaal die waarde van x, as $P\,(x; 0{,}5)$ op die grafiek van f lê.

   d) As die grafiek van f 2 eenhede na regs geskuif word om die funksie h te gee, skryf die vergelyking van h neer.

10. Die grafiek van $f(x) = a \,.\, b^x$ ($a \neq 0$) het die punt $P\,(2; 144)$ op f.

   a) As $b = 0{,}75$, bereken die waaarde van a.

   b) Skryf dus die vergelyking van f neer.

   c) Bepaal, korrek tot twee desimale plekke, die waarde van $f(13)$.

   d) Beskryf die transformasie van die kurwe van f na h as $h(x) = f(-x)$.

11. Deur gebruik te maak van jou kennis van die effekte van p en k, teken rowwe skets van die volgende grafieke sonder om 'n tabel van waardes te gebruik.

   a) $y = \sin 3\theta$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$

   b) $y = -\cos 2\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 180°$

   c) $y = \tan \frac{1}{2}\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

   d) $y = \sin(\theta - 45°)$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$

   e) $y = \cos(\theta + 45°)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

   f) $y = \tan(\theta - 45°)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

   g) $y = 2\sin 2\theta$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$

   h) $y = \sin(\theta + 30°) + 1$ vir $-360° \leq \theta \leq 0°$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 266Y	2. 266Z	3. 2672	4. 2673	5. 2674	6. 2675
7. 2676	8. 2677	9. 2678	10. 2679	11a. 267B	11b. 267C
11c. 267D	11d. 267F	11e. 267G	11f. 267H	11g. 267J	11h. 267K

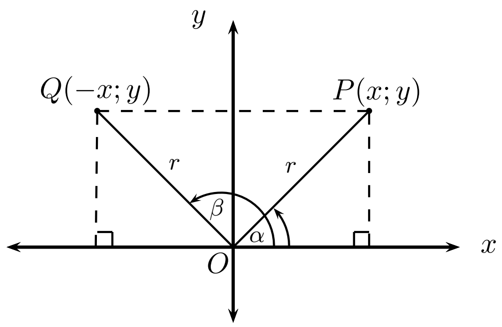
www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 6

Trigonometrie

6.1 Hersiening EME4G

Trigonometriese verhoudings



Ons stip die punte $P(x;y)$ en $Q(-x;y)$ in die Cartesiese vlak en meet die hoeke vanaf die positiewe x-as tot by die terminaallyne (OP en OQ).

$P(x;y)$ lê in die eerste kwadrant met $P\hat{O}X = \alpha$ en $Q(-x;y)$ lê in die tweede kwadrant met $Q\hat{O}X = \beta$.

Deur die stelling van Pythagoras te gebruik, sien ons dat

$$\begin{aligned} OP^2 &= x^2 + y^2 \\ \text{En } OQ^2 &= (-x)^2 + y^2 \\ &= x^2 + y^2 \\ \therefore OP &= OQ \end{aligned}$$

Laat $OP = OQ = r$.

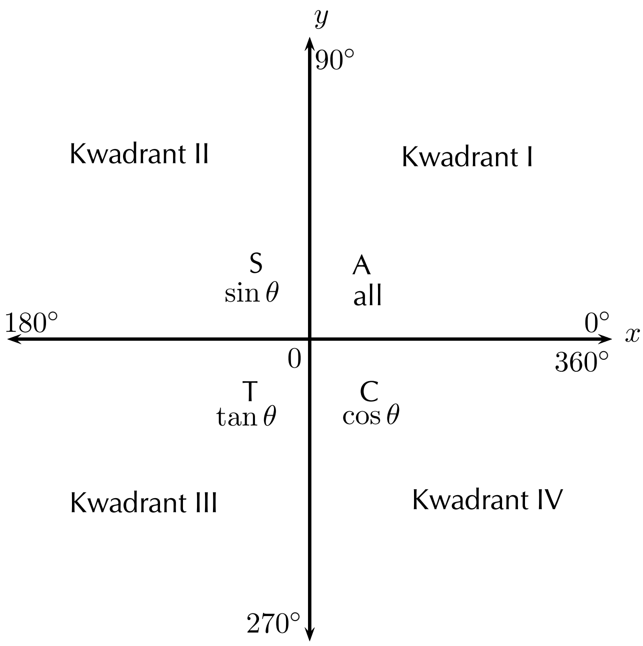
Trigonometriese verhoudings

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{y}{r} \\ \cos\alpha &= \frac{x}{r} \\ \tan\alpha &= \frac{y}{x} \end{aligned}$$

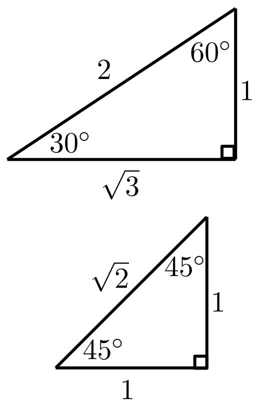
In die tweede kwadrant sien ons dat $-x < 0$

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{y}{r} \\ \cos\beta &= -\frac{x}{r} \\ \tan\beta &= -\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Soortgelyk is die tekens van die trigonometriese verhoudings in die derde en vierde kwadrante afhanklik van die tekens van x en y:



Spesiale hoeke



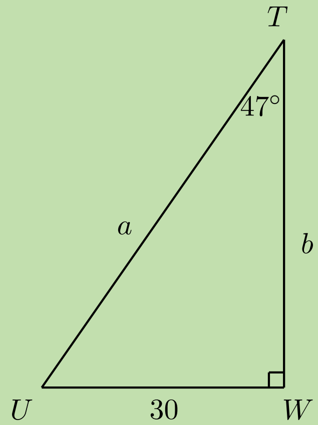
θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ongedef

Sien video: 267M op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Oplos van vergelykings

VRAAG

Bepaal die waardes van a en b in die reghoekige driehoek TUW (korrek tot een desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en die skuinssy

Stap 2: Bepaal die waarde van a

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \\ \sin 47° &= \frac{30}{a} \\ a &= \frac{30}{\sin 47°} \\ \therefore a &= 41{,}0 \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal die waarde van b

Probeer altyd om die inligting te gebruik wat gegee is en nie die antwoorde wat jyself uitgewerk het nie, ingeval jy 'n fout gemaak het. Byvoorbeeld, vermy dit om $a = 41{,}0$ te gebruik om die waarde van b te bepaal.

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}} \\ \tan 47° &= \frac{30}{b} \\ b &= \frac{30}{\tan 47°} \\ \therefore b &= 28{,}0 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

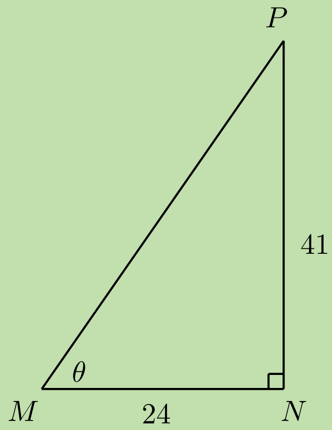
$a = 41{,}0$ eenhede en $b = 28{,}0$ eenhede.

Vind 'n hoek

Uitgewerkte voorbeeld 2: Vind 'n hoek

VRAAG

Bereken die waarde van θ in die reghoekige driehoek MNP (korrek tot een desimale plek):



OPLOSSING

Stap 1: Identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en die skuinssy

Stap 2: Bepaal die waarde van θ

$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}\\
\tan\theta &= \frac{41}{24}\\
\therefore \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{41}{24}\right)\\
\theta &= 59{,}7^\circ
\end{aligned}
$$

Uitgewerkte voorbeeld 3: Vind 'n hoek

VRAAG

Gegee $2\sin\frac{\theta}{2} = \cos 43°$, vir $\theta \in [0°; 90°]$. Bepaal die waarde van θ (korrek tot een desimale plek).

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig die vergelyking

Moenie berekenings afrond totdat jy die finale antwoord bepaal het nie. In die berekening hieronder, dui die dotjies aan dat die getal nie afgerond is nie, sodat die antwoord so akkuraat as moontlik sal wees.

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{\theta}{2} &= \cos 43° \\ \sin\frac{\theta}{2} &= \frac{\cos 43°}{2} \\ \frac{\theta}{2} &= \sin^{-1}(0{,}365\ldots) \\ \theta &= 2(21{,}449\ldots) \\ \therefore \theta &= 42{,}9° \end{aligned}$$

Tweedimensionele probleme

Uitgewerkte voorbeeld 4: Vlieg 'n vlieër

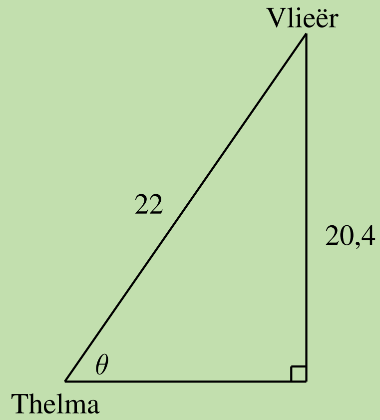
VRAAG

Thelma vlieg 'n vlieër aan 'n 22 m stuk tou en die hoogte van die vlieër bo die grond is $20{,}4$ m. Bepaal die hoogtehoek van die tou (korrek tot een desimale plek).

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets en identifiseer die teenoorstaande en aangrensende sye en die skuinssy

Laat die hoogtehoek van die tou θ wees.



Stap 2: Gebruik die toepaslike trigonometriese verhouding om θ te vind

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{skuinssy}} \\ &= \frac{20{,}4}{22} \\ \theta &= \sin^{-1}(0{,}927\ldots) \\ \therefore \theta &= 68{,}0^\circ \end{aligned}$$

Oefening 6 – 1: Hersiening

1. As $p = 49^\circ$ en $q = 32^\circ$, gebruik 'n sakrekenaar bepaal of die volgende bewerings waar of vals is:

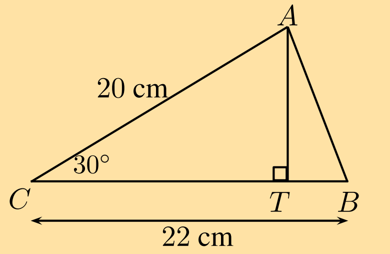
   a) $\sin p + 3\sin p = 4\sin p$
   b) $\frac{\sin q}{\cos q} = \tan q$
   c) $\cos(p - q) = \cos p - \cos q$
   d) $\sin(2p) = 2\sin p\cos p$

2. Bepaal die grootte van die volgende hoeke (korrek tot een desimale plek):

   a) $\cos\alpha = 0{,}64$
   b) $\sin\theta + 2 = 2{,}65$
   c) $\frac{1}{2}\cos 2\beta = 0{,}3$
   d) $\tan\frac{\theta}{3} = \sin 48^\circ$
   e) $\cos 3p = 1{,}03$
   f) $2\sin 3\beta + 1 = 2{,}6$
   g) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 4\frac{2}{3}$

3. In $\triangle ABC$, $A\hat{C}B = 30^\circ$, $AC = 20$ cm en $BC = 22$ cm. Die loodregte lyn vanaf A sny BC by T.

Bepaal:



a) die lengte van TC

b) die lengte van AT

c) die hoek $B\hat{A}T$

4. 'n Rombus het 'n omtrek van 40 cm en een van die binnehoeke is $30°$.

   a) Bepaal die lengte van die sye.

   b) Bepaal die lengtes van die diagonale.

   c) Bereken die area van die rombus.

5. Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

   a) $2\sin 45° \times 2\cos 45°$

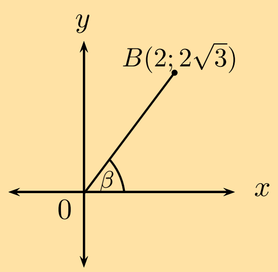
   b) $\cos^2 30° - \sin^2 60°$

   c) $\sin 60° \cos 30° - \cos 60° \sin 30° - \tan 45°$

   d) $4\sin 60° \cos 30° - 2\tan 45° + \tan 60° - 2\sin 60°$

   e) $\sin 60° \times \sqrt{2\tan 45° + 1} - \sin 30°$

6. Gegee die diagram hieronder:



   Bepaal die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

   a) β

   b) $\cos\beta$

   c) $\cos^2\beta + \sin^2\beta$

7. Die 10 m leer van 'n brandweerwa leun teen die muur van 'n brandende gebou teen 'n hoek van $60°$. 'n Oop venster in die gebou is 9 m van die grond af. Sal die leer tot by die venster kom?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 267N	2a. 267P	2b. 267Q	2c. 267R	2d. 267S	2e. 267T
2f. 267V	2g. 267W	3. 267X	4. 267Y	5a. 267Z	5b. 2682
5c. 2683	5d. 2684	5e. 2685	6. 2686	7. 2687	

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

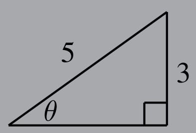
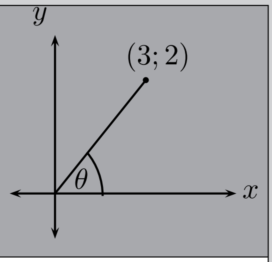
6.2 Trigonometriese identiteite EME4H

'n Identiteit is 'n wiskundige vergelyking wat waar is vir alle waardes van die veranderlikes. Trigonometriese identiteite stel ons in staat om 'n gegewe uitdrukking so te vereenvoudig dat dit slegs sinus- en kosinusverhoudings bevat. Dit maak dit moontlik om vergelykings op te los en om ander identiteite te bewys.

Kwosiënt-identiteit

Ondersoek: Kwosiënt-identiteit

1. Voltooi die tabel sonder om 'n sakrekenaar te gebruik en los jou antwoord in wortelvorm waar van toepassing:

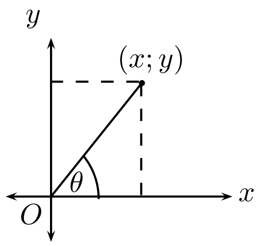
	$\theta = 45°$		
$\sin\theta$			
$\cos\theta$			
$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$			
$\tan\theta$			

2. Ondersoek die laaste twee rye van die tabel en vorm 'n vermoede.
3. Is daar enige waardes van θ waarvoor jou vermoede nie geldig sal wees nie? Verduidelik jou antwoord.

Ons weet dat $\tan\theta$ gedefiniëer is as:

$$\tan\theta = \frac{\text{teenoorstaande sy}}{\text{aangrensende sy}}$$

Gebruik die diagram hieronder asook die stelling van Pythagoras, en skryf die tangensfunksie in terme van x, y en r:

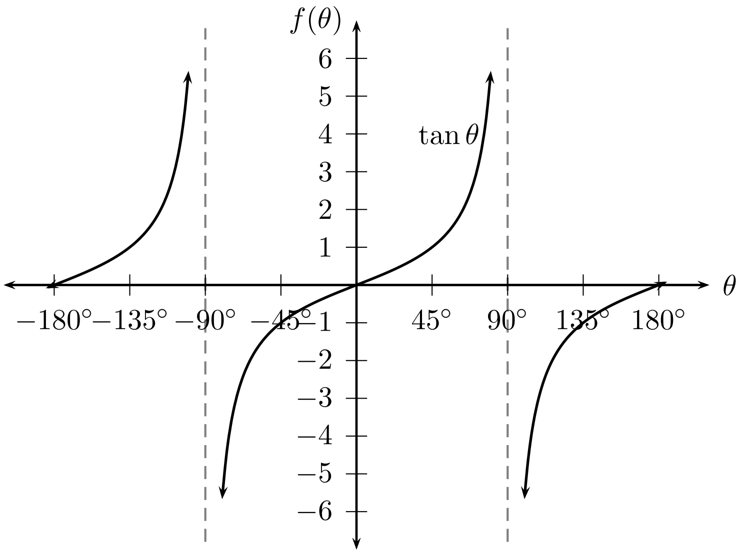


$$
\begin{aligned}
\tan\theta &= \frac{y}{x} \\
&= \frac{y}{x} \times \frac{r}{r} \\
&= \frac{y}{r} \times \frac{r}{x} \\
&= \frac{y}{r} \div \frac{x}{r} \\
&= \sin\theta \div \cos\theta \\
&= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}
\end{aligned}
$$

Hierdie is die kwosiënt-identiteit:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Let daarop dat $\tan\theta$ ongedefiniëerd is as $\cos\theta = 0$, dus $\theta \neq k \times 90°$, waar k 'n onewe heelgetal is.



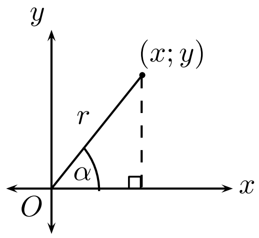
Vierkant-identiteit

Ondersoek: Vierkant-identiteit

1. Gebruik 'n sakrekenaar om die volgende tabel te voltooi:

$\sin^2 80° + \cos^2 80° =$	
$\cos^2 23° + \sin^2 23° =$	
$\sin 50° + \cos 50° =$	
$\sin^2 67° - \cos^2 67° =$	
$\sin^2 67° + \cos^2 67° =$	

2. Wat let jy op? Formuleer 'n vermoede.
3. Teken 'n skets en bewys jou vermoede in algemene terme: gebruik x, y en r.



Deur die stelling van Pythagoras te gebruik, kan ons die sinus- en kosinusfunksies skryf in terme van x, y en r:

$$\begin{aligned}\sin^2\theta + \cos^2\theta &= \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 \\ &= \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} \\ &= \frac{y^2 + x^2}{r^2} \\ &= \frac{r^2}{r^2} \\ &= 1\end{aligned}$$

Hierdie is die vierkant-identiteit:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Ander vorme van die vierkant-identiteit

Voltooi die volgende:

1. $\sin^2\theta = 1 - \ldots\ldots$
2. $\cos\theta = \pm\sqrt{\ldots\ldots}$
3. $\sin^2\theta = (1 + \ldots\ldots)(1 - \ldots\ldots)$
4. $\cos^2\theta - 1 = \ldots\ldots$

Hier is 'n paar handige wenke vir die bewys van identiteite:

- Verander alle trigonometriese verhoudings na sinus en kosinus.
- Kies een kant van die vergelyking om te vereenvoudig en toon aan dat dit gelyk is aan die ander kant.
- Gewoonlik is dit beter om die meer komplekse kant te kies en dit te vereenvoudig.
- Soms is dit nodig om beide kante te vereenvoudig, om te wys dat hulle gelyk is.
- 'n Vierkantswortel of 'n kwadraat dui gewoonlik aan dat die vierkant-identiteit gebruik moet word.
- Ons kan ook byvoegings maak tot die uitdrukking om vereenvoudiging makliker te maak:
  - vervang 1 met $\sin^2\theta + \cos^2\theta$.
  - vermenigvuldig met 1 in die vorm van 'n geskikte breuk, bv. $\dfrac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$.

Sien video: 2688 op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 5: Trigonometriese identiteite

VRAAG

Vereenvoudig die volgende:

1. $\tan^2\theta \times \cos^2\theta$
2. $\dfrac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta$

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die uitdrukking in terme van sinus en kosinus alleenlik

Ons gebruik die vierkant- en kwosiënt-identiteite om die uitdrukking te skryf in terme van sinus en kosinus en vereenvoudig dan so ver as moontlik.

1.

$$\begin{aligned}
\tan^2\theta \times \cos^2\theta &= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 \times \cos^2\theta \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \times \cos^2\theta \\
&= \sin^2\theta
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta &= \frac{1}{\cos^2\theta} - \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 6: Trigonometriese identiteite

VRAAG

Bewys: $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

OPLOSSING

Stap 1: Let op beperkings

Wanneer ons met breuke werk, moet ons versigtig wees dat die noemer nie gelyk aan 0 kan wees nie. Dus $\cos\theta \neq 0$ vir die breuk aan die linkerkant en $\sin\theta + 1 \neq 0$ vir die breuk aan die regterkant.

Stap 2: Vereenvoudig die linkerkant

Hierdie is nie 'n vergelyking wat opgelos moet word nie. Ons moet aantoon dat die uitdrukking aan die een kant van die gelykaanteken gelyk is aan die uitdrukking aan die ander kant.

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ &= \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{1+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} \end{aligned}$$

Let daarop dat niks verander het aan die vergelyking nie: hierdie stap is dieselfde as om te vermenigvuldig met 1 aangesien die teller en die noemer dieselfde is.

Stap 3: Bepaal die kleinste gemene noemer en vereenvoudig

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} \\ &= \frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} \\ &= \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} \\ &= \text{RK} \end{aligned}$$

Oefening 6 – 2: Trigonometriese identiteite

1. Vereenvoudig elk van die volgende tot een trigonometriese verhouding:

   a) $\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$

   b) $\cos^2\theta\tan^2\theta+\tan^2\theta\sin^2\theta$

   c) $1-\sin\theta\cos\theta\tan\theta$

   d) $\left(\dfrac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}\right)-\tan^2\beta$

2. Bewys die volgende identiteite en noem die ontoelaatbare waardes of beperkings waar van toepassing:

   a) $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

   b) $\sin^2\alpha+(\cos\alpha-\tan\alpha)(\cos\alpha+\tan\alpha)=1-\tan^2\alpha$

   c) $\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta\tan^2\theta}{1}=\cos\theta$

   d) $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta-\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

   e) $\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}+\tan\beta\right)\cos\beta=\dfrac{1}{\sin\beta}$

   f) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

   g) $\dfrac{(1+\tan^2\alpha)\cos\alpha}{(1-\tan\alpha)}=\dfrac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2689 1b. 268B 1c. 268C 1d. 268D 2a. 268F 2b. 268G
2c. 268H 2d. 268J 2e. 268K 2f. 268M 2g. 268N

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.3 Reduksieformules EME4J

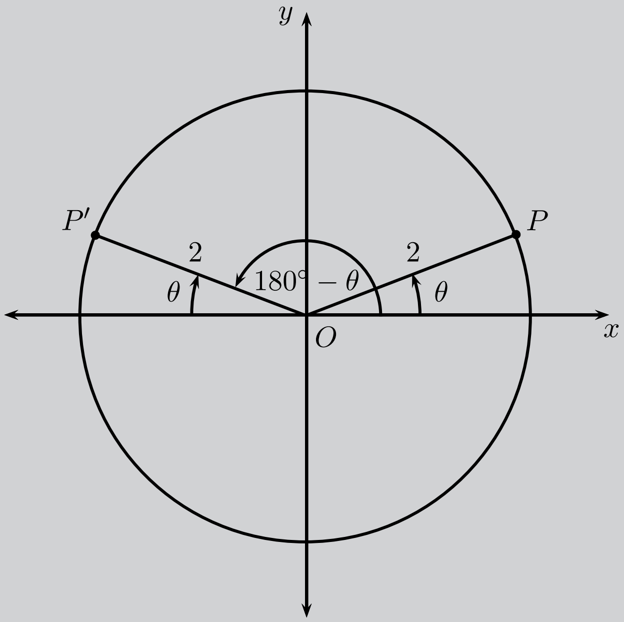
Enige trigonometriese funksie met 'n argument in die vorm van $90^\circ \pm \theta$; $180^\circ \pm \theta$ en $360^\circ \pm \theta$ kan eenvoudiger uitgedruk word in terme van θ.

Afleiding van reduksieformules EME4K

Ondersoek: Reduksieformules vir funksiewaardes van $180^\circ \pm \theta$

1. **Funksiewaardes van $180^\circ - \theta$**

   In die figuur lê $P(\sqrt{3}; 1)$ en P' op die sirkel met radius 2. OP maak 'n hoek van $\theta = 30^\circ$ met die x-as.



   a) As punte P en P' simmetries is ten opsigte van die y-as, bepaal die koördinate van P'.

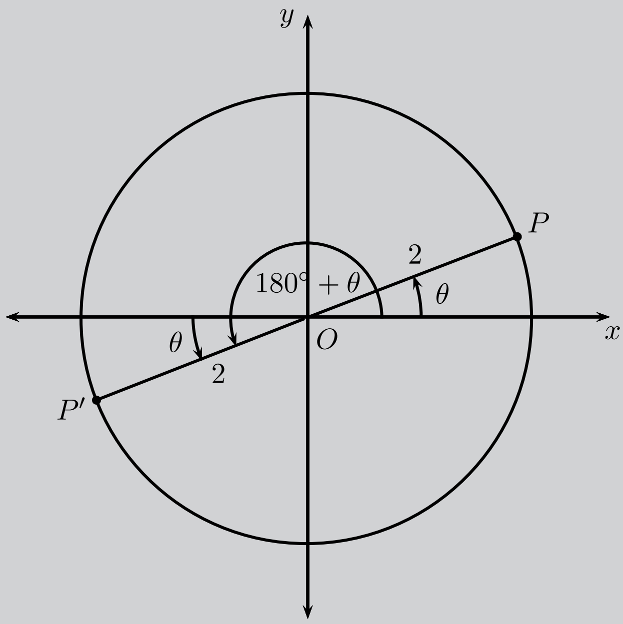
   b) Skryf waardes neer vir $\sin\theta$, $\cos\theta$ en $\tan\theta$.

   c) Gebruik die koördinate vir P' om $\sin(180^\circ - \theta)$, $\cos(180^\circ - \theta)$, $\tan(180^\circ - \theta)$ te bepaal.

   d) Vanaf jou resultate bepaal 'n verwantskap tussen die trigonometriese funksiewaardes van $(180^\circ - \theta)$ en θ.

2. **Funksiewaardes van 180$^\circ + \theta$**

   In die figuur lê $P(\sqrt{3}; 1)$ en P' op die sirkel met radius 2. OP maak 'n hoek $\theta = 30^\circ$ met die x-as.



   a) As punte P en P' simmetries is rondom die oorsprong (die punte is simmetries rondom beide die x-as en die y-as), bepaal die koördinate van P'.

   b) Gebruik die koördinate vir P' om $\sin(180^\circ + \theta)$, $\cos(180^\circ + \theta)$ en $\tan(180^\circ + \theta)$ te bepaal.

   c) Vanaf jou resultate bepaal 'n verwantskap tussen die trigonometriese funksiewaardes van $(180^\circ + \theta)$ en θ.

3. Voltooi die volgende reduksieformules:

   a) $\sin(180^\circ - \theta) = \ldots\ldots$

   b) $\cos(180^\circ - \theta) = \ldots\ldots$

   c) $\tan(180^\circ - \theta) = \ldots\ldots$

   d) $\sin(180^\circ + \theta) = \ldots\ldots$

   e) $\cos(180^\circ + \theta) = \ldots\ldots$

   f) $\tan(180^\circ + \theta) = \ldots\ldots$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Reduksieformules vir funksiewaardes van $180^\circ \pm \theta$

VRAAG

Skryf die volgende as 'n enkele trigonometriese verhouding:

$$\frac{\sin 163^\circ}{\cos 197^\circ} + \tan 17^\circ + \cos(180^\circ - \theta) \times \tan(180^\circ + \theta)$$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik reduksieformules om die trigonometriese funksiewaardes uit te druk in terme van skerphoeke en θ

$$= \frac{\sin(180^\circ - 17^\circ)}{\cos(180^\circ + 17^\circ)} + \tan 17^\circ + (-\cos\theta) \times \tan\theta$$

Stap 2: Vereenvoudig

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin 17^\circ}{-\cos 17^\circ} + \tan 17^\circ - \cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
&= -\tan 17^\circ + \tan 17^\circ - \sin\theta \\
&= -\sin\theta
\end{aligned}$$

Oefening 6 – 3: Reduksieformules vir funksiewaardes van $180^\circ \pm \theta$

1. Bepaal die waardes van die volgende uitdrukkings sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

   a) $\tan 150^\circ \sin 30^\circ - \cos 210^\circ$

   b) $(1 + \cos 120^\circ)(1 - \sin^2 240^\circ)$

   c) $\cos^2 140^\circ + \sin^2 220^\circ$

2. Skryf die volgende in terme van 'n enkele trigonometriese verhouding:

   a) $\tan(180^\circ - \theta) \times \sin(180^\circ + \theta)$

   b) $\dfrac{\tan(180^\circ + \theta)\cos(180^\circ - \theta)}{\sin(180^\circ - \theta)}$

3. As $t = \tan 40°$, druk die volgende uit in term van t:

   a) $\tan 140° + 3 \tan 220°$

   b) $\dfrac{\cos 220°}{\sin 140°}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 268P 1b. 268Q 1c. 268R 2a. 268S 2b. 268T 3. 268V

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

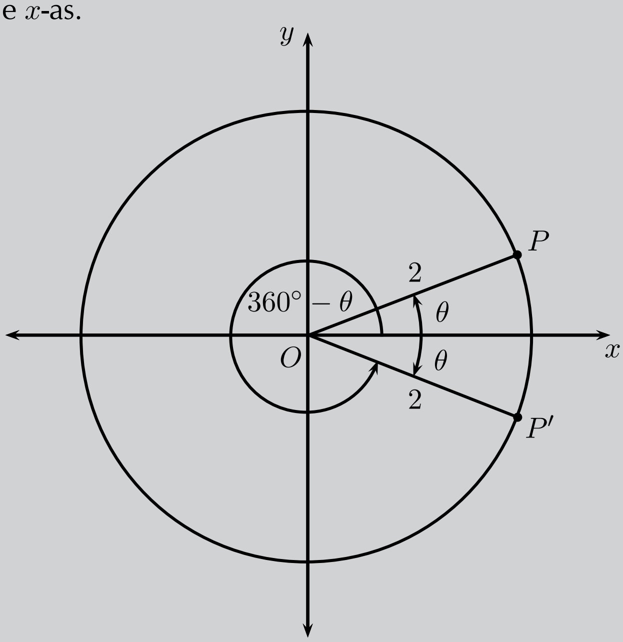
Ondersoek: Reduksieformules vir funksiewaardes van (360° $\pm \theta$) en $(-\theta)$

1. **Funksiewaardes van (360° $- \theta$) en $(-\theta)$**

   In die Cartesiese vlak meet ons die hoeke vanaf die positiewe x-as tot by die terminaallyn, wat beteken dat 'n anti-kloksgewyse rotasie 'n positiewe hoek gee. Ons kan gevolglik negatiewe hoeke meet deur in 'n kloksgewyse rigting te roteer.

   Vir 'n skerphoek θ, weet ons dat $-\theta$ in die vierde kwadrant sal lê.

   In die figuur lê $P(\sqrt{3}; 1)$ en P' op die sirkel met radius 2. OP maak 'n hoek $\theta = 30°$ met die x-as.



   a) As punte P en P' simmetries is rondom die x-as ($y = 0$), bepaal die koördinate van P'.

   b) Gebruik die koördinate van P' om $\sin(360° - \theta)$, $\cos(360° - \theta)$ en $\tan(360° - \theta)$ te bepaal.

   c) Gebruik die koördinate van P' om $\sin(-\theta)$, $\cos(-\theta)$ en $\tan(-\theta)$ te bepaal.

   d) Gebruik jou resultate om die verwantskap te bepaal tussen die funksiewaardes van $(360° - \theta)$ en $-\theta$.

e) Voltooi die volgende reduksieformules:

i. $\sin(360° - \theta) = \ldots\ldots$
ii. $\cos(360° - \theta) = \ldots\ldots$
iii. $\tan(360° - \theta) = \ldots\ldots$
iv. $\sin(-\theta) = \ldots\ldots$
v. $\cos(-\theta) = \ldots\ldots$
vi. $\tan(-\theta) = \ldots\ldots$

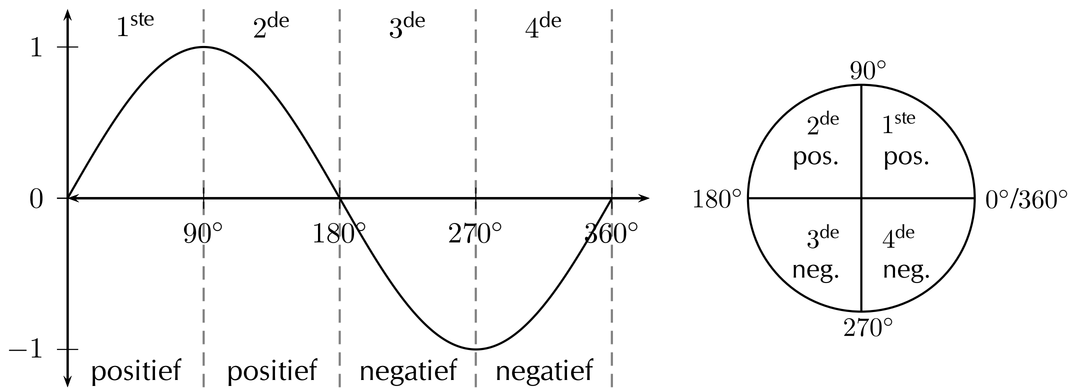
2. **Funksiewaardes van $360° + \theta$**

Ons kan ook hoeke kry wat groter is as $360°$. Die hoek voltooi 'n rotasie van $360°$ en draai dan verder om 'n hoek van θ te gee.

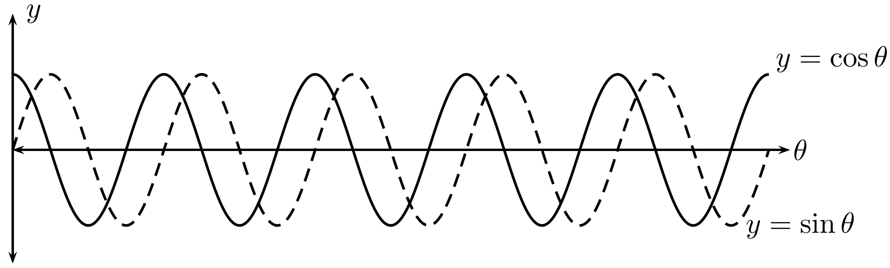
Voltooi die volgende reduksieformules:

a) $\sin(360° + \theta) = \ldots\ldots$
b) $\cos(360° + \theta) = \ldots\ldots$
c) $\tan(360° + \theta) = \ldots\ldots$

Uit ons werk met funksies, weet ons dat die grafiek van $y = \sin\theta$ 'n periode van $360°$ het. Dus, een volledige golf van die sinuskurwe is dieselfde as een volledige revolusie vir $\sin\theta$ in die Cartesiese vlak.



Daar kan veelvuldige revolusies wees. Die periodisiteit van die trigonometriese grafiek toon dit duidelik. 'n Volledige sinus- of kosinuskromme word voltooi in $360°$.



As k enige heelgetal is, dan

$$\sin(k\ .\ 360° + \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(k\ .\ 360° + \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(k\ .\ 360° + \theta) = \tan\theta$$

Uitgewerkte voorbeeld 8: Reduksieformules vir funksiewaardes van 360° $\pm\,\theta$

VRAAG

As $f = \tan 67°$, druk die volgende uit in terme van f

$$\frac{\sin 293°}{\cos 427°} + \tan(-67°) + \tan 1147°$$

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik reduksieformules

$$= \frac{\sin(360° - 67°)}{\cos(360° + 67°)} - \tan(67°) + \tan\left(3(360°) + 67°\right)$$

$$= \frac{-\sin 67°}{\cos 67°} - \tan 67° + \tan 67°$$

$$= -\tan 67°$$

$$= -f$$

Uitgewerkte voorbeeld 9: Gebruik reduksieformules

VRAAG

Evalueer sonder 'n sakrekenaar:

$$\tan^2 210° - (1 + \cos 120°)\sin^2 405°$$

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig die uitdrukking deur gebruik te maak van reduksieformules en spesiale hoeke

$$= \tan^2(180° + 30°) - (1 + \cos(180° - 60°)) \sin^2(360° + 45°)$$

$$= \tan^2 30° - (1 + (-\cos 60°)) \sin^2 45°$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

Oefening 6 – 4: Gebruik reduksieformules

1. Vereenvoudig die volgende:

   a) $\dfrac{\tan(180° - \theta)\sin(360° + \theta)}{\cos(180° + \theta)\tan(360° - \theta)}$

   b) $\cos^2(360° + \theta) + \cos(180° + \theta)\tan(360° - \theta)\sin(360° + \theta)$

   c) $\dfrac{\sin(360° + \alpha)\tan(180° + \alpha)}{\cos(360° - \alpha)\tan^2(360° + \alpha)}$

2. Skryf die volgende in terme van $\cos\beta$:
   $\dfrac{\cos(360° - \beta)\cos(-\beta) - 1}{\sin(360° + \beta)\tan(360° - \beta)}$

3. Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

   a) $\dfrac{\cos 300° \tan 150°}{\sin 225° \cos(-45°)}$

   b) $3\tan 405° + 2\tan 330° \cos 750°$

   c) $\dfrac{\cos 315° \cos 405° + \sin 45° \sin 135°}{\sin 750°}$

   d) $\tan 150° \cos 390° - 2\sin 510°$

   e) $\dfrac{2\sin 120° + 3\cos 765° - 2\sin 240° - 3\cos 45°}{5\sin 300° + 3\tan 225° - 6\cos 60°}$

4. Gegee dat $90° < \alpha < 180°$, gebruik 'n skets om te help verduidelik waarom:

   a) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

   b) $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$

5. As $t = \sin 43°$, druk die volgende uit in term van t:
   a) $\sin 317°$
   b) $\cos^2 403°$
   c) $\tan(-43°)$

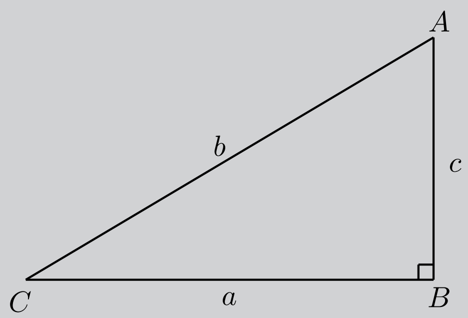
Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 268W	1b. 268X	1c. 268Y	2. 268Z	3a. 2692	3b. 2693
3c. 2694	3d. 2695	3e. 2696	4. 2697	5. 2698	

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Reduksieformules vir funksiewaardes van $90° \pm \theta$

In enige reghoekige driehoek is die twee skerphoeke komplemente van mekaar, $\hat{A} + \hat{C} = 90°$



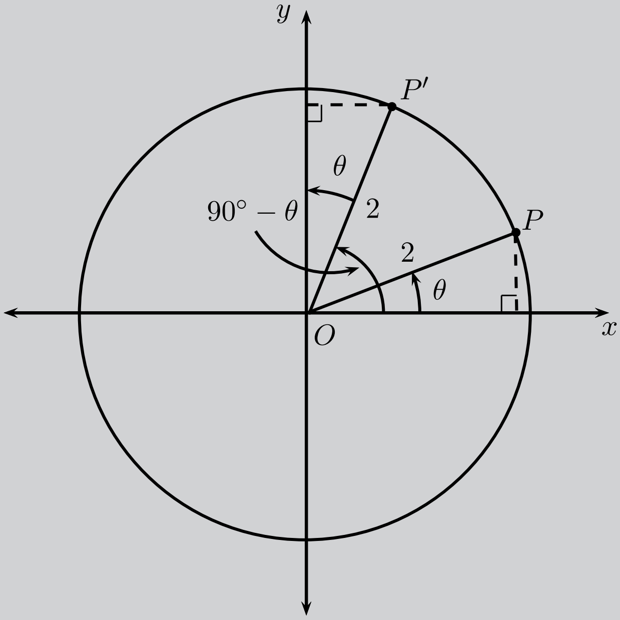
Voltooi:

In $\triangle ABC$:

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{b} = \cos \ldots$$
$$\cos \hat{C} = \frac{a}{b} = \sin \ldots$$

Komplementêre hoeke is positiewe skerphoeke waarvan die som $90°$ is. Byvoorbeeld, $20°$ en $70°$ is komplementêre hoeke.

In die figuur is $P(\sqrt{3};1)$ en P' op die sirkel met radius 2. OP maak 'n hoek $\theta = 30°$ met die x-as.



1. **Funksiewaardes van 90°** $- \theta$

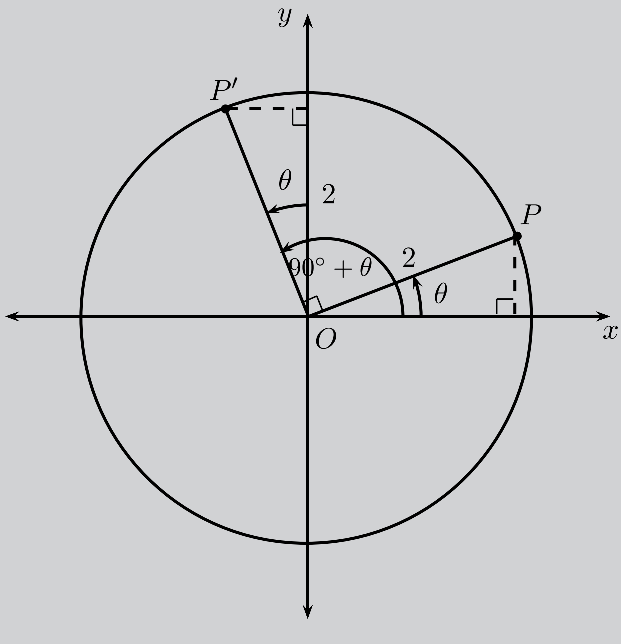
   a) As punte P en P' simmetries is rondom die lyn $y = x$, bepaal die koördinate van P'.

   b) Gebruik die koördinate van P' om $\sin(90° - \theta)$ en $\cos(90° - \theta)$ te bepaal.

   c) Vanaf jou resultate bepaal 'n verwantskap tussen die funksiewaardes van $(90° - \theta)$ en θ.

2. **Funksiewaardes van 90°** $+ \theta$

   In die figuur lê $P(\sqrt{3};1)$ en P' op die sirkel met radius 2. OP maak 'n hoek $\theta = 30°$ met die x-as.



a) As punt P roteer deur $90°$ om punt P' te gee, bepaal die koördinate van P'.

b) Gebruik die koördinate van P' om $\sin(90° + \theta)$ en $\cos(90° + \theta)$ te bepaal.

c) Vanaf jou resultate bepaal 'n verwantskap tussen die funksiewaardes van $(90° + \theta)$ en θ.

3. Voltooi die volgende reduksieformules:

a) $\sin(90° - \theta) = \ldots\ldots$

b) $\cos(90° - \theta) = \ldots\ldots$

c) $\sin(90° + \theta) = \ldots\ldots$

d) $\cos(90° + \theta) = \ldots\ldots$

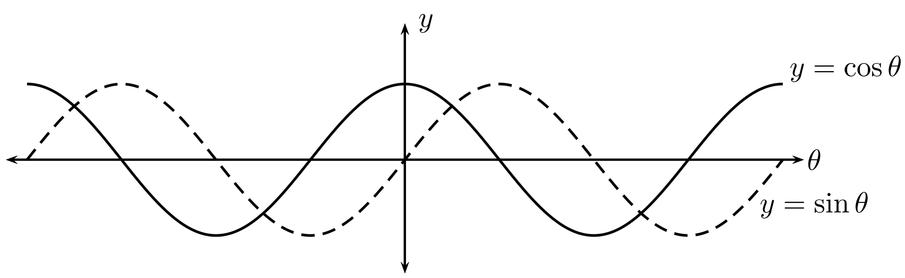
Sinus en kosinus is bekend as **ko-funksies**. Twee funksies word ko-funksies genoem as $f(A) = g(B)$ waar $A + B = 90°$ (d.w.s., A en B is komplementêre hoeke).

Die funksiewaarde van 'n hoek is gelyk aan die ko-funksiewaarde van die komplementêre hoek.

Dus, vir sinus en kosinus het ons

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$$

Die sinus- en kosinusgrafieke illustreer dit duidelik: die twee grafieke is identies behalwe vir 'n faseverskil van $90°$.



Uitgewerkte voorbeeld 10: Gebruik die ko-funksiereël

VRAAG

Skryf elk van die volgende in terme van $\sin 40°$:

1. $\cos 50°$
2. $\sin 320°$
3. $\cos 230°$
4. $\cos 130°$

OPLOSSING

1. $\cos 50° = \sin(90° - 50°) = \sin 40°$
2. $\sin 320° = \sin(360° - 40°) = -\sin 40°$
3. $\cos 230° = \cos(180° + 50°) = -\cos 50° = -\cos(90° - 40°) = -\sin 40°$
4. $\cos 130° = \cos(90° + 40°) = -\sin 40°$

Funksiewaardes van $\theta - 90°$

Ons kan $\sin(\theta - 90°)$ skryf as

$$\begin{aligned} \sin(\theta - 90°) &= \sin\left[-(90° - \theta)\right] \\ &= -\sin(90° - \theta) \\ &= -\cos\theta \end{aligned}$$

Soortgelyk, kan ons wys dat $\cos(\theta - 90°) = \sin\theta$.

Dus, $\sin(\theta - 90°) = -\cos\theta$ en $\cos(\theta - 90°) = \sin\theta$.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Ko-funksies

VRAAG

Druk die volgende uit in terme van t as $t = \sin\theta$:

$$\frac{\cos(\theta - 90°)\cos(720° + \theta)\tan(\theta - 360°)}{\sin^2(\theta + 360°)\cos(\theta + 90°)}$$

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig die uitdrukking met die gebruik van reduksieformules en ko-funksies

Gebruik die CAST diagram om te kontroleer in watter kwadrante die trigonometriese verhoudings positief of negatief is.

$$\frac{\cos(\theta - 90°)\cos(720° + \theta)\tan(\theta - 360°)}{\sin^2(\theta + 360°)\cos(\theta + 90°)}$$

$$= \frac{\cos[-(90° - \theta)]\cos[2(360°) + \theta]\tan[-(360° - \theta)]}{\sin^2(360° + \theta)\cos(90° + \theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta\cos\theta\tan\theta}{\sin^2\theta(-\sin\theta)}$$

$$= -\frac{\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}{\sin^2\theta}$$

$$= -\frac{1}{\sin\theta}$$

$$= -\frac{1}{t}$$

Oefening 6 – 5: Ko-funksies

1. Vereenvoudig die volgende:

   a) $\dfrac{\cos(90° + \theta)\sin(\theta + 90°)}{\sin(-\theta)}$

   b) $\dfrac{2\sin(90° - x) + \sin(90° + x)}{\sin(90° - x) + \cos(180° + x)}$

2. Gegee $\cos 36° = p$, druk die volgende uit in terme van p:

   a) $\sin 54°$
   b) $\sin 36°$
   c) $\tan 126°$
   d) $\cos 324°$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 2699 1b. 269B 2. 269C

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Reduksieformules en ko-funksies:

1. Die reduksieformules geld vir enige hoek θ. Gerieflikheidshalwe neem ons aan θ is 'n skerphoek ($0° < \theta < 90°$).
2. Wanneer ons funksiewaardes van $(180° \pm \theta)$, $(360° \pm \theta)$ en $(-\theta)$ bepaal, verander die funksie nie.
3. Wanneer ons funksiewaardes van $(90° \pm \theta)$ en $(\theta \pm 90°)$ bepaal, verander die funksie na die ooreenstemmende ko-funksie.

tweede kwadrant $(\mathbf{180°} - \theta)$ **of** $(\mathbf{90°} + \theta)$	**eerste kwadrant** (θ) **of** $(\mathbf{90°} - \theta)$
$\sin(180° - \theta) = +\sin\theta$	alle trigonometriese funksies is positief
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\sin(360° + \theta) = \sin\theta$
$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$	$\cos(360° + \theta) = \cos\theta$
$\sin(90° + \theta) = +\cos\theta$	$\tan(360° + \theta) = \tan\theta$
$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
	$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
derde kwadrant $(\mathbf{180°} + \theta)$	**vierde kwadrant** $(\mathbf{360°} - \theta)$
$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$
$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(360° - \theta) = +\cos\theta$
$\tan(180° + \theta) = +\tan\theta$	$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$

Oefening 6 – 6: Reduksieformules

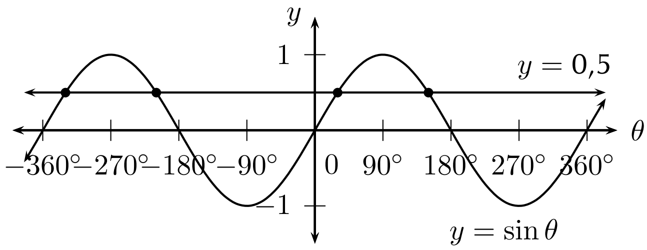
1. Skryf A en B elk as 'n enkele trigonometriese verhouding:
   a) $A = \sin(360° - \theta)\cos(180° - \theta)\tan(360° + \theta)$
   b) $B = \dfrac{\cos(360° + \theta)\cos(-\theta)\sin(-\theta)}{\cos(90° + \theta)}$
   c) Bepaal vervolgens:
      i. $A + B = \ldots$
      ii. $\frac{A}{B} = \ldots$
2. Skryf die volgende as 'n funksie van 'n skerphoek:
   a) $\sin 163°$
   b) $\cos 327°$
   c) $\tan 248°$
   d) $\cos(-213°)$
3. Bepaal die waarde van die volgende, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:
   a) $\dfrac{\sin(-30°)}{\tan(150°)} + \cos 330°$
   b) $\tan 300° \cos 120°$
   c) $(1 - \cos 30°)(1 - \cos 210°)$
   d) $\cos 780° - (\sin 315°)(\cos 405°)$
4. Bewys dat die volgende identiteit waar is en meld enige beperkings:
   $$\frac{\sin(180° + \alpha)\tan(360° + \alpha)\cos\alpha}{\cos(90° - \alpha)} = \sin\alpha$$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 269D 2a. 269F 2b. 269G 2c. 269H 2d. 269J 3a. 269K
3b. 269M 3c. 269N 3d. 269P 4. 269Q

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Die oplos van trigonometriese vergelykings vereis dat ons die waardes van die hoeke kry wat die vergelykings bevredig. As 'n interval vir die oplossing gespesifiseer word, hoef ons slegs die waardes van die hoek te kry wat die vergelyking waar maak en wat binne die interval val. As geen interval gespesifiseer word nie, beteken dit dat die algemene oplossing gevind moet word. Die periodiese aard van die trigonometriese funksie beteken dat daar baie waardes is wat die gegewe vergelyking bevredig, soos aangetoon in die onderstaande diagram.



Uitgewerkte voorbeeld 12: Oplos van trigonometriese vergelykings

VRAAG

Los op vir θ (korrek tot een desimale plek), gegee $\tan\theta = 5$ en $\theta \in [0°; 360°]$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik 'n sakrekenaar om op te los vir θ

$$\begin{aligned} \tan\theta &= 5 \\ \therefore \theta &= \tan^{-1} 5 \\ &= 78{,}7° \end{aligned}$$

Hierdie waarde van θ is 'n skerphoek wat in die eerste kwadrant lê en die verwysingshoek genoem word.

Stap 2: Gebruik die CAST diagram om te kontroleer in watter kwadrante $\tan\theta$ positief is

Die CAST diagram dui aan dat $\tan\theta$ positief is in die eerste en derde kwadrante, daarom moet ons die waarde van θ bepaal sodat $180° < \theta < 270°$.

Met die gebruik van reduksieformules, weet ons $\tan(180° + \theta) = \tan\theta$

$$\begin{aligned} \theta &= 180° + 78{,}7° \\ \therefore \theta &= 258{,}7° \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik 'n sakrekenaar om te kontroleer dat ons oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\theta = 78{,}7°$ of $\theta = 258{,}7°$.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Oplos van trigonometriese vergelykings

VRAAG

Los op vir α (korrek tot een desimale plek), as $\cos\alpha = -0{,}7$ en $\theta \in [0°; 360°]$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik 'n sakrekenaar om die verwysingshoek te vind

Ons gebruik nie die negatiewe teken om die verwysingshoek te vind nie. Die verwysingshoek moet 'n skerphoek wees in die eerste kwadrant waar al die trigonometriese funksies positief is.

$$\begin{aligned} \text{verw } \angle &= \cos^{-1} 0{,}7 \\ &= 45{,}6° \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die CAST diagram om te kontroleer in watter kwadrante $\cos\alpha$ negatief is

Die CAST diagram dui aan dat $\cos\alpha$ negatief is in die tweede en die derde kwadrante, daarom moet ons die waarde van α bepaal sodat $90° < \alpha < 270°$.

Deur reduksieformules te gebruik, weet ons $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ en $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

In die tweede kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° - 45{,}6° \\ &= 134{,}4° \end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° + 45{,}6° \\ &= 225{,}6° \end{aligned}$$

Note: Die verwysingshoek $(45{,}6°)$ vorm nie deel van die oplossing nie.

Stap 3: Gebruik 'n sakrekenaar om te kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\alpha = 134{,}4°$ of $\alpha = 225{,}6°$.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Oplos van trigonometriese vergelykings

VRAAG

Los op vir β (korrek tot een desimale plek), as $\sin\beta = -0{,}5$ en $\beta \in [-360°; 360°]$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik 'n sakrekenaar om die verwysingshoek te vind

Om die verwysingshoek te bepaal, gebruik ons 'n positiewe waarde.

$$\begin{aligned} \text{verw } \angle &= \sin^{-1} 0{,}5 \\ &= 30° \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die CAST diagram om te kontroleer in watter kwadrante $\sin\beta$ negatiewe is

Die CAST diagram dui aan dat $\sin\beta$ negatief is in die derde en vierde kwadrante. Ons moet ook die waardes vind van β sodat $-360° \leq \beta \leq 360°$.

Deur reduksieformules te gebruik, weet ons $\sin(180° + \beta) = -\sin\beta$ en $\sin(360° - \beta) = -\sin\beta$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned} \beta &= 180° + 30° \\ &= 210° \\ \text{of } \beta &= -180° + 30° \\ &= -150° \end{aligned}$$

In die vierde kwadrant:

$$\begin{aligned} \beta &= 360° - 30° \\ &= 330° \\ \text{of } \beta &= 0° - 30° \\ &= -30° \end{aligned}$$

Let op: Die verwysingshoek $(30°)$ vorm nie deel van die oplossing nie.

Stap 3: Gebruik 'n sakrekenaar om te kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\beta = -150°$, $-30°$, $210°$ of $330°$.

Oefening 6 – 7: Oplos van trigonometriese vergelykings

1. Bepaal die waardes van α vir $\alpha \in [0°; 360°]$ as:

   a) $4 \cos \alpha = 2$

   b) $\sin \alpha + 3{,}65 = 3$

   c) $\tan \alpha = 5\frac{1}{4}$

   d) $\cos \alpha + 0{,}939 = 0$

   e) $5 \sin \alpha = 3$

   f) $\frac{1}{2} \tan \alpha = -1{,}4$

2. Bepaal die waardes van θ vir $\theta \in [-360°; 360°]$ as:

   a) $\sin \theta = 0{,}6$

   b) $\cos \theta + \frac{3}{4} = 0$

   c) $3 \tan \theta = 20$

   d) $\sin \theta = \cos 180°$

   e) $2 \cos \theta = \frac{4}{5}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 269R 1b. 269S 1c. 269T 1d. 269V 1e. 269W 1f. 269X
2a. 269Y 2b. 269Z 2c. 26B2 2d. 26B3 2e. 26B4

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Die algemene oplossing EME4N

In die vorige uitgewerkte voorbeeld is die oplossing beperk tot 'n sekere interval. Die periodisiteit van die trigonometriese funksies beteken egter dat daar 'n oneindige aantal positiewe en negatiewe hoeke is wat die vergelyking bevredig. As ons nie die oplossing beperk nie, moet ons die algemene oplossing van die vergelyking vind. Ons weet die sinus- en kosinusfunksies het 'n periode van $360°$ en die tangensfunksie het 'n periode van $180°$.

Motode vir die vind van die algemene oplossing:

1. Bepaal die verwysingshoek (gebruik 'n positiewe waarde).

2. Gebruik die CAST diagram om te bepaal waar die funksie positief of negatief is (afhangende van die gegewe vergelyking).

3. Vind die hoeke wat die vergelyking bevredig in die interval $[0°; 360°]$ en tel veelvoude van die periode by elke antwoord.

4. Kontroleer antwoorde met 'n sakrekenaar.

Uitgewerkte voorbeeld 15: Vind die algemene oplossing

VRAAG

Bepaal die algemene oplossing vir $\sin\theta = 0{,}3$ (gee antwoorde tot een desimale plek).

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik 'n sakrekenaar om die verwysingshoek te vind

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 0{,}3 \\ \therefore \text{verw } \angle &= \sin^{-1} 0{,}3 \\ &= 17{,}5^\circ \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die CAST diagram om te bepaal in watter kwadrante $\sin\theta$ positief is

Die CAST diagram dui aan dat $\sin\theta$ positief is in die eerste en tweede kwadrante.

Deur reduksieformules te gebruik, weet ons dat $\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta$.

In die eerste kwadrant

$$\begin{aligned} \theta &= 17{,}5^\circ \\ \therefore \theta &= 17{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

In die tweede kwadrant:

$$\begin{aligned} \theta &= 180^\circ - 17{,}5^\circ \\ \therefore \theta &= 162{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ \end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Stap 3: Kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Ons kan willekeurige waardes vir k kies om te kontroleer dat die antwoorde die oorspronklike vergelyking bevredig.

Laat $k = 4$:

$$\begin{aligned} \theta &= 17{,}5^\circ + 4(360)^\circ \\ \therefore \theta &= 1457{,}5^\circ \\ \sin 1457{,}5^\circ &= 0{,}3007\ldots \end{aligned}$$

Die oplossing is korrek.

Soortgelyk, as ons stel $k = -2$:

$$\begin{aligned} \theta &= 162{,}5^\circ - 2(360)^\circ \\ \therefore \theta &= -557{,}5^\circ \\ \sin(-557{,}5^\circ) &= 0{,}3007\ldots \end{aligned}$$

Hierdie oplossing is ook korrek.

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\theta = 17{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ$ of $\theta = 162{,}5^\circ + k \cdot 360^\circ$.

Uitgewerkte voorbeeld 16: Vind die algemene oplossing

VRAAG

Bepaal die algemene oplossing vir $\cos 2\theta = -0{,}6427$ (gee antwoorde tot een desimale plek).

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik 'n sakrekenaar om die verwysingshoek te vind

$$\begin{aligned} \text{verw } \angle &= \sin^{-1} 0{,}6427 \\ &= 50{,}0^\circ \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik CAST diagram om te bepaal in watter kwadrante $\cos\theta$ negatief is

Die CAST diagram wys dat $\cos\theta$ negatief is in die tweede en derde kwadrante.

Dus gebruik ons die reduksieformules $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ en $\cos(180^\circ + \theta) = -\cos\theta$.

In die tweede kwadrant:

$$\begin{aligned} 2\theta &= 180^\circ - 50^\circ + k \,.\, 360^\circ \\ &= 130^\circ + k \,.\, 360^\circ \\ \therefore \theta &= 65^\circ + k \,.\, 180^\circ \end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned} 2\theta &= 180^\circ + 50^\circ + k \,.\, 360^\circ \\ &= 230^\circ + k \,.\, 360^\circ \\ \therefore \theta &= 115^\circ + k \,.\, 180^\circ \end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Onthou: om ook die periode (360°) te deel deur die koëffisiënt van θ.

Stap 3: Kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Ons kan willekeurige waardes vir k kies om te kontroleer dat die antwoorde die oorspronklike vergelyking bevredig.

Laat $k = 2$:

$$\begin{aligned} \theta &= 65^\circ + 2(180^\circ) \\ \therefore \theta &= 425^\circ \\ \cos 2(425)^\circ &= -0{,}6427\ldots \end{aligned}$$

Die oplossing is korrek.

Soortgelyk, as ons stel $k = -5$:

$$\theta = 115° - 5(180°)$$
$$\therefore \theta = -785°$$
$$\cos 2(-785°) = -0{,}6427\ldots$$

Hierdie oplossing is ook korrek.

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\theta = 65° + k\ .\ 180°$ of $\theta = 115° + k\ .\ 180°$.

Uitgewerkte voorbeeld 17: Vind die algemene oplossing

VRAAG

Bepaal die algemene oplossing vir $\tan(2\alpha - 10°) = 2{,}5$ en kry vervolgens die oplossing vir $-180° \leq \alpha \leq 180°$ (gee antwoorde korrek tot een desimale plek).

OPLOSSING

Stap 1: Doen 'n substitusie

Om hierdie vergelyking op te los, kan dit handig wees om 'n substitusie te doen: laat $x = 2\alpha - 10°$.

$$\tan(x) = 2{,}5$$

Stap 2: Gebruik 'n sakrekenaar om die verwysingshoek te vind

$$\tan x = 2{,}5$$
$$\therefore \text{verw } \angle = \tan^{-1} 2{,}5$$
$$= 68{,}2°$$

Stap 3: Gebruik die CAST diagram om te bepaal in watter kwadrante die tangensfunksie positief is

Ons sien dat $\tan x$ positief is in die eerste en derde kwadrante, dus gebruik ons die reduksieformule $\tan(180° + x) = \tan x$. Dit is ook belangrik om te onthou dat die periode van die tangensfunksie $180°$ is.

In die eerste kwadrant

$$\begin{aligned} x &= 68{,}2^\circ + k\ .\ 180^\circ \\ \text{Substitueer } x &= 2\alpha - 10^\circ \\ 2\alpha - 10^\circ &= 68{,}2^\circ + k\ .\ 180^\circ \\ 2\alpha &= 78{,}2^\circ + k\ .\ 180^\circ \\ \therefore \alpha &= 39{,}1^\circ + k\ .\ 90^\circ \end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned} x &= 180^\circ + 68{,}2^\circ + k\ .\ 180^\circ \\ &= 248{,}2^\circ + k\ .\ 180^\circ \\ \text{Vervang } x &= 2\alpha - 10^\circ \\ 2\alpha - 10^\circ &= 248{,}2^\circ + k\ .\ 180^\circ \\ 2\alpha &= 258{,}2^\circ + k\ .\ 180^\circ \\ \therefore \alpha &= 129{,}1^\circ + k\ .\ 90^\circ \end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Onthou: om die periode (180°) te deel deur die koëffisiënt van α.

Stap 4: Vind die antwoorde binne die gegewe interval

Substitueer geskikte waardes van k om die waardes van α te bepaal wat binne die interval lê ($-180^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$).

	I: $\alpha = 39{,}1^\circ + k\ .\ 90^\circ$		III: $\alpha = 129{,}1^\circ + k\ .\ 90^\circ$	
$k = 0$	$39{,}1^\circ$		$129{,}1^\circ$	
$k = 1$	$129{,}1^\circ$		$219{,}1^\circ$	(buite)
$k = 2$	$219{,}1^\circ$	(buite)		
$k = -1$	$-50{,}9^\circ$		$39{,}1^\circ$	
$k = -2$	$-140{,}9^\circ$		$-50{,}9^\circ$	
$k = -3$	$-230{,}9^\circ$	(buite)	$-140{,}9^\circ$	
$k = -4$			$-230{,}9^\circ$	(buite)

Let op hoe sommige van die waardes herhaal word as gevolg van die periodiese aard van die tangensfunksie. Daarom hoef ons slegs die oplossing te vind:

$$\alpha = 39{,}1^\circ + k\ .\ 90^\circ$$

vir $k \in \mathbb{Z}$.

Stap 5: Skryf die finale antwoord

$\alpha = -140{,}9^\circ; -50{,}9^\circ; 39{,}1^\circ$ of $129{,}1^\circ$.

Uitgewerkte voorbeeld 18: Vind die algemene oplossing deur ko-funksies te gebruik

VRAAG

Bepaal die algemene oplossing vir $\sin(\theta - 20°) = \cos 2\theta$.

OPLOSSING

Stap 1: Gebruik ko-funksies om die vergelyking te vereenvoudig

$$\begin{aligned}
\sin(\theta - 20°) &= \cos 2\theta \\
&= \sin(90° - 2\theta) \\
\therefore \theta - 20° &= 90° - 2\theta + k\ .\ 360°, \quad k \in \mathbb{Z} \\
3\theta &= 110° + k\ .\ 360° \\
\therefore \theta &= 36{,}7° + k\ .\ 120°
\end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die CAST diagram om die korrekte kwadrante te bepaal

Aangesien die oorspronklike vergelyking 'n sinus en kosinusfunksie gelykstel, moet ons werk in die kwadrant waar beide hierdie funksies dieselfde teken het, sodat die vergelyking waar bly. Ons vind dus die oplossing deur die eerste en derde kwadrante te gebruik.

In die eerste kwadrant: $\theta = 36{,}7° + k\ .\ 120°$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned}
3\theta &= 180° + 110° + k\ .\ 360° \\
&= 290° + k\ .\ 360° \\
\therefore \theta &= 96{,}6° + k\ .\ 120°
\end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Stap 3: Kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\theta = 36{,}7° + k\ .\ 120°$ of $\theta = 96{,}6° + k\ .\ 120°$.

Oefening 6 – 8: Algemene oplossing

1. - Vind die algemene oplossing vir elke vergelyking.
   - Vind vervolgens al die oplossings in die interval $[-180°; 180°]$.

   a) $\cos(\theta + 25°) = 0{,}231$
   b) $\sin 2\alpha = -0{,}327$
   c) $2\tan\beta = -2{,}68$
   d) $\cos\alpha = 1$
   e) $4\sin\theta = 0$
   f) $\cos\theta = -1$
   g) $\tan\frac{\theta}{2} = 0{,}9$
   h) $4\cos\theta + 3 = 1$
   i) $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Vind die algemene oplossing vir elke vergelyking.

   a) $\cos(\theta + 20°) = 0$
   b) $\sin 3\alpha = -1$
   c) $\tan 4\beta = 0{,}866$
   d) $\cos(\alpha - 25°) = 0{,}707$
   e) $2\sin\frac{3\theta}{2} = -1$
   f) $5\tan(\beta + 15°) = \frac{5}{\sqrt{3}}$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26B5 1b. 26B6 1c. 26B7 1d. 26B8 1e. 26B9 1f. 26BB
1g. 26BC 1h. 26BD 1i. 26BF 2a. 26BG 2b. 26BH 2c. 26BJ
2d. 26BK 2e. 26BM 2f. 26BN

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Los kwadratiese trigonometriese vergelyking op

Ons kan ons kennis van algebraïese vergelykings gebruik om kwadratiese trigonometriese vergelykings op te los.

Uitgewerkte voorbeeld 19: Kwadratiese trigonometriese vergelykings

VRAAG

Vind die algemene oplossing van $4\sin^2\theta = 3$.

OPLOSSING

Stap 1: Vereenvoudig die vergelyking en bepaal die verwysingshoek

$$\begin{aligned} 4\sin^2\theta &= 3 \\ \sin^2\theta &= \frac{3}{4} \\ \therefore \sin\theta &= \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \text{verw } \angle &= 60° \end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal in watter kwadrante die sinusfunksie positief en negatief is

Die CAST diagram wys dat $\sin\theta$ positief is in die eerste en tweede kwadrante en negatief in die derde en vierde kwadrante.

Positief in die eerste en tweede kwadrante:

$$\begin{aligned} \theta &= 60° + k\ .\ 360° \\ \text{of } \theta &= 180° - 60° + k\ .\ 360° \\ &= 120° + k\ .\ 360° \end{aligned}$$

Negatief in die derde en vierde kwadrante:

$$\begin{aligned} \theta &= 180° + 60° + k\ .\ 360° \\ &= 240° + k\ .\ 360° \\ \text{of } \theta &= 360° - 60° + k\ .\ 360° \\ &= 300° + k\ .\ 360° \end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Stap 3: Kontroleer dat die oplossing die oorspronklike vergelyking bevredig

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\theta = 60° + k\ .\ 360°$ of $120° + k\ .\ 360°$ of $240° + k\ .\ 360°$ of $300° + k\ .\ 360°$

Uitgewerkte voorbeeld 20: Kwadratiese trigonometriese vergelykings

VRAAG

Vind θ as $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ vir $\theta \in [-180°; 180°]$.

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die vergelyking

$$\begin{aligned} 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 &= 0 \\ (2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) &= 0 \\ \therefore 2\cos\theta + 1 = 0 &\text{ of } \cos\theta - 1 = 0 \end{aligned}$$

Stap 2: Vereenvoudig die vergelykings en los op vir θ

$$\begin{aligned}
2\cos\theta + 1 &= 0 \\
2\cos\theta &= -1 \\
\cos\theta &= -\frac{1}{2} \\
\therefore \text{verw } \angle &= 60^\circ \\
\text{II kwadrant: } \theta &= 180^\circ - 60^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
&= 120^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
\text{III kwadrant: } \theta &= 180^\circ + 60^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
&= 240^\circ + k\ .\ 360^\circ
\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
\cos\theta - 1 &= 0 \\
\cos\theta &= 1 \\
\therefore \text{verw } \angle &= 0^\circ \\
\text{II en IV kwadrante: } \theta &= k\ .\ 360^\circ
\end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Stap 3: Vervang geskikte waardes vir k

Bepaal die waardes van θ wat in die gegewe interval $\theta \in [-180^\circ; 180^\circ]$ lê deur geskikte waardes van k te substitueer.

As $k = -1$,

$$\begin{aligned}
\theta &= 240^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
&= 240^\circ - (360^\circ) \\
&= -120^\circ
\end{aligned}$$

As $k = 0$,

$$\begin{aligned}
\theta &= 120^\circ + k\ .\ 360^\circ \\
&= 120^\circ + 0(360^\circ) \\
&= 120^\circ
\end{aligned}$$

As $k = 1$,

$$\begin{aligned}
\theta &= k\ .\ 360^\circ \\
&= 0(360^\circ) \\
&= 0^\circ
\end{aligned}$$

Stap 4: Alternatiewe metode: substitusie

Ons kan die gegewe vergelyking vereenvoudig deur te stel $y = \cos\theta$ en dan te faktoriseer:

$$\begin{aligned} 2y^2 - y - 1 &= 0 \\ (2y+1)(y-1) &= 0 \\ \therefore y &= -\frac{1}{2} \text{ of } y = 1 \end{aligned}$$

Ons substitueer $y = \cos\theta$ terug in hierdie twee vergelykings in en los op vir θ.

Stap 5: Skryf die finale antwoord

$\theta = -120°; 0°; 120°$

Uitgewerkte voorbeeld 21: Kwadratiese trigonometriese vergelykings

VRAAG

Vind α as $2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha = 0$ vir $\alpha \in [0°; 360°]$.

OPLOSSING

Stap 1: Faktoriseer die vergelyking deur die gemene faktor uit te haal

$$\begin{aligned} 2\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha &= 0 \\ \sin\alpha(2\sin\alpha - \cos\alpha) &= 0 \\ \therefore \sin\alpha &= 0 \text{ of } 2\sin\alpha - \cos\alpha = 0 \end{aligned}$$

Stap 2: Vereenvoudig die vergelykings en los op vir α

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= 0 \\ \therefore \text{verw } \angle &= 0° \\ \therefore \alpha &= 0° + k\ .\ 360° \\ \text{of } \alpha &= 180° + k\ .\ 360° \\ \text{en aangesien } 360° &= 2 \times 180° \\ \text{het ons } \alpha &= k\ .\ 180° \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} 2\sin\alpha - \cos\alpha &= 0 \\ 2\sin\alpha &= \cos\alpha \end{aligned}$$

Om verder te vereenvoudig, deel ons beide kante van die vergelyking deur $\cos\alpha$.

$$\begin{aligned} \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha} &= \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha} \qquad (\cos\alpha \neq 0) \\ 2\tan\alpha &= 1 \\ \tan\alpha &= \frac{1}{2} \\ \therefore \text{verw } \angle &= 26{,}6° \\ \therefore \alpha &= 26{,}6° + k\ .\ 180° \end{aligned}$$

waar $k \in \mathbb{Z}$.

Stap 3: Vervang geskikte waardes vir k

Bepaal die waardes van α wat in die gegewe interval $\alpha \in [0°; 360°]$ lê deur geskikte waardes van k te substitueer.

As $k = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0° \\ \text{of } \alpha &= 26{,}6° \end{aligned}$$

As $k = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° \\ \text{of } \alpha &= 26{,}6° + 180° \\ &= 206{,}6° \end{aligned}$$

As $k = 2$:

$$\alpha = 360°$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

$\alpha = 0°; 26{,}6°; 180°; 206{,}6°; 360°$

Oefening 6 – 9: Oplos van trigonometriese vergelykings

1. Vind die algemene oplossing vir elk van die volgende vergelykings:

   a) $\cos 2\theta = 0$
   b) $\sin(\alpha + 10°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   c) $2\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{3} = 0$
   d) $\frac{1}{2}\tan(\beta - 30°) = -1$
   e) $5\cos\theta = \tan 300°$
   f) $3\sin\alpha = -1{,}5$
   g) $\sin 2\beta = \cos(\beta + 20°)$
   h) $0{,}5\tan\theta + 2{,}5 = 1{,}7$
   i) $\sin(3\alpha - 10°) = \sin(\alpha + 32°)$
   j) $\sin 2\beta = \cos 2\beta$

2. Vind θ as $\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ vir $\theta \in [0°; 360°]$.

3. Bepaal die algemene oplossing vir elk van die volgende:

   a) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 2$
   b) $3\tan^2\theta + 2\tan\theta = 0$
   c) $\cos^2\alpha = 0{,}64$
   d) $\sin(4\beta + 35°) = \cos(10° - \beta)$
   e) $\sin(\alpha + 15°) = 2\cos(\alpha + 15°)$
   f) $\sin^2\theta - 4\cos^2\theta = 0$
   g) $\dfrac{\cos(2\theta + 30°)}{2} + 0{,}38 = 0$

4. Vind β as $\frac{1}{3}\tan\beta = \cos 200°$ vir $\beta \in [-180°; 180°]$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26BP 1b. 26BQ 1c. 26BR 1d. 26BS 1e. 26BT 1f. 26BV
1g. 26BW 1h. 26BX 1i. 26BY 1j. 26BZ 2. 26C2 3a. 26C3
3b. 26C4 3c. 26C5 3d. 26C6 3e. 26C7 3f. 26C8 3g. 26C9
4. 26CB

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

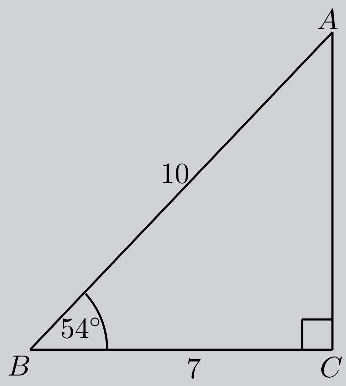
6.5 Area-, sinus- en kosinusreëls EME4P

Daar is drie identiteite vir trigonometriese funksies wat die hantering van driehoeke vergemaklik:

1. die areareël
2. die sinusreël
3. die kosinusreël

Ondersoek: Die areareël

1. Beskou $\triangle ABC$:



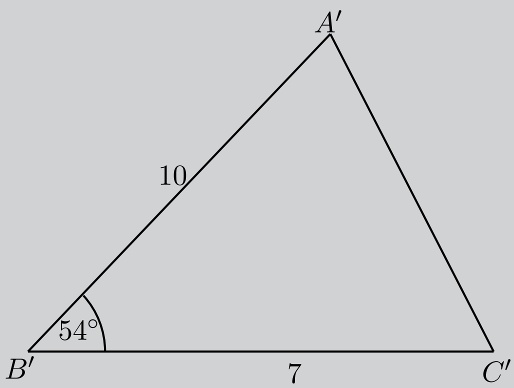
Voltooi die volgende:

a) Area $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \ldots \times AC$

b) $\sin \hat{B} = \ldots$ en dus $AC = \ldots \times \ldots$

c) Dus, area $\triangle ABC = \ldots \times \ldots \times \ldots \times \ldots$

2. Beskou $\triangle A'B'C'$:

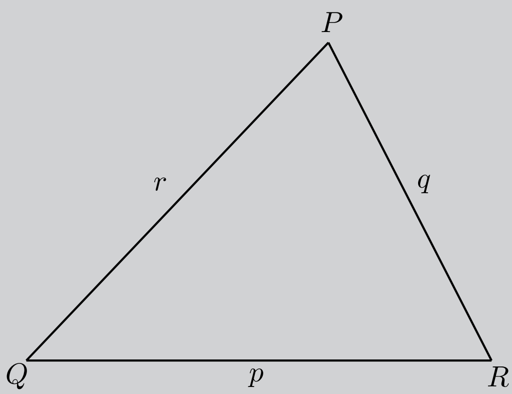


Voltooi die volgende:

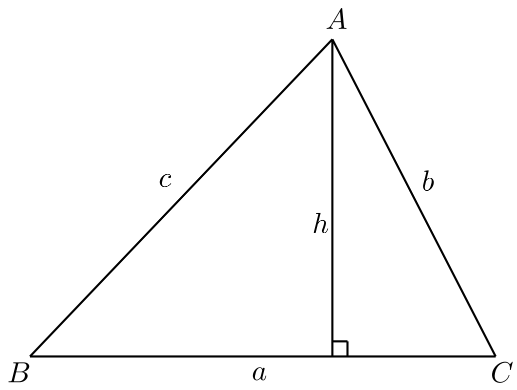
a) Hoe verskil $\triangle A'B'C'$ van $\triangle ABC$?

b) Bereken area $\triangle A'B'C'$.

3. Gebruik jou resultate om die algemene formule neer te skryf vir die area van $\triangle PQR$:



Vir enige $\triangle ABC$ met $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$, kan ons 'n loodregte hoogte (h) konstrueer van hoekpunt A tot by lyn BC:



In $\triangle ABC$:

$$\sin \hat{B} = \frac{h}{c}$$
$$\therefore h = c \sin \hat{B}$$

Ons weet ook dat

$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times a \times h \\ &= \frac{1}{2} \times a \times c \sin \hat{B} \\ \therefore \text{Area } \triangle ABC &= \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \end{aligned}$$

Andersins, kan ons ook skryf

$$\sin \hat{C} = \frac{h}{b}$$
$$\therefore h = b \sin \hat{C}$$

En dan het ons

$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times a \times h \\ &= \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \end{aligned}$$

Soortgelyk, deur 'n loodregte lyn te konstrueer vanaf hoekpunt B tot by lyn AC, kan ons ook aantoon dat die area $\triangle ABC = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$.

Die areareël

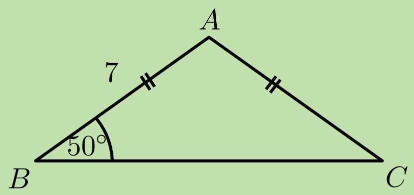
In enige $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle ABC &= \frac{1}{2} bc \sin \hat{A} \\ &= \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} \\ &= \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 22: Die areareël

VRAAG

Vind die area van $\triangle ABC$ (korrek tot twee desimale plekke):



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die gegewe inligting om die onbekende hoeke en sye te bereken

$$\begin{aligned} AB = AC &= 7 && \text{(gegee)} \\ \therefore \hat{B} = \hat{C} &= 50^\circ && \text{(}\angle\text{e teenoor gelyke sye)} \\ \text{En } \hat{A} &= 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ && \text{(som } \angle\triangle ABC\text{)} \\ \therefore \hat{A} &= 80^\circ \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die areareël om die area van $\triangle ABC$ te bereken

Let daarop dat ons nie weet hoe lank sy a is nie en daarom moet ons die vorm van die areaformule kies wat nie hierdie sy van die driehoek insluit nie.

In $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned} \text{Area } &= \tfrac{1}{2} bc \sin \hat{A} \\ &= \tfrac{1}{2}(7)(7)\sin 80^\circ \\ &= 24{,}13 \end{aligned}$$

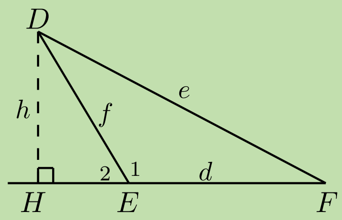
Stap 3: Skryf die finale antwoord

Area van $\triangle ABC = 24{,}13$ vierkante eenhede.

Uitgewerkte voorbeeld 23: Die areareël

VRAAG

Toon aan dat die area van $\triangle DEF = \frac{1}{2}df \sin \hat{E}$.



OPLOSSING

Stap 1: Konstrueer 'n loodregte hoogte h

Trek DH sodat $DH \perp EF$ en laat $DH = h$, $D\hat{E}F = \hat{E}_1$ en $D\hat{E}H = \hat{E}_2$.

In $\triangle DHE$:

$$\sin \hat{E}_2 = \frac{h}{f}$$

$$h = f \sin(180° - \hat{E}_1) \qquad (\angle\text{e op reguitlyn})$$

$$= f \sin \hat{E}_1$$

Stap 2: Gebruik die areareël om die area van $\triangle DEF$ te bereken

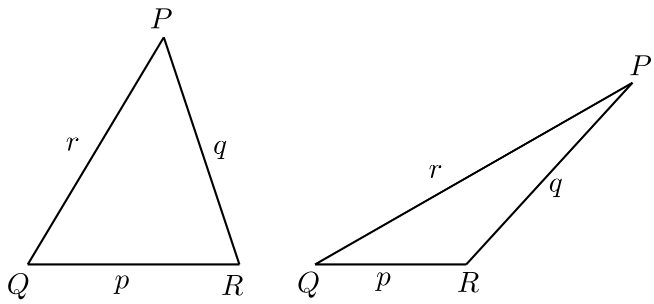
In $\triangle DEF$:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}d \times h$$

$$= \frac{1}{2}df \sin \hat{E}_1$$

Die areareël

In enige $\triangle PQR$:



$$\begin{aligned} \text{Area } \triangle PQR &= \frac{1}{2}qr\sin\hat{P} \\ &= \frac{1}{2}pr\sin\hat{Q} \\ &= \frac{1}{2}pq\sin\hat{R} \end{aligned}$$

Die areareël dui aan dat die area van enige driehoek gelyk is aan die helfte van die produk van die lengtes van twee sye van die driehoek vermenigvuldig met die sinus van die hoek wat ingesluit word deur die twee sye.

Oefening 6 – 10: Die areareël

1. Teken 'n skets en bereken die area van $\triangle PQR$ as gegee word dat:

   a) $\hat{Q} = 30°$; $r = 10$ en $p = 7$

   b) $\hat{R} = 110°$; $p = 8$ en $q = 9$

2. Vind die area van $\triangle XYZ$ as gegee is dat $XZ = 52$ cm, $XY = 29$ cm en $\hat{X} = 58{,}9°$.

3. Bepaal die area van 'n parallelogram waarvan die lengtes van twee aangrensende sye 10 cm en 13 cm is en die hoek tussen hulle $55°$ is.

4. As die area van $\triangle ABC$ 5000 m^2 is met $a = 150$ m en $b = 70$ m, wat is die twee moontlike groottes van $\hat{C}$?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

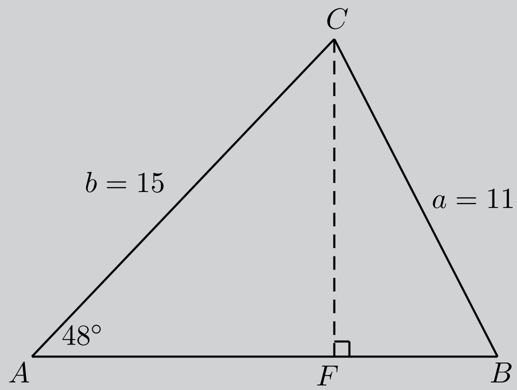
1a. 26CC 1b. 26CD 2. 26CF 3. 26CG 4. 26CH

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Tot dusver het ons slegs die trigonometriese verhoudings toegepas in reghoekige driehoeke. Ons brei nou die toepassings van die trigonometriese verhoudings uit na driehoeke wat nie ’n regte hoek het nie.

Ondersoek: Die sinusreël

In $\triangle ABC$, $AC = 15$, $BC = 11$ en $\hat{A} = 48°$. Vind $\hat{B}$.



1. Metode 1: gebruik die sinusverhouding

   a) Teken ’n skets van $\triangle ABC$.

   b) Konstrueer $CF \perp AB$.

   c) In $\triangle CBF$:

$$\frac{CF}{\ldots} = \sin \hat{B}$$
$$\therefore CF = \ldots \times \sin \hat{B}$$

   d) In $\triangle CAF$:

$$\frac{CF}{15} = \ldots$$
$$\therefore CF = 15 \times \ldots$$

   e) Dus het ons:

$$CF = 15 \times \ldots$$
$$\text{en } CF = \ldots \times \sin \hat{B}$$
$$\therefore 15 \times \ldots = \ldots \times \sin \hat{B}$$
$$\therefore \sin \hat{B} = \ldots\ldots\ldots$$
$$\therefore \hat{B} = \ldots$$

2. Metode 2: gebruik die areareël

a) In $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}\text{Area } \triangle ABC &= \frac{1}{2}AB \times AC \times \ldots \\ &= \frac{1}{2}AB \times \ldots \times \ldots\end{aligned}$$

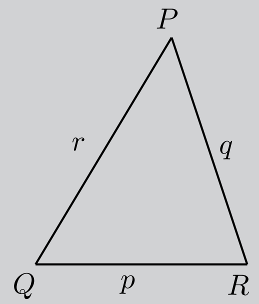
b) Ons weet ook dat

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2}AB \times \ldots \times \sin \hat{B}$$

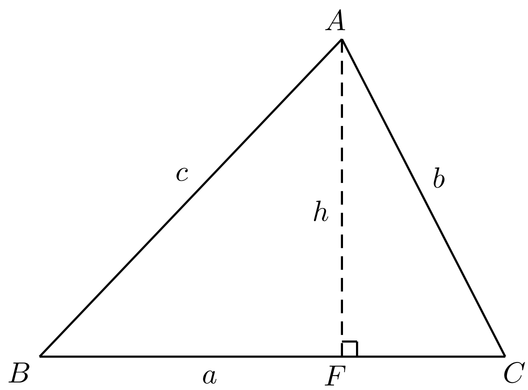
c) Ons kan hierdie twee vergelykings gelykstel en oplos vir $\hat{B}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}AB \times \ldots \times \sin \hat{B} &= \frac{1}{2}AB \times \ldots \times \ldots \\ \therefore \ldots \times \sin \hat{B} &= \ldots \times \ldots \\ \therefore \sin \hat{B} &= \ldots \times \ldots \\ \therefore \hat{B} &= \ldots\end{aligned}$$

3. Gebruik jou resultate om die algemene formule vir die sinusreël neer te skryf vir $\triangle PQR$:



Vir enige driehoek ABC met $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$, kan ons 'n loodregte hoogte (h) konstrueer by F:



Metode 1: gebruik die sinusverhouding

In $\triangle ABF$:

$$\begin{aligned}\sin \hat{B} &= \frac{h}{c} \\ \therefore h &= c \sin \hat{B}\end{aligned}$$

In $\triangle ACF$:

$$\sin \hat{C} = \frac{h}{b}$$
$$\therefore h = b \sin \hat{C}$$

Ons kan die twee vergelykings gelykstel

$$c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C}$$
$$\therefore \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$
$$\text{of } \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Soortgelyk, deur 'n loodregte hoogte te konstrueer vanaf hoekpunt B na lyn AC, kan ons ook aantoon dat:

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$
$$\text{of } \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Soortgelyk, deur 'n loodregte lyn te konstrueer vanaf hoekpunt B tot by lyn AC, kan ons ook aantoon dat die area $\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$.

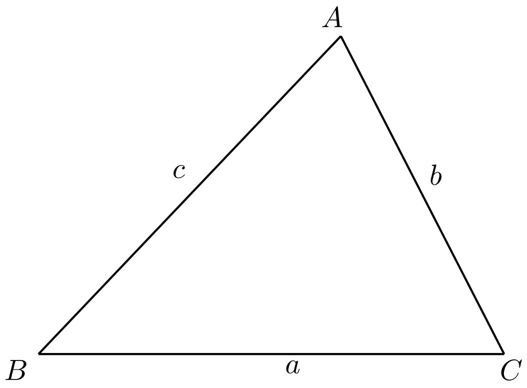
Metode 2: gebruik die areareël

In $\triangle ABC$:

$$\text{Area } \triangle ABC = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$$
$$= \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$
$$\therefore \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}$$
$$c \sin \hat{B} = b \sin \hat{C}$$
$$\frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$
$$\text{of } \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Die sinusreël

In enige $\triangle ABC$:



$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

Sien video: 26CJ op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 24: Die sinusreël

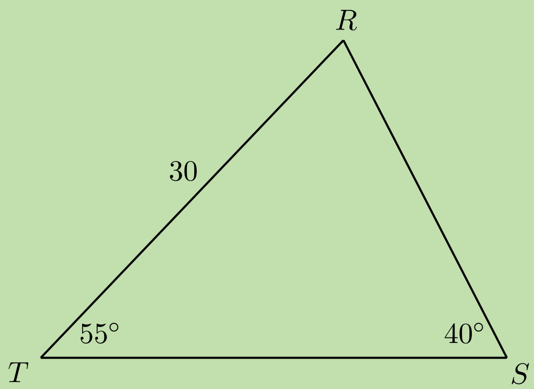
VRAAG

Gegee dat $\triangle TRS$ met $S\hat{T}R = 55°$, $TR = 30$ en $R\hat{S}T = 40°$, bepaal RS, ST en $T\hat{R}S$.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n skets

Laat $RS = t$, $ST = r$ en $TR = s$.



Stap 2: Vind $T\hat{R}S$ deur hoeke in 'n driehoek te gebruik

$$\begin{aligned} T\hat{R}S + R\hat{S}T + S\hat{T}R &= 180° && (\angle\text{e som van } \triangle TRS) \\ \therefore T\hat{R}S &= 180° - 40° - 55° \\ &= 85° \end{aligned}$$

Stap 3: Bepaal t en r deur gebruik te maak van die sinusreël

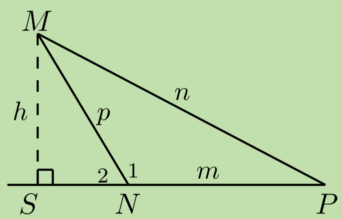
$$\begin{aligned}
\frac{t}{\sin \hat{T}} &= \frac{s}{\sin \hat{S}} \\
\frac{t}{\sin 55^\circ} &= \frac{30}{\sin 40^\circ} \\
\therefore t &= \frac{30}{\sin 40^\circ} \times \sin 55^\circ \\
&= 38{,}2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\sin \hat{R}} &= \frac{s}{\sin \hat{S}} \\
\frac{r}{\sin 85^\circ} &= \frac{30}{\sin 40^\circ} \\
\therefore r &= \frac{30}{\sin 40^\circ} \times \sin 85^\circ \\
&= 46{,}5
\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 25: Die sinusreël

VRAAG

Bewys die sinusreël vir $\triangle MNP$ met $MS \perp NP$.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die sinusreël om die hoeke van 'n driehoek uit te druk in terme van die lengtes van die sye

In $\triangle MSN$:

$$\begin{aligned}
\sin \hat{N}_2 &= \tfrac{h}{p} \\
\therefore h &= p \sin \hat{N}_2 \\
\text{en } \hat{N}_2 &= 180^\circ - \hat{N}_1 && \angle\text{e op reguitlyn} \\
\therefore h &= p \sin(180^\circ - \hat{N}_1) \\
&= p \sin \hat{N}_1
\end{aligned}$$

In $\triangle MSP$:

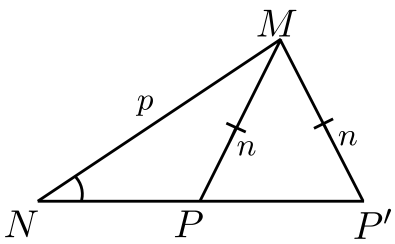
$$\sin \hat{P} = \frac{h}{n}$$
$$\therefore h = n \sin \hat{P}$$

Stap 2: Stel die twee vergelykings gelyk en lei die sinusreël af

$$p \sin \hat{N}_1 = n \sin \hat{P}$$
$$\therefore \frac{\sin \hat{N}_1}{n} = \frac{\sin \hat{P}}{p}$$
$$\text{of } \frac{n}{\sin \hat{N}_1} = \frac{p}{\sin \hat{P}}$$

Die dubbelsinnige geval

As twee sye en 'n nie-ingeslote hoek van 'n driehoek bekend is, en die sy teenoor die bekende hoek is korter as die ander bekende sy kan ons twee verskillende driehoeke trek ($\triangle NMP$ en $\triangle NMP'$) wat albei die gegewe afmetings het. Ons noem dit die dubbelsinnige geval omdat daar twee maniere is om die gegewe inligting te interpreteer en dit nie seker is watter een van die twee die vereiste oplossing is nie.



Uitgewerkte voorbeeld 26: Die dubbelsinnige geval

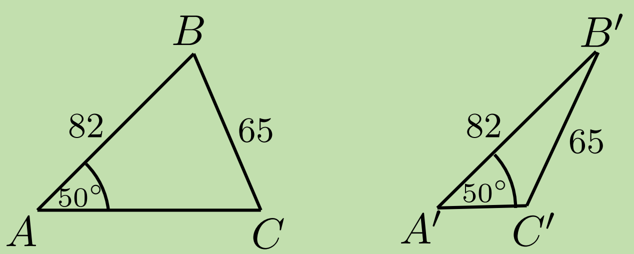
VRAAG

In $\triangle ABC$, $AB = 82$, $BC = 65$ en $\hat{A} = 50°$. Trek $\triangle ABC$ en vind $\hat{C}$ (korrek tot een desimale plek).

OPLOSSING

Stap 1: Trek 'n skets en identifiseer die dubbelsinnige geval

Ons let op dat vir die gegewe afmetings van $\triangle ABC$, sy BC teenoor $\hat{A}$ korter is as AB. Dit beteken dat ons twee verskillende driehoeke kan trek met die gegewe afmetings.



Stap 2: Los op vir die onbekende hoek deur die sinusreël te gebruik

In $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \hat{A}}{BC} &= \frac{\sin \hat{C}}{AB} \\
\frac{\sin 5\hat{0}^{\circ}}{65} &= \frac{\sin \hat{C}}{82} \\
\therefore \frac{\sin 5\hat{0}^{\circ}}{65} \times 82 &= \sin \hat{C} \\
\therefore \hat{C} &= 75{,}1^{\circ}
\end{aligned}$$

In $\triangle ABC$:

Ons weet dat $\sin(180 - \hat{C}) = \sin \hat{C}$, wat beteken ons kan ook dié oplossing hê:

$$\begin{aligned}
\hat{C}\prime &= 180^{\circ} - 75{,}1^{\circ} \\
&= 104{,}9^{\circ}
\end{aligned}$$

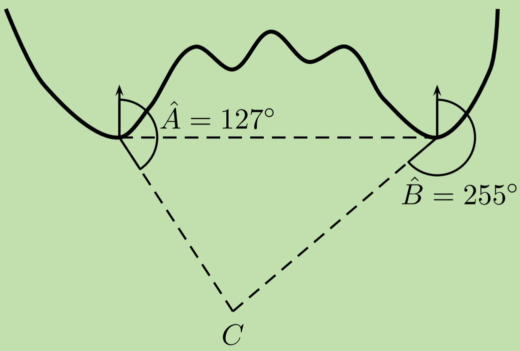
Beide oplossings is korrek.

Uitgewerkte voorbeeld 27: Vuurtorings

VRAAG

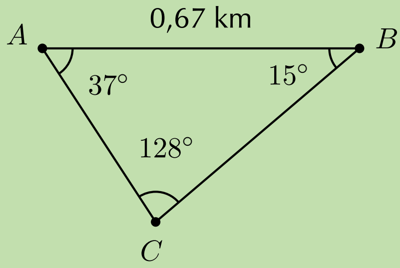
Daar is 'n kuslyn met twee vuurtorings, een op elke punt van die strand. Die twee vuurtorings is $0{,}67$ km van mekaar af en die een is reg oos van die ander een. Die vuurtorings kan bepaal hoe naby 'n boot aan die kus is deur 'n peiling na die boot te neem ('n peiling is 'n hoek wat kloksgewyse vanaf noord geneem word). Hierdie rigtingpeilings word getoon op die diagram hieronder.

Bereken hoe ver die boot is vanaf elke vuurtoring.



OPLOSSING

Ons sien dat die twee vuurtorings en die boot 'n driehoek vorm. Aangesien ons weet wat die afstand tussen die twee vuurtorings is en die groottes van die twee hoeke het, kan ons trigonometrie gebruik om die twee onbekende sye van die driehoek, dit wil sê die afstande van die boot na die twee vuurtorings, te bereken.



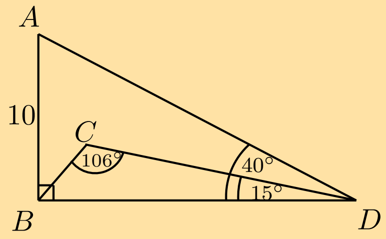
Ons moet die lengtes van die twee sye, AC en BC bepaal. Ons kan die sinusreël gebruik om die onbekende lengtes te vind.

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin\hat{A}} &= \frac{AB}{\sin\hat{C}}\\ BC &= \frac{AB\ .\ \sin\hat{A}}{\sin\hat{C}}\\ &= \frac{(0{,}67 \text{ km})\sin 37°}{\sin 128°}\\ &= 0{,}51 \text{ km}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{AC}{\sin\hat{B}} &= \frac{AB}{\sin\hat{C}}\\ AC &= \frac{AB\ .\ \sin\hat{B}}{\sin\hat{C}}\\ &= \frac{(0{,}67 \text{ km})\sin 15°}{\sin 128°}\\ &= 0{,}22 \text{ km}\end{aligned}$$

Oefening 6 – 11: Sinusreël

1. Vind al die onbekende sye en hoeke van die volgende driehoeke:
   a) $\triangle PQR$ waarin $\hat{Q} = 64°$; $\hat{R} = 24°$ en $r = 3$
   b) $\triangle KLM$ waarin $\hat{K} = 43°$; $\hat{M} = 50°$ en $m = 1$
   c) $\triangle ABC$ waarin $\hat{A} = 32{,}7°$; $\hat{C} = 70{,}5°$ en $a = 52{,}3$
   d) $\triangle XYZ$ waarin $\hat{X} = 56°$; $\hat{Z} = 40°$ en $x = 50$
2. In $\triangle ABC$, $\hat{A} = 116°$; $\hat{C} = 32°$ en $AC = 23$ m. Vind die lengte van sye AB en BC.
3. In $\triangle RST$, $\hat{R} = 19°$; $\hat{S} = 30°$ en $RT = 120$ km. Vind die lengtes van sy ST.
4. In $\triangle KMS$, $\hat{K} = 20°$; $\hat{M} = 100°$ en $s = 23$ cm. Vind die lengte van sy m.
5. In $\triangle ABD$, $\hat{B} = 90°$, $AB = 10$ cm en $A\hat{D}B = 40°$. In $\triangle BCD$, $\hat{C} = 106°$ en $C\hat{D}B = 15°$. Bepaal BC.



6. In $\triangle ABC$, $\hat{A} = 33°$, $AC = 21$ mm en $AB = 17$ mm. Kan jy BC bepaal?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26CK 1b. 26CM 1c. 26CN 1d. 26CP 2. 26CQ 3. 26CR
4. 26CS 5. 26CT 6. 26CV

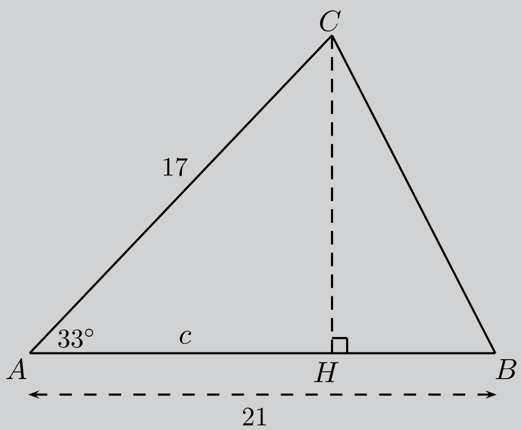
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Die kosinusreël EME4S

Ondersoek: Die kosinusreël

As ons 'n driehoek gegee word met twee sye en die ingeslote hoek bekend, kan ons nie die oorblywende onbekende sy en hoeke bereken met die sinusreël nie. Daarom ondersoek ons die kosinusreël:

In $\triangle ABC, AB = 21, AC = 17$ en $\hat{A} = 33°$. Vind $\hat{B}$.



1. Bepaal CB:
   a) Konstrueer $CH \perp AB$.
   b) Laat $AH = c$ en dus $HB = \ldots$
   c) Pas die stelling van Pythagoras toe in die reghoekige driehoeke:

In $\triangle CHB$:

$$\begin{aligned} CB^2 &= BH^2 + CH^2 \\ &= (\ldots)^2 + CH^2 \\ &= 21^2 - (2)(21)c + c^2 + CH^2 \ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

In $\triangle CHA$:

$$\begin{aligned} CA^2 &= c^2 + CH^2 \\ 17^2 &= c^2 + CH^2 \ldots\ldots (2) \end{aligned}$$

Stel vergelyking (2) in vergelyking (1) in:

$$CB^2 = 21^2 - (2)(21)c + 17^2$$

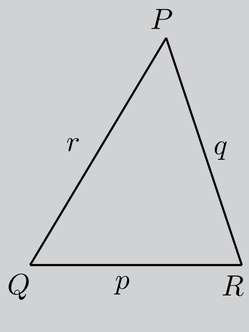
Nou is c die enigste oorblywende onbekende. In $\triangle CHA$:

$$\begin{aligned} \frac{c}{17} &= \cos 33^\circ \\ \therefore c &= 17 \cos 33^\circ \end{aligned}$$

Dus het ons

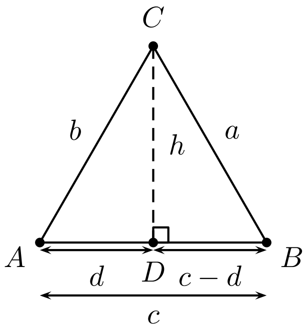
$$\begin{aligned} CB^2 &= 21^2 - (2)(21)c + 17^2 \\ &= 21^2 - (2)(21)(17 \cos 33^\circ) + 17^2 \\ &= 21^2 + 17^2 - (2)(21)(17) \cos 33^\circ \\ &= 131{,}189\ldots \\ \therefore CB &= 11{,}5 \end{aligned}$$

2. Gebruik jou resultate om 'n algemene formule vir die kosinusreël neer te skryf vir $\triangle PQR$:



Die kosinusreël druk die lengte van 'n sy van 'n driehoek uit in terme van die hoek teenoor die sy en die ander twee sye van die driehoek.

Beskou $\triangle ABC$ met $CD \perp AB$:



In $\triangle DCB$: $a^2 = (c-d)^2 + h^2$ vanaf die stelling van Pythagoras.

In $\triangle ACD$: $b^2 = d^2 + h^2$ vanaf die stelling van Pythagoras.

Aangesien h^2 gemeenskaplik is aan beide vergelykings, kan ons skryf:

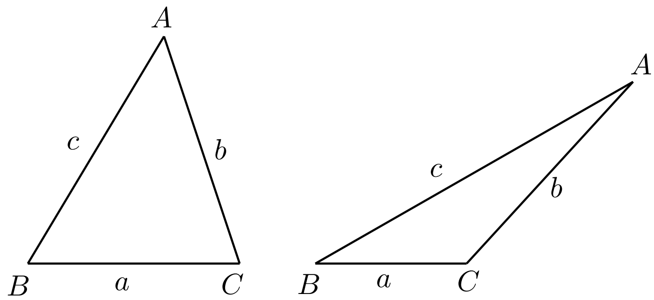
$$\begin{aligned}
a^2 &= (c-d)^2 + h^2 \\
\therefore h^2 &= a^2 - (c-d)^2 \\
\text{En } b^2 &= d^2 + h^2 \\
\therefore h^2 &= b^2 - d^2 \\
\therefore b^2 - d^2 &= a^2 - (c-d)^2 \\
a^2 &= b^2 + (c^2 - 2cd + d^2) - d^2 \\
&= b^2 + c^2 - 2cd
\end{aligned}$$

Ten einde d te elimineer, kyk ons na $\triangle ACD$, waar ons $\cos \hat{A} = \frac{d}{b}$ het. Dus, $d = b \cos \hat{A}$.

Deur terug te substitueer, kry ons $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$.

Die kosinusreël

In enige $\triangle ABC$:



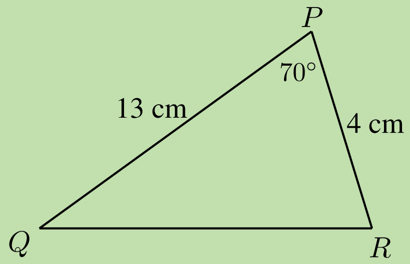
$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}
\end{aligned}$$

Sien video: 26CW op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 28: Die kosinusreël

VRAAG

Bepaal die lengte van QR.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik die kosinusreël om die onbekende sy op te los

$$\begin{aligned} QR^2 &= PR^2 + QP^2 - 2(PR)(QP)\cos\hat{P} \\ &= 4^2 + 13^2 - 2(4)(13)\cos 70° \\ &= 149{,}42\ldots \\ \therefore QR &= 12{,}2 \end{aligned}$$

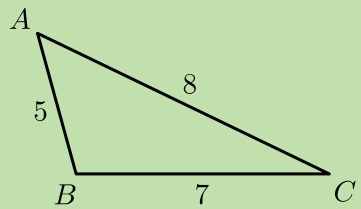
Stap 2: Skryf die finale antwoord

$QR = 12{,}2$ cm

Uitgewerkte voorbeeld 29: Die kosinusreël

VRAAG

Bepaal $\hat{A}$.



OPLOSSING

Pas die kosinusreël toe:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \\ \therefore \cos\hat{A} &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{8^2+5^2-7^2}{2\,.\,8\,.\,5} \\ &= 0{,}5 \\ \therefore \hat{A} &= 60° \end{aligned}$$

Dit is baie belangrik:

- om nie af te rond voor die finale antwoord nie aangesien dit die akkuraatheid sal beïnvloed;
- om die vierkantswortel te trek;
- om te onthou om eenhede te gee waar van toepassing.

Hoe om te bepaal watter reël om te gebruik:

1. Areareël
   - as geen loodregte hoogte gegee word nie
2. Sinusreël
   - as geen regte hoek gegee word nie
   - as twee sye en 'n hoek gegee word (nie die ingeslote hoek nie)
   - as twee hoeke en 'n sy gegee word
3. Kosinusreël
   - as geen regte hoek gegee word nie
   - as twee sye en die ingeslote hoek gegee word
   - as drie sye gegee word

Oefening 6 – 12: Die kosinusreël

1. Los die volgende driehoeke op (d.w.s. vind al die onbekende sye en hoeke):
   a) $\triangle ABC$ waarin $\hat{A} = 70°$; $b = 4$ en $c = 9$
   b) $\triangle RST$ waarin $RS = 14$; $ST = 26$ en $RT = 16$
   c) $\triangle KLM$ waarin $KL = 5$; $LM = 10$ en $KM = 7$
   d) $\triangle JHK$ waarin $\hat{H} = 130°$; $JH = 13$ en $HK = 8$
   e) $\triangle DEF$ waarin $d = 4$; $e = 5$ en $f = 7$
2. Vind die lengte van die derde sy van die $\triangle XYZ$ waar:
   a) $\hat{X} = 71{,}4°$; $y = 3{,}42$ km en $z = 4{,}03$ km
   b) $x = 103{,}2$ cm; $\hat{Y} = 20{,}8°$ en $z = 44{,}59$ cm
3. Bepaal die grootste hoek in:
   a) $\triangle JHK$ waarin $JH = 6$; $HK = 4$ en $JK = 3$
   b) $\triangle PQR$ waar $p = 50$; $q = 70$ en $r = 60$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

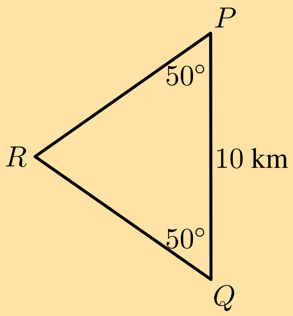
1a. 26CX 1b. 26CY 1c. 26CZ 1d. 26D2 1e. 26D3 2a. 26D4
2b. 26D5 3a. 26D6 3b. 26D7

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Sien video: 26D8 op www.everythingmaths.co.za

Oefening 6 – 13: Area-, sinus- en kosinusreël

1. Q is 'n skip by 'n punt 10 km suid van 'n ander skip P. R is 'n vuurtoring op die kus sodat $\hat{P} = \hat{Q} = 50°$.



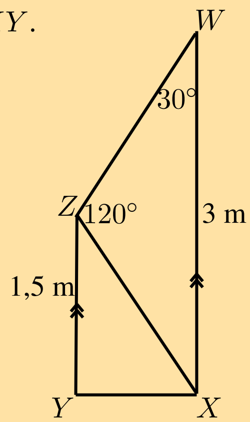
Bepaal:

   a) die afstand QR

   b) die kortste afstand van die vuurtoring na die denkbeeldige lyn wat die twee skepe verbind (PQ)

2. $WXYZ$ is a trapesium, $WX \parallel YZ$ met $WX = 3$ m; $YZ = 1{,}5$ m; $\hat{Z} = 120°$ en $\hat{W} = 30°$.

   Bepaal die afstande XZ en XY.



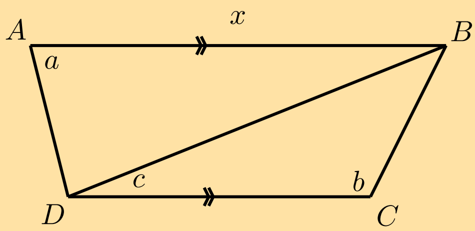
3. Tydens 'n vlug vanaf Johannesburg na Kaapstad ontdek die loods dat hy 3° van koers af gevlieg het. Op hierdie tydstip is die vliegtuig 500 km van Johannesburg af. Die direkte afstand tussen Kaapstad en Johannesburg lughawens is 1552 km. Bepaal, tot die naaste km:

   a) Die afstand wat die vliegtuig moet vlieg om by Kaapstad te kom en vervolgens die addisionele afstand wat die vliegtuig moet vlieg weens die loods se fout.

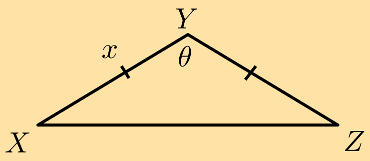
   b) Die korreksie, tot een honderste van 'n graad, aan die vliegtuig se koers (of rigting).

4. $ABCD$ is 'n trapesium (bedoelende dat $AB \parallel CD$). $AB = x$; $B\hat{A}D = a$; $B\hat{C}D = b$ en $B\hat{D}C = c$.

   Vind 'n uitdrukking vir die lengte van CD in terme van x, a, b en c.

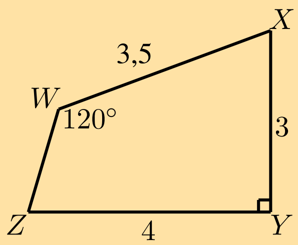


5. ’n Landmeter probeer om die afstand tussen twee punte X en Z. te bepaal. Die afstand kan egter nie direk bepaal word nie omdat daar ’n rif tussen die twee punte lê. Vanaf ’n punt Y wat ewe ver is van X en Z, meet hy die hoek $X\hat{Y}Z$.

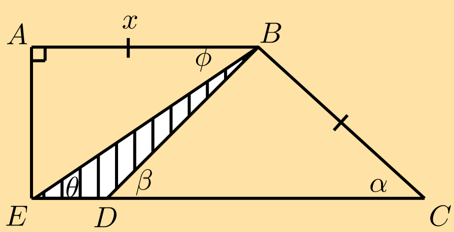


   a) As $XY = x$ en $X\hat{Y}Z = \theta$, wys dat $XZ = x\sqrt{2(1 - \cos\theta)}$.
   b) Bereken XZ (tot die naaste kilometer) as $x = 240$ km en $\theta = 132°$.

6. Vind die area van $WXYZ$ (tot twee desimale plekke):



7. Vind die area van die geskakeerde driehoek in terme van x, α, β, θ en ϕ:



Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

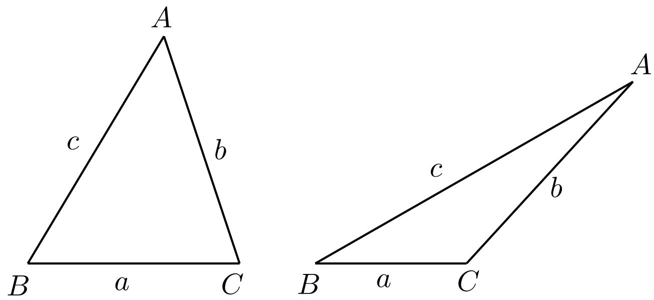
1. 26D9 2. 26DB 3. 26DC 4. 26DD 5. 26DF 6. 26DG
7. 26DH

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

6.6 Opsomming EME4T

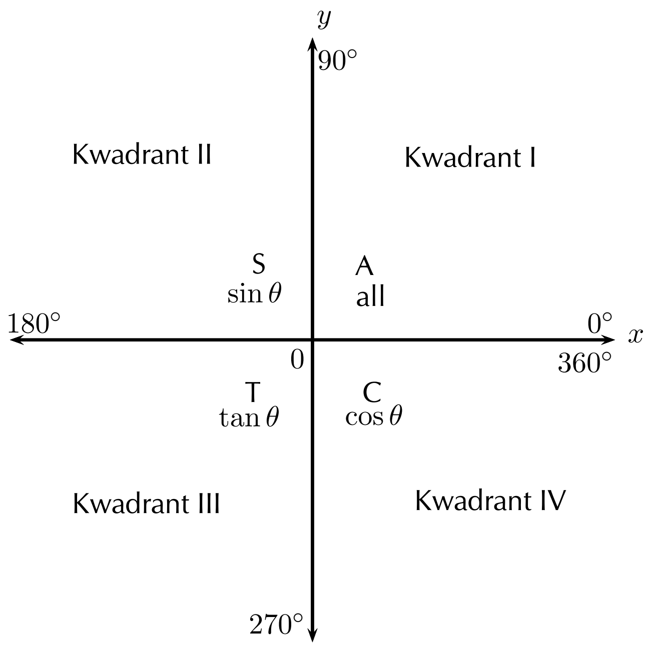
Sien aanbieding: 26DJ op www.everythingmaths.co.za

Vierkant-identiteit	Kwosiënt-identiteit
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$	$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$



negatiewe hoeke	periodisiteit identiteite	ko-funksie identiteite
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$	$\sin(\theta \pm 360°) = \sin\theta$	$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$	$\cos(\theta \pm 360°) = \cos\theta$	$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

sinusreël	areareël	kosinusreël
$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$	area $\triangle ABC = \frac{1}{2}bc\sin A$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$	area $\triangle ABC = \frac{1}{2}ac\sin B$	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
	area $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab\sin C$	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



Algemene oplossing:

1.

$$\begin{aligned} \text{As } \sin\theta &= x \\ \theta &= \sin^{-1} x + k \;.\; 360^\circ \\ \text{of } \theta &= \left(180^\circ - \sin^{-1} x\right) + k \;.\; 360^\circ \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{As } \cos\theta &= x \\ \theta &= \cos^{-1} x + k \;.\; 360^\circ \\ \text{of } \theta &= \left(360^\circ - \cos^{-1} x\right) + k \;.\; 360^\circ \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \text{As } \tan\theta &= x \\ \theta &= \tan^{-1} x + k \;.\; 180^\circ \end{aligned}$$

vir $k \in \mathbb{Z}$.

Hoe om te bepaal watter reël om te gebruik:

1. Areareël
   - geen loodregte hoogte is gegee nie
2. Sinusreël
   - geen regte hoek is gegee nie
   - twee sye en ’n hoek is gegee (nie die ingeslote hoek nie)
   - twee hoeke en ’n sy is gegee
3. Kosinusreël
   - geen regte hoek is gegee nie
   - twee sye en die ingeslote hoek is gegee
   - drie sye is gegee

Oefening 6 – 14: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Skryf die volgende as ’n enkele trigonometriese verhouding:

$$\frac{\cos(90^\circ - A)\sin 20^\circ}{\sin(180^\circ - A)\cos 70^\circ} + \cos(180^\circ + A)\sin(90^\circ + A)$$

2. Bepaal die waarde van die volgende uitdrukking sonder die gebruik van ’n sakrekenaar:

$$\sin 240^\circ \cos 210^\circ - \tan^2 225^\circ \cos 300^\circ \cos 180^\circ$$

3. Vereenvoudig:

$$\frac{\sin(180° + \theta)\sin(\theta + 360°)}{\sin(-\theta)\tan(\theta - 360°)}$$

4. Evalueer sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

$$\frac{3\sin 55° \sin^2 325°}{\cos(-145°)} - 3\cos 395° \sin 125°$$

5. Bewys die volgende identiteite:

   a) $\frac{1}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} = \frac{-1}{\tan^2 x \cos^2 x}$
   b) $(1 - \tan \alpha)\cos \alpha = \sin(90 + \alpha) + \cos(90 + \alpha)$

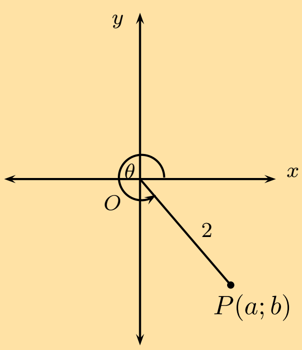
6. a) Bewys: $\tan y + \frac{1}{\tan y} = \frac{1}{\cos^2 y \tan y}$
   b) Vir watter waardes van $y \in [0°; 360°]$ is die identiteit hierbo ongedefiniëer?

7. a) Vereenvoudig: $\frac{\sin(180° + \theta)\tan(360° - \theta)}{\sin(-\theta)\tan(180° + \theta)}$
   b) Los vervolgens die vergelyking op $\frac{\sin(180° + \theta)\tan(360° - \theta)}{\sin(-\theta)\tan(180° + \theta)} = \tan\theta$ vir $\theta \in [0°; 360°]$.

8. Gegee $12\tan\theta = 5$ en $\theta > 90°$.

   a) Teken 'n skets.
   b) Bepaal sonder die gebruik van 'n sakrekenaar $\sin\theta$ en $\cos(180° + \theta)$.
   c) Gebruik 'n sakrekenaar om θ te vind (korrek tot twee desimale plekke).

9.



In die figuur, is P 'n punt in die Cartesiese vlak sodat $OP = 2$ eenhede en $\theta = 300°$. Bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

   a) die waardes van a en b
   b) die waarde van $\sin(180° - \theta)$

10. Los x op vir $x \in [-180°; 180°]$ (korrek tot een desimale plek):

   a) $2\sin\frac{x}{2} = 0{,}86$
   b) $\tan(x + 10°) = \cos 202{,}6°$
   c) $\cos^2 x - 4\sin^2 x = 0$

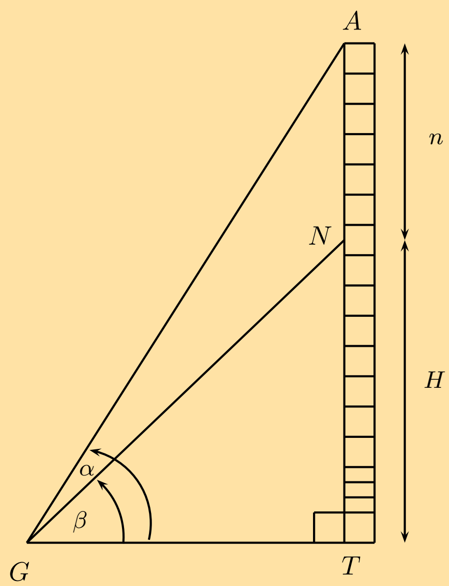
11. Vind die algemene oplossing vir die volgende vergelykings:

   a) $\frac{1}{2}\sin(x - 25^{\circ}) = 0{,}25$
   b) $\sin^2 x + 2\cos x = -2$

12. Gegee die vergelyking: $\sin 2\alpha = 0{,}84$

   a) Vind die algemene oplossing van die vergelyking.
   b) Illustreer hoe hierdie vergelyking grafies opgelos kan word vir $\alpha \in [0^{\circ}; 360^{\circ}]$.
   c) Skryf die oplossings neer van $\sin 2\alpha = 0{,}84$ vir $\alpha \in [0^{\circ}; 360^{\circ}]$.

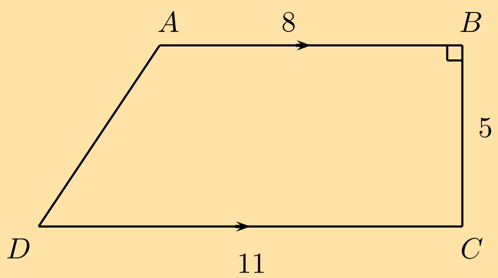
13.



A is die hootste punt van 'n vertikale toring AT. By punt N op die toring, n meters vanaf die bopunt van die toring, het 'n voël sy nes gemaak. Die hoogtehoek van G na punt A is α en die hoogtehoek van G na punt N is β.

   a) Druk $A\hat{G}N$ uit in terme van α en β.
   b) Druk $\hat{A}$ uit in terme van α en/of β.
   c) Toon aan dat die hoogte van die nes vanaf die grond (H) bepaal kan word met die formule
   $$H = \frac{n\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$
   d) Bereken die hoogte van die nes H as $n = 10$ m, $\alpha = 68^{\circ}$ en $\beta = 40^{\circ}$ (gee antwoord korrek tot die naaste meter).

14.



Mnr. Collins wil sy agterplaas, $ABCD$ in die vorm van 'n trapesium, plavei. $AB \parallel DC$ en $\hat{B} = 90°$. $DC = 11$ m, $AB = 8$ m en $BC = 5$ m.

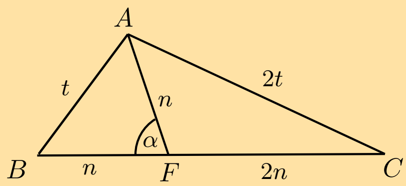
a) Bereken die lengte van die diagonaal AC.

b) Bereken die lengte van die sy AD.

c) Bereken die area van die agterplaas met die gebruik van meetkunde.

d) Bereken die area van die agterplaas met die gebruik van trigonometrie.

15.



In $\triangle ABC$, $AC = 2A$, $AF = BF$, $A\hat{F}B = \alpha$ en $FC = 2AF$. Bewys dat $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26DK	2. 26DM	3. 26DN	4. 26DP	5a. 26DQ	5b. 26DR
6. 26DS	7. 26DT	8. 26DV	9. 26DW	10a. 26DX	10b. 26DY
10c. 26DZ	11a. 26F2	11b. 26F3	12. 26F4	13. 26F5	14. 26F6
15. 26F7					

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 7

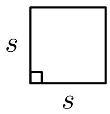
Meting

Hierdie hoofstuk in 'n hersiening van die omtrek en area van tweedimensionele voorwerpe en die buite-oppervlaktes en volumes van driedimensionele voorwerpe. Ons ondersoek ook verskillende kombinasies van meetkundige voorwerpe en bereken areas en volumes in 'n verskeidenheid van regte-wêreld kontekste.

Sien video: 26F8 op www.everythingmaths.co.za

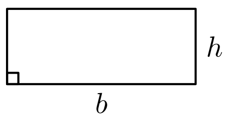
7.1 Area van 'n poligoon EME4V

Vierkant



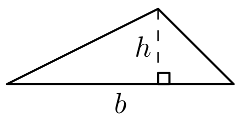
Area $= s^2$

Reghoek



Area $= b \times h$

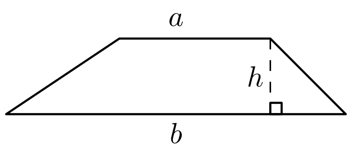
Driehoek



Area $= \frac{1}{2} b \times h$

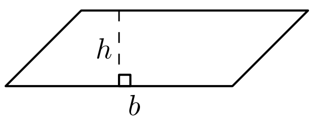
Sien video: 26F9 op www.everythingmaths.co.za

Trapesium



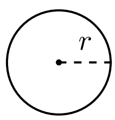
Area $= \frac{1}{2}(a + b) \times h$

Parallelogram



Area $= b \times h$

Sirkel



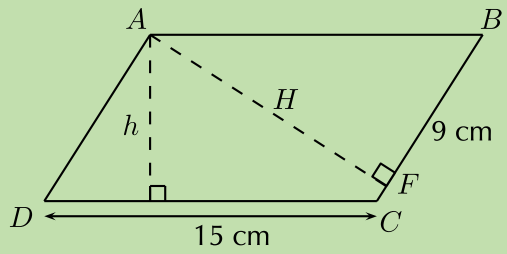
Area $= \pi r^2$ (Omtrek $= 2\pi r$)

Sien video: 26FB op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Vind die area van 'n poligoon

VRAAG

$ABCD$ is 'n parallelogram met $DC = 15$ cm, $h = 8$ cm en $BF = 9$ cm.



Bereken:

1. die area van $ABCD$
2. die omtrek van $ABCD$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die area

Die area van parallelogram $ABCD$ = basis $\times$ hoogte:

$$\begin{aligned}\text{Area} &= 15 \times 8 \\ &= 120 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal die omtrek

Die omtrek van parallelogram $ABCD = 2DC + 2BC$.

Om die lengte van BC te vind, gebruik ons $AF \perp BC$ en die Stelling van Pythagoras.

$$\begin{aligned}\text{In } \triangle ABF: \quad AF^2 &= AB^2 - BF^2 \\ &= 15^2 - 9^2 \\ &= 144 \\ \therefore AF &= 12 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Area } ABCD &= BC \times AF \\ 120 &= BC \times 12 \\ \therefore BC &= 10 \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{Omtrek } ABCD &= 2(15) + 2(10) \\ &= 50 \text{ cm}\end{aligned}$$

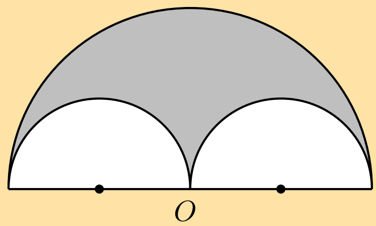
Oefening 7 – 1: Area van 'n poligoon

1. Vuyo en Banele kompeteer om te sien wie kan die beste vlieër bou met balsahout ('n lig-gewig hout) en papier. Vuyo besluit om sy vlieër te maak met een diagonaal 1 m lank en die ander diagonaal 60 cm lank. Die snypunt van die twee diagonale verdeel die langer diagonaal in die verhouding $1 : 3$.

   Banele gebruik ook diagonale van 60 cm en 1 m, maar hy ontwerp sy vlieër as 'n rombus.

   a) Maak 'n skets van Vuyo se vlieër en skryf al die bekende afmetings neer.
   b) Bepaal hoeveel balsahout Vuyo benodig om die buite raamwerk van sy vlieër te bou (gee antwoord korrek tot die naaste sentimeter).
   c) Bereken hoeveel papier hy sal nodig hê om die raam van sy vlieër te bou.
   d) Maak 'n skets van Banele se vlieër en skryf al die bekende afmetings neer.
   e) Bepaal hoeveel hout en papier Banele sal benodig vir sy vlieër.
   f) Vergelyk die twee ontwerpe en lewer kommentaar op die ooreenkomste en die verskille. Watter een dink jy is die beste ontwerp? Motiveer jou antwoord.

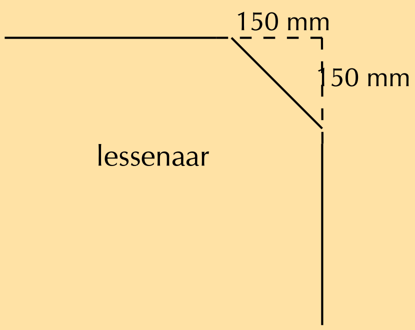
2. O is die middelpunt van 'n halfsirkel met radius 10 eenhede. Twee kleiner semisirkels is ingeskrewe in die groter een, soos aangetoon op die diagram. Bereken die volgende (in terme van π):

   a) Die area van die ingekleurde gedeelte van die figuur.
   b) Die omtrek van die ingekleurde gedeelte.

3. Karen se ingenieurshandboek is 30 cm lank en 20 cm wyd. Sy let op dat die afmetings van haar lessenaar in dieselfde verhouding is as die afmetings van haar handboek.

   a) As die lessenaar 90 cm wyd is, bereken die area van die boonste oppervlak van die lessenaar.
   b) Karen gebruik karton om elke hoek van haar lessenaar te bedek met 'n gelykbenige driehoek, soos aangetoon op die diagram:

   Bereken die omtrek en area van die sigbare oppervlak van haar lessenaar.

c) Gebruik hierdie nuwe area om die afmetings te bereken van 'n vierkantige lessenaar met dieselfde oppervlakarea as Karen se lessenaar.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

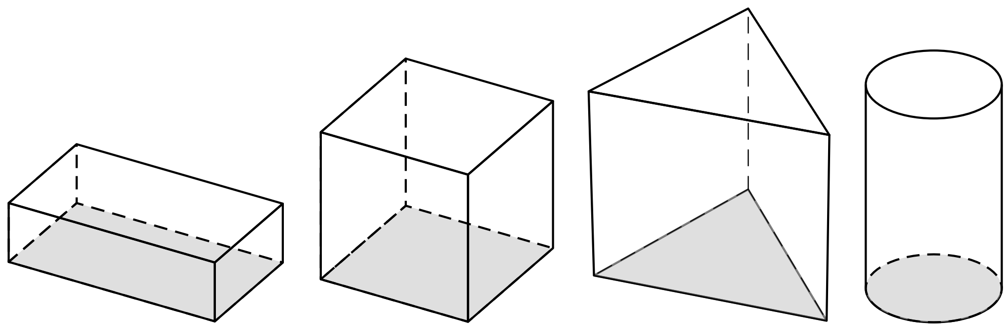
1. 26FC 2. 26FD 3. 26FF

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

7.2 Regte prismas en silinders EME4W

'n Regte prisma is 'n meetkundige vaste liggaam met 'n poligoon as basis en vertikale syvlakke loodreg op die basis. Die basis en die boonste vlak het dieselfde vorm en grootte. Dit word 'n 'regte' prisma genoem omdat die hoeke tussen die sye en die basis regte hoeke is.

'n Driehoekige prisma het 'n driehoek as basis, 'n reghoekige prisma het 'n reghoek as basis en 'n kubus is 'n reghoekige prisma met al die sye ewe lank. 'n Silinder is 'n ander tipe regte prisma met 'n sirkel as basis. Voorbeelde van regte prismas word hieronder gegee: 'n reghoekige prisma, 'n kubus, 'n driehoekige prisma en 'n silinder.



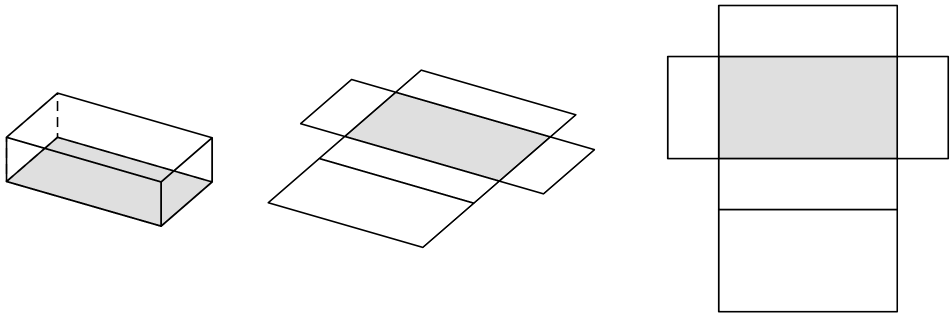
Buite-oppervlakte van prismas en silinders EME4X

Buite-oppervlakte is die totale area van die sigbare of buite-oppervlakke van 'n prisma. Dit is makliker om hierdie konsep te verstaan as ons ons verbeel die prisma is 'n kartonboks wat ons kan oopvou. 'n Vaste liggaam wat op hierdie manier ontvou word, word 'n net, of 'n ontvouing, genoem. Wanneer 'n prisma in 'n net ontvou word, kan ons elke vlak duidelik sien. Ten einde die buite-oppervlakte van die prisma te bereken, kan ons dan eenvoudig die area van elke vlak bereken en hulle almal bymekaartel.

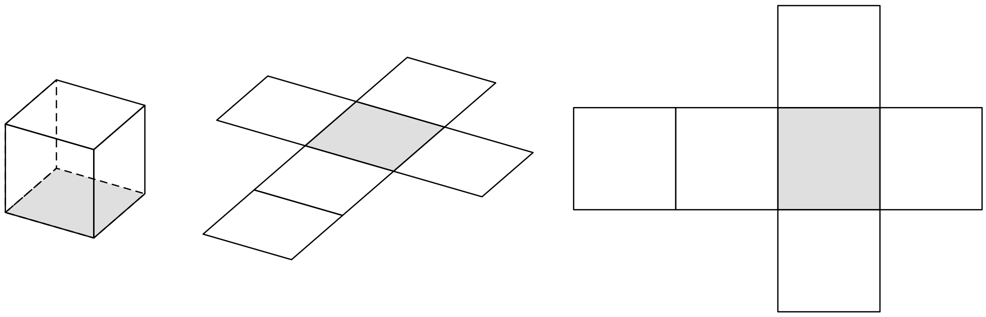
Byvoorbeeld, wanneer 'n driehoekige prisma ontvou word in 'n net, kan ons sien dit het twee driehoekige vlakke en drie reghoekige vlakke. Om die buite-oppervlakte van die prisma te bereken, vind ons die area van elke driehoek en elke reghoek en tel hulle almal bymekaar.

In die geval van 'n silinder, is die bo- en ondervlakke sirkels en die gekromde oppervlak ontvou in 'n reghoek waarvan die lengte gelyk is aan die omtrek van die sirkelvormige basis. Om die buite-oppervlakte te bereken, bereken ons dus die area van die twee sirkels en reghoek en tel hulle bymekaar.

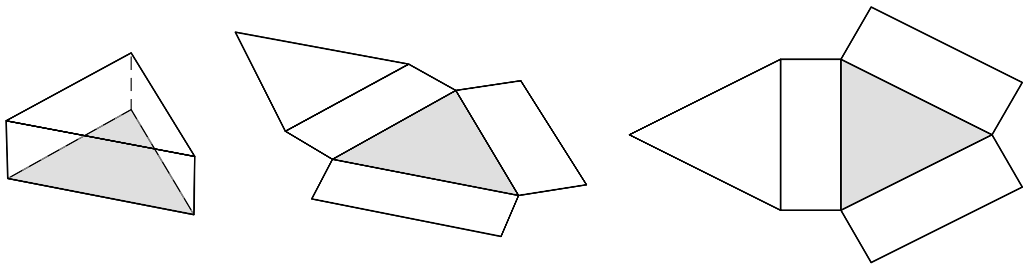
Hieronder is voorbeelde van regte prismas wat ontvou is in nette. ’n Reghoekige prisma wat ontvou is in ’n net, bestaan uit ses reghoeke.



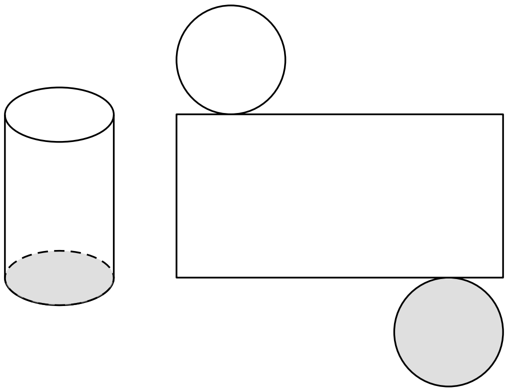
’n Kubus ontvou in ’n net wat bestaan uit ses identiese vierkante.



’n Driehoekige prisma ontvou in ’n net wat bestaan uit twee driehoeke en drie reghoeke. Die som van die lengtes van die reghoeke is gelyk aan die omtrek van elke driehoek.



’n Silinder ontvou in ’n net wat bestaan uit twee identiese sirkels en ’n reghoek waarvan die lengte gelyk is aan die omtrek van die sirkel.

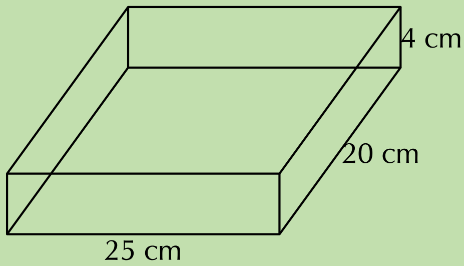


Uitgewerkte voorbeeld 2: Berekening van buite-oppervlakte

VRAAG

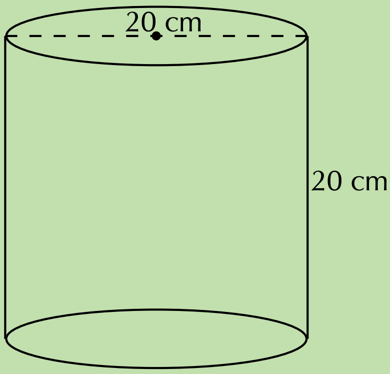
'n Boks sjokolade het die volgende afmetings:

$$\begin{aligned}\text{lengte} &= 25 \text{ cm}\\ \text{wydte} &= 20 \text{ cm}\\ \text{hoogte} &= 4 \text{ cm}\end{aligned}$$



'n Silindervormige blik koekies het die volgende afmetings:

$$\begin{aligned}\text{deursnit} &= 20 \text{ cm}\\ \text{hoogte} &= 20 \text{ cm}\end{aligned}$$



1. Bereken die area van geskenkpapier wat nodig is om die hele boks toe te draai (aanvaar geen oorvouings by die hoeke).
2. Bepaal of dieselfde hoeveelheid toedraaipapier genoeg is om die blik koekies toe te draai.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die buite-oppervlakte van die reghoekige boks

$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlakte} &= 2 \times (25 \times 20) + 2 \times (20 \times 4) + 2 \times (25 \times 4)\\ &= 1360 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal die buite-oppervlakte van die silindriese blik

Die radius van die silinder $= \frac{20}{2} = 10$ cm.

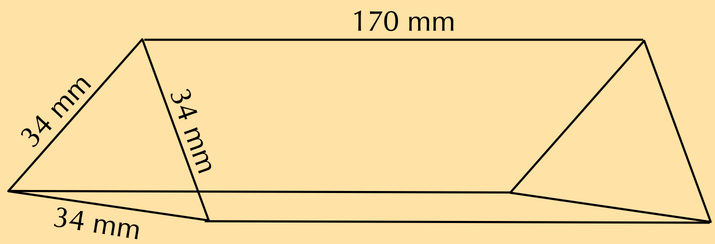
$$\begin{aligned} \text{Buite-oppervlakte} &= 2 \times \pi(10)^2 + 2\pi(10)(20) \\ &= 1885 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Nee, die oppervlakte van die vel oortrekpapier wat gebruik is om die boks oor te trek, is nie genoeg om die blik oor te trek nie.

Oefening 7 – 2: Berekening van buite-oppervlakte

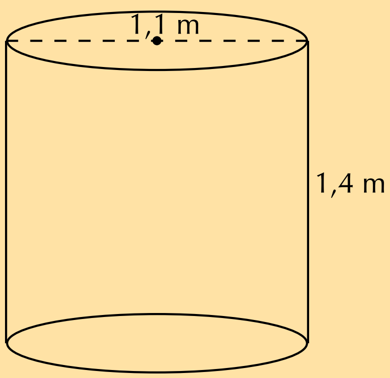
1. 'n Populêre sjokoladehouer is 'n gelyksydige regte driehoekige prisma met sye 34 mm. Die boks is 170 mm lank. Bereken die buite-oppervlakte van die boks (tot die naaste vierkante sentimeter).



2. Gordon koop 'n silindervormige watertenk om die reënwater van sy dak af op te vang. Hy ontdek 'n vol $2\ \ell$ blik groen verf in sy motorhuis en besluit om die tenk te verf. As hy 250 ml gebruik om 1 m^2 te verf, sal hy genoeg groen verf hê om die tenk een laag verf te gee?

   Afmetings van die tenk:

$$\begin{aligned} \text{deursnit} &= 1{,}1 \text{ m} \\ \text{hoogte} &= 1{,}4 \text{ m} \end{aligned}$$



Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

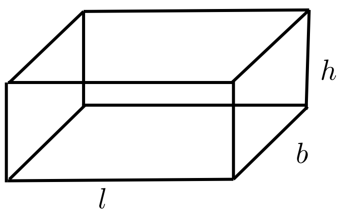
1. 26FG 2. 26FH

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Volume, ook soms genoem kapasiteit, is die driedimensionele ruimte ingeneem deurdie voorwerp, of die inhoudsmaat van 'n voorwerp. Dit word gemeet in kubieke eenhede.

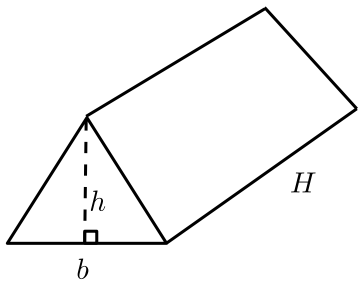
Die volume van 'n regte prisma word eenvoudig bereken deur die area van die basis te vermenigvuldig met die hoogte van die liggaam.

Reghoekige prisma



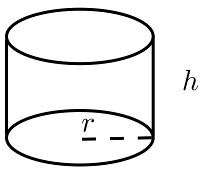
$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{oppervlakte basis} \times \text{hoogte}\\ &= \text{oppervlakte reghoek} \times \text{hoogte}\\ &= l \times b \times h\end{aligned}$$

Driehoekige prisma



$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{oppervlakte basis} \times \text{hoogte}\\ &= \text{oppervlakte driehoek} \times \text{hoogte}\\ &= \left(\frac{1}{2} b \times h\right) \times H\end{aligned}$$

Silinder



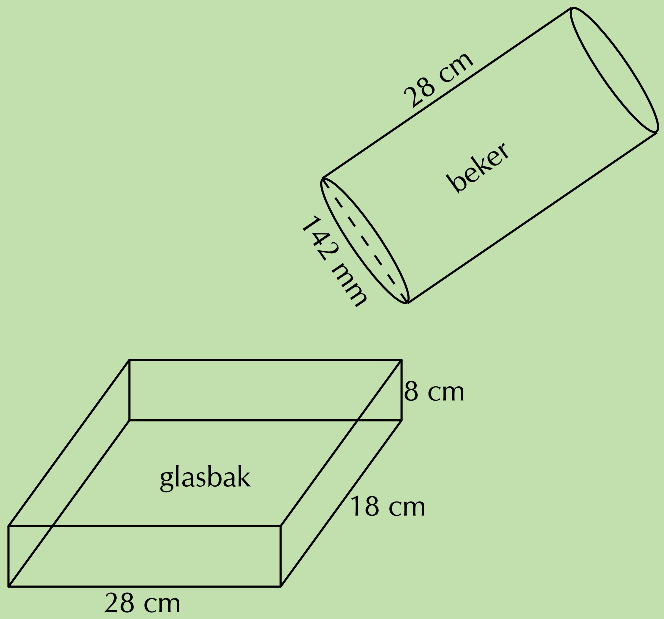
$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \text{oppervlakte basis} \times \text{hoogte}\\ &= \text{oppervlakte sirkel} \times \text{hoogte}\\ &= \pi r^2 \times h\end{aligned}$$

Sien video: 26FJ op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 3: Bereken volume

VRAAG

'n Reghoekige glas blompot met afmetings 28 cm $\times$ 18 cm $\times$ 8 cm word gebruik vir blomrangskikkings. 'n Bloemis gebruik 'n plastiese silindervormige beker om water in die glasbak mee te gooi. Die beker het 'n deursnit van 142 mm en 'n hoogte van 28 cm.



1. Sal die plastiese beker $5\ \ell$ water hou?
2. Sal 'n vol beker water genoeg wees om die glasbak te vul?

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die volume van die plastiese beker

Die deursnit van die beker is 142 mm, dus is die radius $= \frac{142}{2\times 10} = 7{,}1$ cm.

Volume van 'n silinder $=$ area van die basis $\times$ hoogte

$$\begin{aligned}
\text{Volume van die beker} &= \pi r^2 \times h \\
&= \pi \times (7{,}1)^2 \times 28 \\
&= 4434 \text{ cm}^3 \\
\text{En } 1000 \text{ cm}^3 &= 1\ \ell \\
\therefore \text{Volume van die beker} &= \frac{4434}{1000} \\
&= 4{,}434\ \ell
\end{aligned}$$

Nee, die inhoudsmaat van die beker is nie genoeg om $5\ \ell$ water te hou nie.

Stap 2: Bepaal die volume van die glasbak

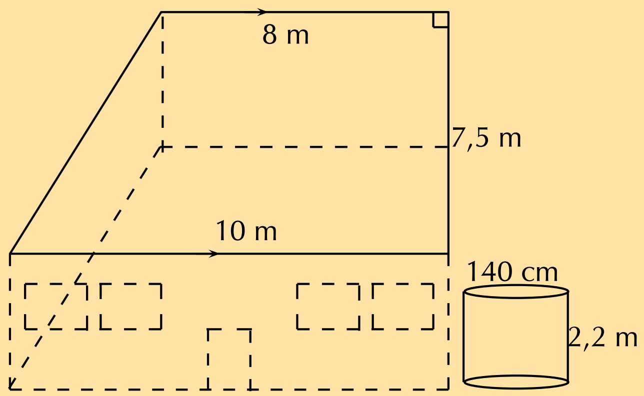
Volume van 'n reghoekige prisma = area van die basis × hoogte

$$
\begin{aligned}
\text{Volume van die glasbak} &= l \times b \times h \\
&= 28 \times 18 \times 8 \\
&= 4032 \text{ cm}^3 \\
\therefore \text{Volume van die glasbak} &= \frac{4032}{1000} \\
&= 4{,}032\ \ell
\end{aligned}
$$

Ja, die volume van die beker is groter as die volume van die bak.

Oefening 7 – 3: Bereken volume

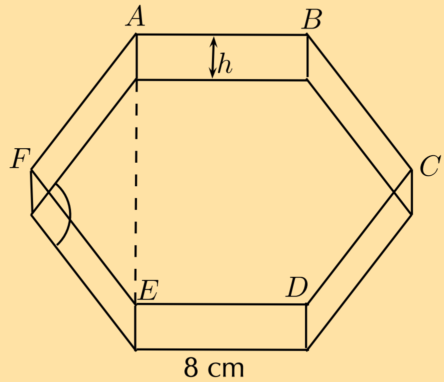
1. Die dak van Phumza se huis is in die vorm van 'n reghoekige trapesium. 'n Silindervormige watertenk is opgerig langs 'n huis sodat reënwater van die dak af in die tenk kan loop. Die deursnit van die tenk is 140 cm en die hoogte is $2{,}2$ m.



   a) Bepaal die area van die dak.

   b) Bepaal hoeveel liters water die tenk kan hou.

2. Die lengte van 'n sy van 'n heksagonale lekkergoedblik is 8 cm en die hoogte is gelyk aan helfte van 'n sylengte.



   a) Wys dat die binnehoeke gelyk is aan $120°$.

b) Bepaal die lengte van lyn AE.

c) Bereken die volume van die blik.

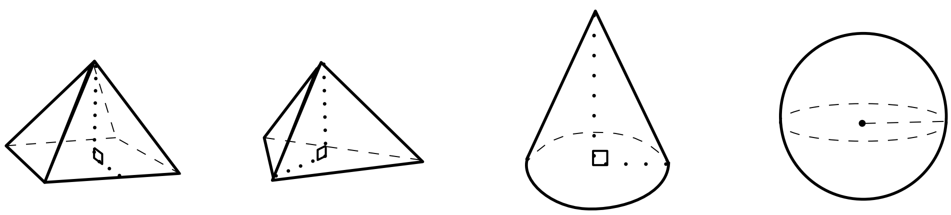
Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26FK 2. 26FM

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

7.3 Regte piramides, regte konusse en sfere EME4Z

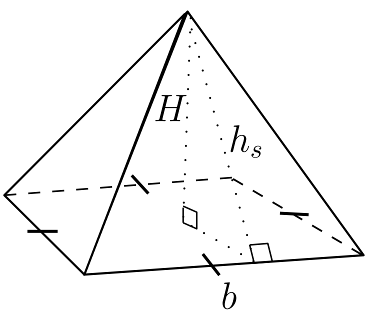
'n Piramide is 'n geometriese vaste liggaam wat 'n poligoon as basis het, met sye wat ontmoet by 'n punt, genaamd die topoek. Met ander woorde die sye is **nie** loodreg op die basis nie.



Die driehoekige piramide en vierkantige piramide ontleen hulle name van die vorm van die basis. Ons noem 'n piramide 'n "regte piramide" as die lyn tussen die tophoek en die middel van die basis loodreg is op die basis. Konusse is soortgelyk aan piramides behalwe dat hulle basisse sirkels is in plaas van poligone. Sfere is soliede liggaame wat volmaak rond is en dieselfde lyk vanaf enige rigting.

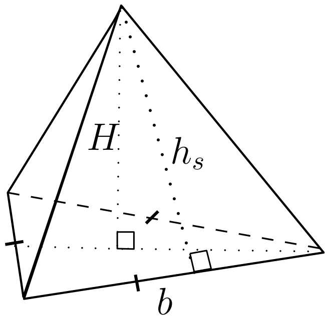
Buite-oppervlakte van piramides, konusse en sfere EME52

Vierkantige piramide



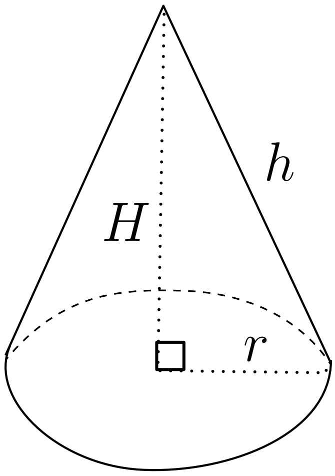
$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte basis} + \\ &\quad \text{oppervlakte driehoekige} \\ &\quad \text{vlakke} \\ &= b^2 + 4\left(\tfrac{1}{2}bh_s\right) \\ &= b\left(b + 2h_s\right)\end{aligned}$$

Driehoekige piramide



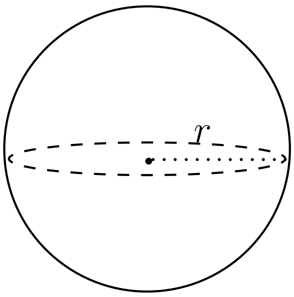
$$
\begin{aligned}
\text{Buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte basis} + \\
&\quad \text{oppervlakte driehoekige sye} \\
&= \left(\tfrac{1}{2}b \times h_b\right) + 3\left(\tfrac{1}{2}b \times h_s\right) \\
&= \tfrac{1}{2}b\left(h_b + 3h_s\right)
\end{aligned}
$$

Regte keël



$$
\begin{aligned}
\text{Buite-oppervlakte} &= \text{oppervlakte basis} + \\
&\quad \text{oppervlakte syvlak} \\
&= \pi r^2 + \tfrac{1}{2} \times 2\pi r h \\
&= \pi r\left(r + h\right)
\end{aligned}
$$

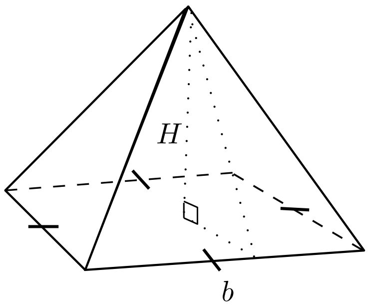
Sfeer



$$\text{Buite-oppervlakte} = 4\pi r^2$$

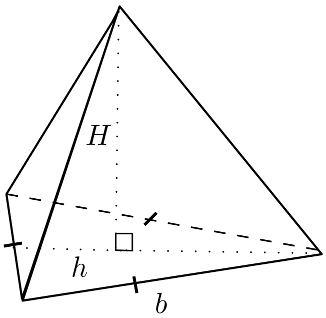
Volume van piramides, konusse en sfere EME53

Vierkantige piramide



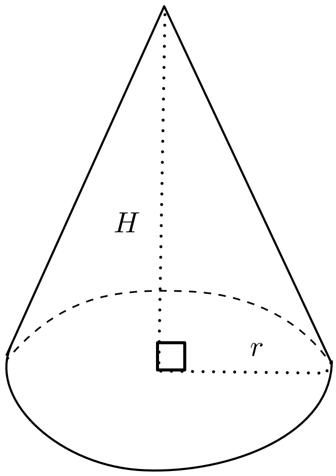
$$
\begin{aligned}
\text{Volume} &= \tfrac{1}{3} \times \text{oppervlakte basis} \times \\
&\quad \text{hoogte van piramide} \\
&= \tfrac{1}{3} \times b^2 \times H
\end{aligned}
$$

Driehoekige piramide



$$
\begin{aligned}
\text{Volume} &= \tfrac{1}{3} \times \text{oppervlakte basis} \times \\
&\quad \text{hoogte van piramide} \\
&= \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2}bh \times H
\end{aligned}
$$

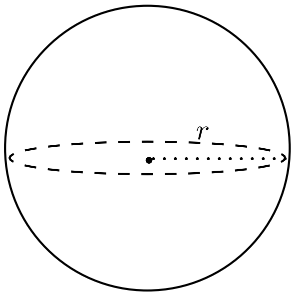
Regte keël



Volume $= \frac{1}{3} \times$ oppervlakte basis $\times$ hoogte van keël

$= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times H$

Sfeer



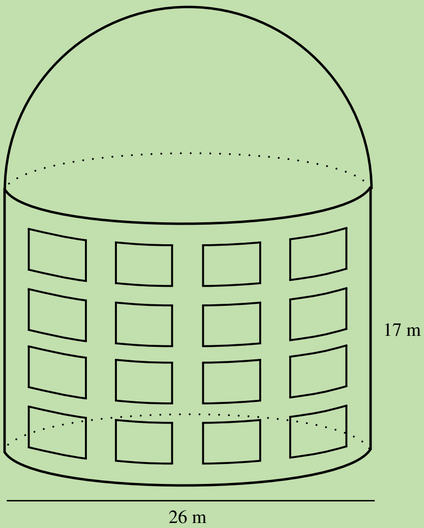
Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Sien video: 26FN op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 4: Vind buite-oppervlakte en volume

VRAAG

Die *Southern African Large Telescope* (SALT) is gehuisves in 'n silindervormige gebou met 'n koepeldak in die vorm van 'n hemisfeer. Die hoogte van die gebou se muur is 17 m en die deursnit is 26 m.



1. Bereken die totale buite-oppervlakte van die gebou.
2. Bereken die totale volume van die gebou.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die totale buite-oppervlakte

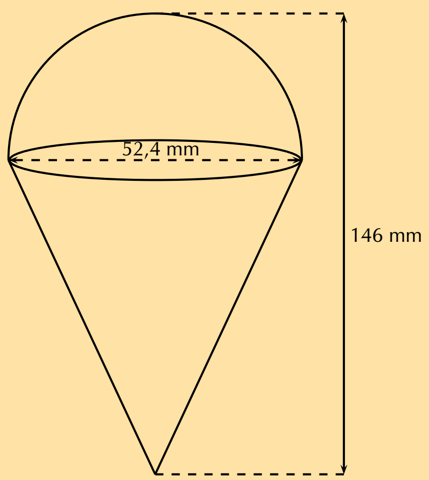
$$
\begin{aligned}
\text{Totale buite-oppervlakte} &= \text{area van die koepel} + \text{area van die silinder}\\
\text{Buite-oppervlakte} &= \left[\frac{1}{2}(4\pi r^2)\right] + [2\pi r \times h]\\
&= \frac{1}{2}(4\pi)(13)^2 + 2\pi(13)(17)\\
&= 2450 \text{ m}^2
\end{aligned}
$$

Stap 2: Bereken die totale volume

$$
\begin{aligned}
\text{Totale volume} &= \text{volume van die koepel} + \text{volume van die silinder}\\
\text{Volume} &= \left[\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\right] + \left[\pi r^2 h\right]\\
&= \frac{2}{3}\pi(13)^3 + \pi(11)^2(13)\\
&= 9543 \text{ m}^3
\end{aligned}
$$

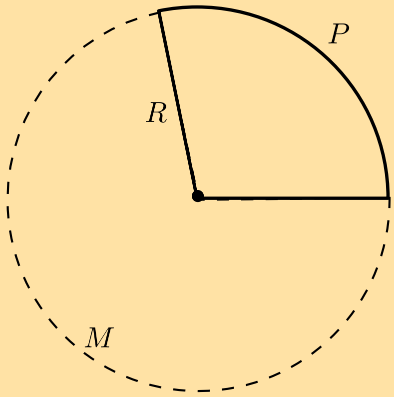
Oefening 7 – 4: Vind buite-oppervlakte en volume

1. 'n Roomyshorinkie het 'n deursnit van $52{,}4$ mm en 'n totale hoogte van 146 mm.



   a) Bereken die buite-oppervlakte van die roomys en die horinkie.
   b) Bereken die totale volume van die roomys en die horinkie.
   c) Hoeveel roomyshorinkies kan gevul word uit 'n $5\ \ell$ houer roomys (neem aan die horinkie word heeltemal volgemaak met roomys)?

d) Beskou die ontvouing van die konus hieronder. R is die lengte vanaf die hoekpunt van die konus tot by sy omtrek is P.



i. Bepaal die waarde van R.
ii. Bereken die lengte van die boog P.
iii. Bereken die lengte van boog M.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26FP

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

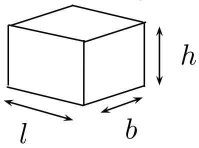
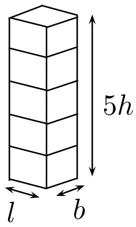
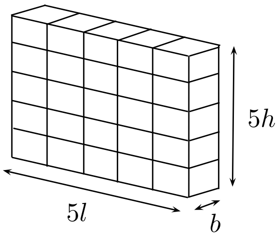
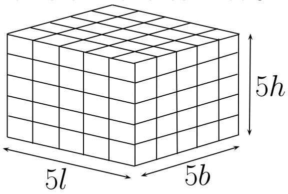
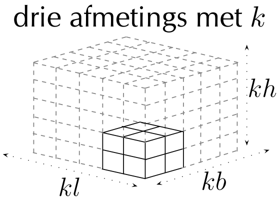
7.4 Vermenigvuldiging van 'n afmeting met 'n konstante faktor

EME54

Wanneer een of meer afmetings van 'n prisma of silinder vermenigvuldig word met 'n konstante, sal die buite-oppervlakte en die volume verander. Die nuwe buite-oppervlakte en volume kan bereken word deur die formules in die voorafgaande afdeling te gebruik.

Dit is belangrik om die verwantskap te sien tussen die verandering in die afmetings en die ooreenstemmende verandering in die buite-oppervlakte en die volume. Hierdie verwantskappe maak dit eenvoudiger om die nuwe volume en nuwe buite-oppervlakte van 'n voorwerp te bereken wanneer sy afmetings groter of kleiner gemaak word.

Beskou 'n reghoekige prisma met afmetings ℓ, b en h. Hieronder vermenigvuldig ons een, twee en drie van sy afmetings met 'n konstante faktor van 5 en bereken die nuwe volume en buite-oppervlakte.

Afmetings	**Volume**	**Buite-oppervlakte**
Oorspronklike afmetings 	$V = l \times b \times h$ $= lbh$	A $= 2\left[(l \times h) + (l \times b) + (b \times h)\right]$ $= 2\left(lh + lb + bh\right)$
Vermenigvuldig een dimensie met 5 	$V_1 = l \times b \times 5h$ $= 5\left(lbh\right)$ $= 5V$	A_1 $= 2\left[(l \times 5h) + (l \times b) + (b \times 5h)\right]$ $= 2\left(5lh + lb + 5bh\right)$
Vermenigvuldig twee dimensies met 5 	$V = 5l \times b \times 5h$ $= 5\ .\ 5(lbh)$ $= 5^2V$	A_2 $= 2\left[(5l \times 5h) + (5l \times b) + (b \times 5h)\right]$ $= 2 \times 5(5lh + lb + bh)$
Vermenigvuldig al drie dimensies met 5 	$V = 5l \times 5b \times 5h$ $= 5^3(lbh)$ $= 5^3V$	A_3 $= 2\left[(5l \times 5h) + (5l \times 5b) + (5b \times 5h)\right]$ $= 2 \times (5^2lh + 5^2lb + 5^2bh)$ $= 5^2 \times 2(lh + lb + bh)$ $= 5^2A$
Vermenigvuldig al drie afmetings met k 	$V = kl \times kb \times kh$ $= k^3(lbh)$ $= k^3V$	A_k $= 2\left[(kl \times kh) + (kl \times kb) + (kb \times kh)\right]$ $= 2 \times (k^2lh + k^2lb + k^2bh)$ $= k^2 \times 2(lh + lb + bh)$ $= k^2A$

Uitgewerkte voorbeeld 5: Die effek van k

VRAAG

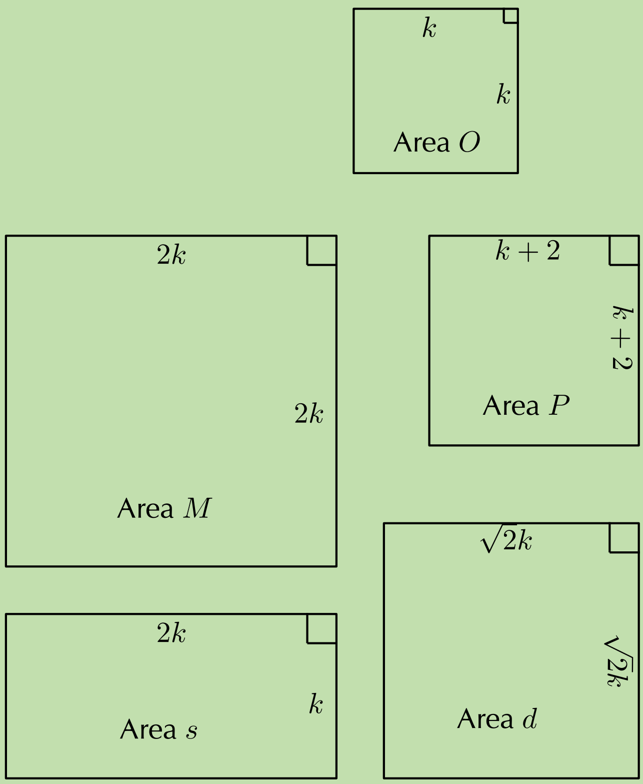
Die Nash-familie wil 'n nuwe televisiekamer aanbou aan hulle huis. Die pa teken 'n plan vir die nuwe vierkantige vertrek met 'n lengte van k meter. Die ma kyk na die plan en voel dat die area van die vertrek verdubbel moet word. Om dit te bereik:

- stel die ma voor dat die lengte van die sye van die vertrek verdubbel moet word
- die pa stel voor dat 2 m bygetel word by die lengte van die sye
- die dogter stel voor dat die lengte van die sye vermenigvuldig word met 'n faktor van $\sqrt{2}$
- die seun stel voor dat slegs die wydte van die kamer verdubbel word

Watter een se voorstel sal die area van die vierkantige vertrek verdubbel? Toon alle berekeninge.

OPLOSSING

Stap 1: Teken sketse



Stap 2: Bereken en vergelyk

Bereken eers die area van die vierkantige kamer op die oorspronklike plan:

$$\begin{aligned} \text{Area } O &= \text{lengte} \times \text{lengte} \\ &= k^2 \end{aligned}$$

Dus, verdubbeling van die area van die vertrek, sal beteken $2k^2$.

Oorweeg die ma se voorstel om die lengte van die sye van die vertrek te verdubbel:

$$\begin{aligned}
\text{Area } M &= \text{lengte} \times \text{lengte} \\
&= 2k \times 2k \\
&= 4k^2
\end{aligned}$$

Hierdie area sal 4 keer die oorspronklike area wees.

Die pa stel voor dat 2 m bygevoeg word by die lengte van die sye van die vertrek:

$$\begin{aligned}
\text{Area } P &= \text{lengte} \times \text{lengte} \\
&= (k+2) \times (k+2) \\
&= k^2 + 4k + 2 \\
&\neq 2k^2
\end{aligned}$$

Dit is nie dubbeld die oorspronklike area nie.

Die dogter stel voor dat die lengte van die sye vermenigvuldig word met 'n faktor van $\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
\text{Area } d &= \text{lengte} \times \text{lengte} \\
&= \sqrt{2}k \times \sqrt{2}k \\
&= 2k^2
\end{aligned}$$

Die dogter se voorstel sal die area van die vertrek verdubbel. Prakties gesproke kan die lengte van die sye van die vertrek vermenigvuldig word met $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ wat 'n area sal gee van $1{,}96$ m^2.

Die seun stel voor dat slegs die wydte van die vertrek verdubbel word:

$$\begin{aligned}
\text{Area } s &= \text{lengte} \times \text{lengte} \\
&= 2k \times k \\
&= 2k^2
\end{aligned}$$

Die seun se voorstel sal die area van die kamer verdubbel, maar die vertrek sal nie meer 'n vierkant wees nie.

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die dogter se voorstel om die lengte van die sye van die vertrek te vermenigvuldig met 'n faktor van $\sqrt{2}$ sal die vorm van die vertrek 'n vierkant hou terwyl die area sal verdubbel.

Oefening 7 – 5: Die effek van k

1. Voltooi die volgende sinne:
   a) As een afmeting van 'n kubus met 'n faktor van $\frac{1}{2}$ vermenigvuldig word, sal die volume van die kubus ...
   b) As twee dimensies van 'n kubus vermenigvuldig word met 'n faktor van 7, sal die volume van die kubus ...

c) As drie afmetings van 'n kubus vermenigvuldig word met 'n faktor van 3, dan sal:

i. elke sy van die kubus . . .

ii. die buite-oppervlakte van die kubus . . .

iii. die volume van die kubus . . .

d) As elke sy van 'n kubus halveer word, sal:

i. die buite-oppervlakte van die kubus . . .

ii. die volume van die kubus . . .

2. Die munisipaliteit beoog om 'n swembad te bou met 'n volume van W^3 kubieke meters. Hulle besef egter dit sal baie duur wees om die swembad vol water te maak, so hulle besluit om die swembad kleiner te maak.

a) Die lengte en die breedte van die swembad word verklein met 'n faktor van $\frac{7}{10}$. Druk die nuwe volume uit in terme van W.

b) Die afmetings van die swembad word so verminder dat die volume van die swembad verminder met 'n faktor van $0{,}8$. Bepaal die nuwe afmetings van die swembad in terme van W (onthou dat die swembad 'n kubus moet wees).

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26FQ 2. 26FR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

7.5 Opsomming EME55

Sien aanbieding: 26FS op www.everythingmaths.co.za

1. Oppervlakte is die tweedimensionele spasie binne die grense van 'n plat voorwerp.

2. Oppervlakte formules:
   - vierkant: s^2
   - reghoek: $b \times h$
   - driehoek: $\frac{1}{2}b \times h$
   - trapesium: $\frac{1}{2}(a + b) \times h$
   - parallelogram: $b \times h$
   - sirkel: πr^2

3. Buite-oppervlakte is die totale van die buite of sigbare oppervlakke van 'n prisma.

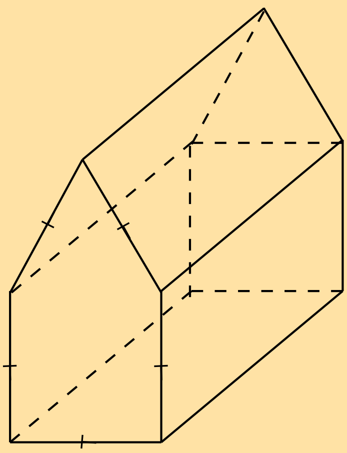
4. 'n Ontvouing is die oopgevoude "plan" van 'n vaste liggaam.

5. Volume is die driedimensionele spasie wat ingeneem word deur 'n voorwerp, of die inhoud van 'n voorwerp.
   - Volume van 'n reghoekige prisma: $l \times b \times h$

- Volume van 'n driekhoekige prisma: $\left(\frac{1}{2}b \times h\right) \times H$
- Volume van 'n vierkantige prisma of kubus: s^3
- Volume van 'n silinder: $\pi r^2 \times h$

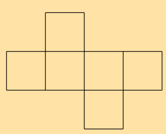
6. 'n Piramide is 'n soliede geometriese figuur met 'n veelhoekbasis wat verbind is aan die toppunt waar die syvlakke ontmoet (met ander woorde die sye is nie loodreg op die basis nie).
7. Totale buite-oppervlakte formules:
   - vierkantige piramide: $b\,(b + 2h)$
   - driehoekige piramide: $\frac{1}{2}b\,(h_b + 3h_s)$
   - keël: $\pi r\,(r + h_s)$
   - sfeer: $4\pi r^2$
8. Volume formules:
   - vierkantige piramide: $\frac{1}{3} \times b^2 \times H$
   - driehoekige piramide: $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}bh \times H$
   - keël: $\frac{1}{3} \times \pi r^2 \times H$
   - sfeer: $\frac{4}{3}\pi r^3$

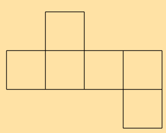
Oefening 7 – 6: Einde van die hoofstuk oefeninge

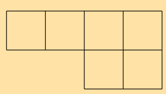
1. 

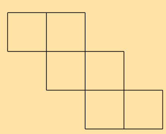
   a) Beskryf hierdie figuur in terme van 'n prisma.
   b) Teken 'n net, of ontvouing, van hierdie figuur.

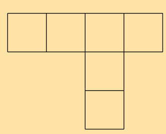
2. Watter van die volgende is 'n net van 'n kubus?

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

   e) 

3. Benoem en teken die volgende figure:

   a) 'n Prisma met die minste sye.

   b) 'n Piramide met die minste hoekpunte.

   c) 'n Regte prisma met 'n vlieër as basis.

4. a) i. Bepaal hoeveel papier benodig word om 'n boks te maak met 'n wydte van 16 cm, hoogte van 3 cm en lengte van 20 cm (aanvaar daar is geen oorvleueling by die hoeke nie).

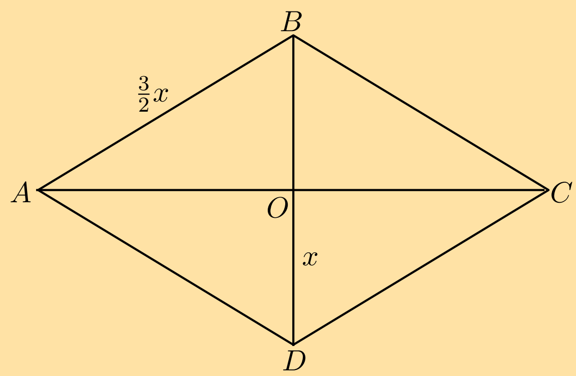
      ii. Gee 'n wiskundige naam vir die vorm van dié boks.

      iii. Bereken die volume van dié boks.

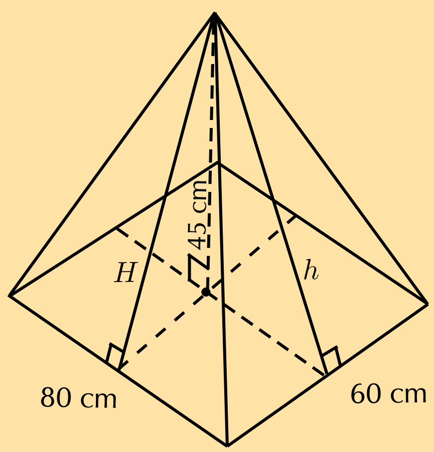
   b) Bepaal hoeveel papier benodig word om 'n kubus te maak met 'n inhoudsmaat van $1\ \ell$.

   c) Vergelyk die boks en die kubus. Watter een het die grootste volume en watter een vereis die meeste papier om te maak?

5. $ABCD$ is 'n rombus met sylengtes van $\frac{3}{2}x$ millimeters. Die diagonale sny by O en lengte van $DO = x$ millimeters. Druk die area van $ABCD$ uit in terme van x.



6. Die diagram wys 'n reghoekige piramide met 'n basis van 80 cm lank en 60 cm breed. Die vertikale hoogte van die piramide is 45 cm.



   a) Bereken die volume van die piramide.

   b) Bereken H en h.

   c) Bereken die buite-oppervlakte van die piramide.

7. 'n Groep kinders speel sokker op 'n oop stuk veld. Die sokkerbal het 'n inhoudsmaat van 5000 cc (kubieke sentimeters). 'n Afvoerpyp in die hoek van die veld het 'n deursnit van 20 cm. Is dit moontlik dat die kinders se bal in die pyp kan inval? Toon jou berekenings.

8. 'n Liter waspoeier pas in 'n standaard kubiese houer by die fabriek.

   a) Bepaal die lengte van die sye van die houer.

   b) Bepaal die afmetings van die kubiese houer wat dubbeld hierdie volume waspoeier kan hou.

9. 'n Kubus het sye met lengte k eenhede.

   a) Beskryf die effek op die volume van die kubus as die hoogte verdrievoudig word.

   b) As al drie afmetings van die kubus verdrievoudig word, bepaal die effek op die buite-oppervlakte van die kubus.

   c) As al drie afmetings op die kubus verdrievoudig word, bepaal die effek op die volume.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26FT 2. 26FV 3a. 26FW 3b. 26FX 3c. 26FY 4. 26FZ
5. 26G2 6. 26G3 7. 26G4 8. 26G5 9. 26G6

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 8

Euklidiese meetkunde

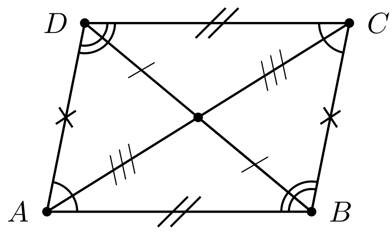
8.1 Hersiening EME56

Parallelogram EME57

'n **Parallelogram** is 'n vierhoek met beide pare teenoorstaande sye ewewydig.

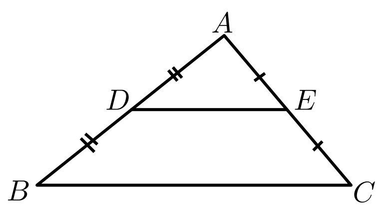
Opsomming van die eienskappe van 'n parallelogram:

- Beide pare teenoorstaande sye is ewewydig.
- Beide pare teenoorstaande sye is ewe lank.
- Beide pare teenoorstaande hoeke is ewe groot.
- Beide hoeklyne halveer mekaar.



Die middelpuntstelling EME58

Die lyn wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die derde sy en gelyk aan die helfte van die lengte van die derde sy.

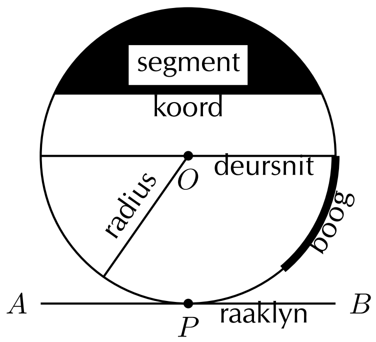


Gegee: $AD = DB$ en $AE = EC$. Dan kan ons tot die gevolgtrekking kom dat $DE \parallel BC$ en $DE = \frac{1}{2}BC$.

Terminologie

Die volgende terme word gereeld gebruik wanneer ons verwys na sirkels:

- **Boog** — 'n gedeelte van die omtrek van 'n sirkel.
- **Koord** — 'n reguitlyn wat die eindpunte van 'n boog verbind.
- **Omtrek** — grenslyn van die sirkel.
- **Radius** (r) — enige reguitlyn vanaf die middelpunt van 'n sirkel tot by 'n punt op die omtrek.
- **Middellyn** — 'n spesiale koord wat deur die middelpunt van die sirkel gaan. 'n Midellyn is 'n reguitlynsegment van een punt op die omtrek na 'n ander punt op die omtrek en wat deur die middelpunt van die sirkel gaan.
- **Segment** — 'n deel van die sirkel wat afgesny word deur 'n koord; 'n koord verdeel 'n sirkel in twee segmente.
- **Raaklyn** — 'n reguitlyn wat die sirkel slegs in een punt op die omtrek ontmoet.



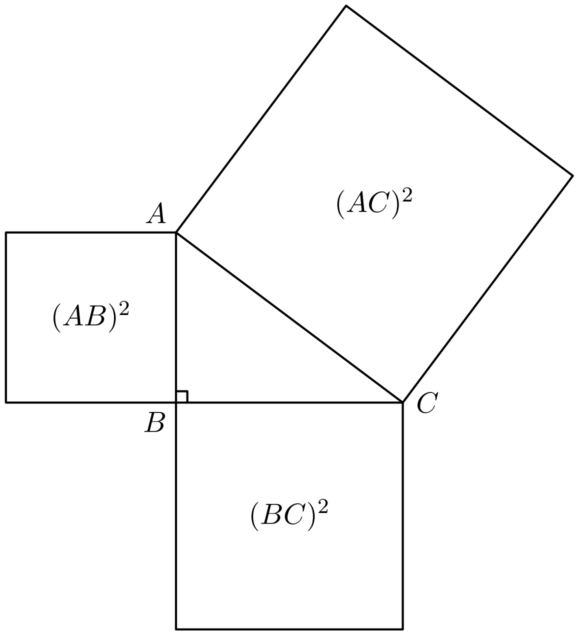
Sien video: 26G7 op www.everythingmaths.co.za

Aksiomas

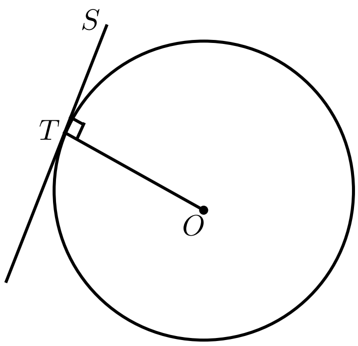
'n Aksioma is 'n gevestigde en algemeen aanvaarde beginsel. Vir hierdie afdeling, is die volgende aanvaarde aksiomas.

1. Die stelling van Pythagoras lui dat die vierkant op die skuinssy van 'n reghoekige driehoek is gelyk aan die som van die vierkante op die ander twee sye.

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$



2. 'n Raaklyn is loodreg op die radius ($OT \perp ST$), getrek na die punt van kontak met die sirkel.



Stellings

EME5B

'n Stelling is 'n hipotese (vermoede) wat as waar getoon kan word met behulp van aanvaarde wiskundige bewerkings en argumente. 'n Bewys is die proses waardeur getoon word 'n stelling is korrek.

Die omgekeerde stelling is die omruiling van die hipotese en die gevolgtrekking. Byvoorbeeld, gegee die stelling "as A, dan B", die omgekeerde is "as B, dan A".

Stelling: Loodregte lyn vanaf die middelpunt van die sirkel na 'n koord, halveer die koord

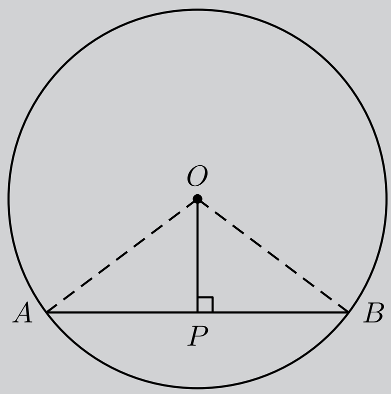
STELLING

As 'n lyn getrek word vanaf die middelpunt van 'n sirkel loodreg op 'n koord, dan halveer dit die koord.

(Rede: $\perp$ vanaf middelpunt halveer koord)

Gegee:

Sirkel met middelpunt O en lyn OP loodreg op koord AB.



Benodig om te bewys:

$AP = PB$

BEWYS

Trek OA en OB.

In $\triangle OPA$ en in $\triangle OPB$,

$$\begin{aligned} OA^2 &= OP^2 + AP^2 && \text{(Pythagoras)} \\ OB^2 &= OP^2 + BP^2 && \text{(Pythagoras)} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} OA &= OB && \text{(gelyke radii)} \\ \therefore AP^2 &= BP^2 \\ \therefore AP &= BP \end{aligned}$$

Dus OP halveer AB.

Alternatiewe bewys:

In $\triangle OPA$ en in $\triangle OPB$,

$$\begin{aligned} O\hat{P}A &= O\hat{P}B && \text{(gegee } OP \perp AB) \\ OA &= OB && \text{(gelyke radii)} \\ OP &= OP && \text{(gemene sy)} \\ \therefore \triangle OPA &\equiv \triangle OPB && \text{(RSS)} \\ \therefore AP &= PB \end{aligned}$$

Dus OP halveer AB.

(BEWYS NIE VIR EKSAMENS) Omgekeerde: Lyn vanaf middelpunt van die sirkel na die middelpunt van die koord, is loodreg op die koord

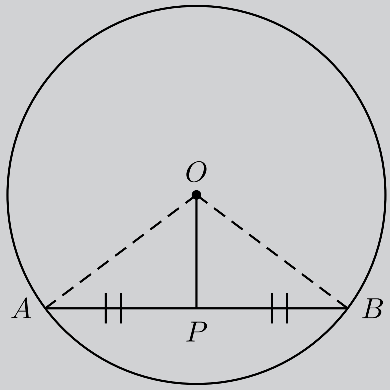
STELLING

As 'n lyn getrek word vanaf die middelpunt van die sirkel na die middelpunt van 'n koord, dan sal die lyn loodreg op die koord wees.

(Rede: lyn vanaf middelpunt van sirkel na middelpunt van die koord $\perp$)

Gegee:

Sirkel met middelpunt O en lyn OP na middelpunt P op koord AB.



Benodig om te bewys:

$OP \perp AB$

BEWYS

Trek OA en OB.

In $\triangle OPA$ en in $\triangle OPB$,

$$\begin{array}{rl} OA = OB & \text{(gelyke radii)} \\ AP = PB & \text{(gegee)} \\ OP = OP & \text{(gemene sy)} \\ \therefore \triangle OPA \equiv \triangle OPB & \text{(SSS)} \\ \therefore O\hat{P}A = O\hat{P}B & \\ \text{en } O\hat{P}A + O\hat{P}B = 180° & (\angle\text{e op reguitlyn}) \\ \therefore O\hat{P}A = O\hat{P}B = 90° & \end{array}$$

Dus $OP \perp AB$.

Sien video: 26G8 op www.everythingmaths.co.za

Stelling: Loodregte halveerlyn van 'n koord gaan deur die middelpunt van die sirkel

STELLING

As 'n loodregte halveerlyn van 'n koord getrek word, dan sal die lyn deur die middelpunt van die sirkel gaan.

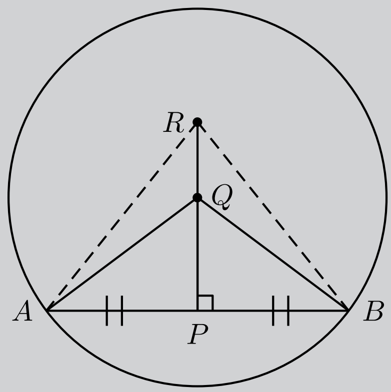
(Rede: $\perp$ halveerlyn deur middelpunt)

Gegee:

Sirkel met middelpunt P op koord AB.

Lyn QP word getrek sodat $Q\hat{P}A = Q\hat{P}B = 90°$.

Lyn RP word getrek sodat $R\hat{P}A = R\hat{P}B = 90°$.



Benodig om te bewys:

Sirkel se middelpunt O lê op die lyn PR

BEWYS

Trek lyne QA en QB.

Trek lyne RA en RB.

In $\triangle QPA$ en in $\triangle QPB$,

$$\begin{aligned} AP &= PB && \text{(gegee)} \\ QP &= QP && \text{(gemene sy)} \\ Q\hat{P}A = Q\hat{P}B &= 90° && \text{(gegee)} \\ \therefore \triangle QPA &\equiv \triangle QPB && \text{(SHS)} \\ \therefore QA &= QB \end{aligned}$$

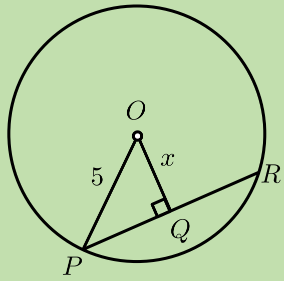
Soortgelyk kan dit getoon word dat in $\triangle RPA$ en in $\triangle RPB$, $RA = RB$.

Ons kom tot die gevolgtrekking dat al die punte wat ewe ver is van A en B sal lê op lyn PR verleng. Dus die middelpunt O, wat ewe ver is van alle punte op die omtrek, moet ook op die lyn PR lê.

Uitgewerkte voorbeeld 1: Loodregte lyn vanaf sirkelmiddelpunt halveer die koord

VRAAG

Gegee $OQ \perp PR$ en $PR = 8$ eenhede, bepaal die waarde van x.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik stellings en die gegewe inligting om al die gelyke hoeke en sye in die diagram te vind

$PQ = QR = 4$ (⊥ vanaf mid.pt halveer koord)

Stap 2: Los op vir x

In $\triangle OQP$:

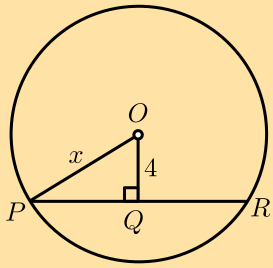
$$\begin{aligned} PQ &= 4 && \text{(}\perp \text{ vanaf mid.pt halveer koord)} \\ OP^2 &= OQ^2 + QP^2 && \text{(Pythagoras)} \\ 5^2 &= x^2 + 4^2 \\ \therefore x^2 &= 25 - 16 \\ x^2 &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

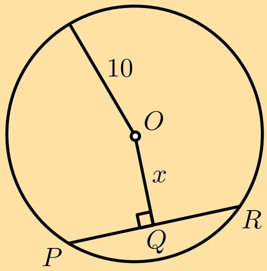
$x = 3$ eenhede.

Oefening 8 – 1: Loodregte lyn van die middelpunt halveer die koord

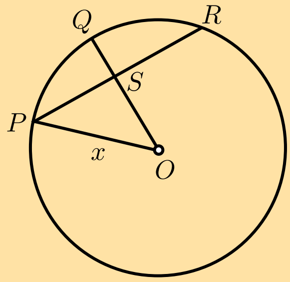
1. In die sirkel met middelpunt O, $OQ \perp PR$, $OQ = 4$ eenhede en $PR = 10$. Bepaal x.



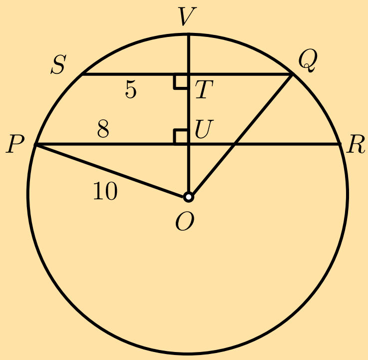
2. In die sirkel met middelpunt O en radius $= 10$ eenhede, $OQ \perp PR$ en $PR = 8$. Bepaal x.



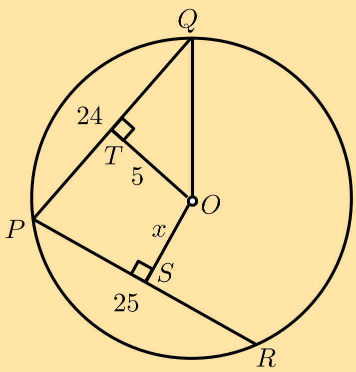
3. In die sirkel met middelpunt O, $OQ \perp PR$, $PR = 12$ eenhede en $SQ = 2$ eenhede. Bepaal x.



4. In die sirkel met middelpunt O, $OT \perp SQ$, $OT \perp PR$, $OP = 10$ eenhede, $ST = 5$ eenhede en $PU = 8$ eenhede. Bepaal TU.



5. In die sirkel met middelpunt O, $OT \perp QP$, $OS \perp PR$, $OT = 5$ eenhede, $PQ = 24$ eenhede en $PR = 25$ eenhede. Bepaal $OS = x$.



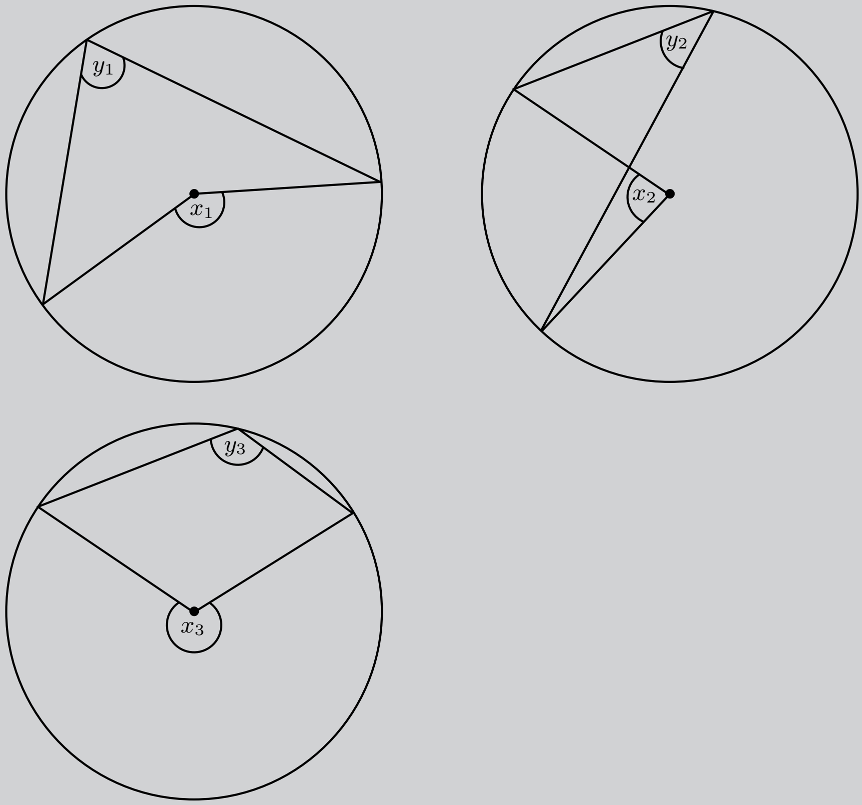
Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26G9 2. 26GB 3. 26GC 4. 26GD 5. 26GF

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Hoeke onderspan deur 'n boog by die middelpunt en die omtrek van 'n sirkel

1. Meet hoeke x en y in elk van die volgende sketse, noukerig met 'n gradeboog:



2. Voltooi die tabel:

x	y

3. Gebruik jou resultate om 'n vermoede te formuleer oor die verwantskap tussen hoeke onderspan deur 'n boog by die middelpunt van 'n sirkel en hoeke by die omtrek van 'n sirkel.

4. Trek nou drie van jou eie soortgelyke diagramme en meet die hoeke om jou vermoede te kontroleer.

Stelling: Hoek by die middelpunt van 'n sirkel is tweemaal die grootte van die hoek by die omtrek van die sirkel

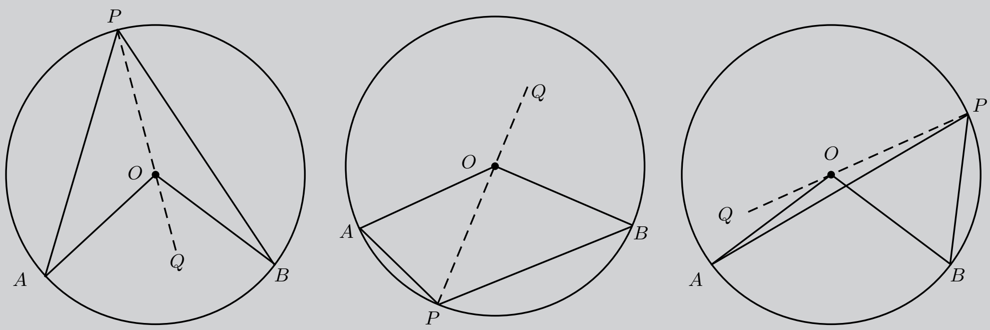
STELLING

As 'n boog 'n hoek by die middelpunt van 'n sirkel en op die omtrek onderspan, dan is die grootte van die hoek by die middelpunt tweemaal die grootte van die hoek by die omtrek.

(Rede: $\angle$ by mid.pt $= 2\angle$ op omtrek)

Gegee:

Sirkel met middelpunt O, boog AB onderspan $A\hat{O}B$ by die middelpunt van die sirkel, en $A\hat{P}B$ by die omtrek.



Benodig om te bewys:

$A\hat{O}B = 2A\hat{P}B$

BEWYS

Trek PO verleng na Q en laat $A\hat{O}Q = \hat{O}_1$ en $B\hat{O}Q = \hat{O}_2$.

$$\begin{aligned}
\hat{O}_1 &= A\hat{P}O + P\hat{A}O && \text{(buitehoek } \angle\triangle = \text{som van tst binnehoeke)}\\
\text{en } A\hat{P}O &= P\hat{A}O && \text{(gelyke radii, gelykbenige } \triangle APO\text{)}\\
\therefore \hat{O}_1 &= A\hat{P}O + A\hat{P}O &&\\
\hat{O}_1 &= 2A\hat{P}O &&
\end{aligned}$$

Soortgelyk, kan ons ook aantoon dat $\hat{O}_2 = 2B\hat{P}O$.

Vir die eerste twee diagramme hierbo getoon, het ons dat

$$\begin{aligned}
A\hat{O}B &= \hat{O}_1 + \hat{O}_2\\
&= 2A\hat{P}O + 2B\hat{P}O\\
&= 2(A\hat{P}O + B\hat{P}O)\\
\therefore A\hat{O}B &= 2(A\hat{P}B)
\end{aligned}$$

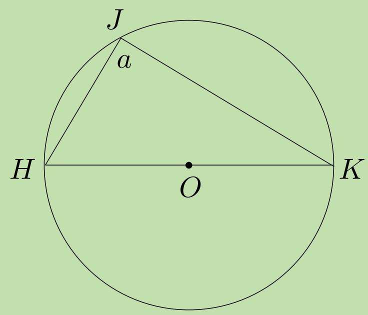
En vir die laaste diagram het ons dat

$$\begin{aligned}
A\hat{O}B &= \hat{O}_2 - \hat{O}_1\\
&= 2B\hat{P}O - 2A\hat{P}O\\
&= 2(B\hat{P}O - A\hat{P}O)\\
\therefore A\hat{O}B &= 2(A\hat{P}B)
\end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 2: Hoek by die middelpunt van die sirkel is tweemaal die hoek by die omtrek

VRAAG

Gegee HK, die middellyn van die sirkel gaan deur die middelpunt O.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik stellings en die gegewe inligting om al die gelyke hoeke en sye in die diagram te vind

Stap 2: Los op vir a

In $\triangle HJK$:

$$\begin{aligned} H\hat{O}K &= 180^\circ && (\angle \text{ op reguitlyn}) \\ &= 2a && (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek}) \\ \therefore 2a &= 180^\circ \\ a &= \tfrac{180^\circ}{2} \\ &= 90^\circ \end{aligned}$$

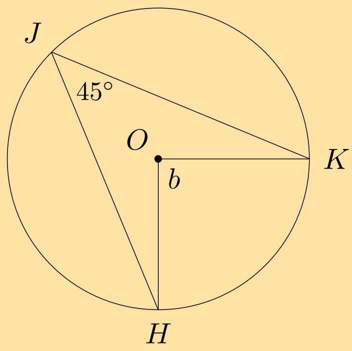
Stap 3: Gevolgtrekking

Die middellyn van die sirkel onderspan 'n regte hoek by die omtrek (Rede: hoek in 'n halfsirkel).

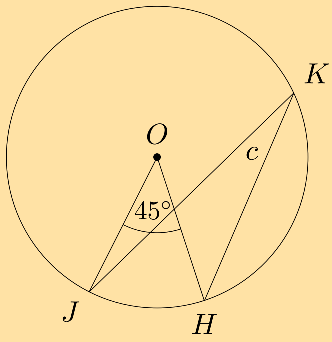
Oefening 8 – 2: Hoek by die middelpunt van die sirkel is tweemaal die hoek by die omtrek

Gegee O is die middelpunt van die sirkel, bepaal die onbekende hoek in elk van die volgende diagramme:

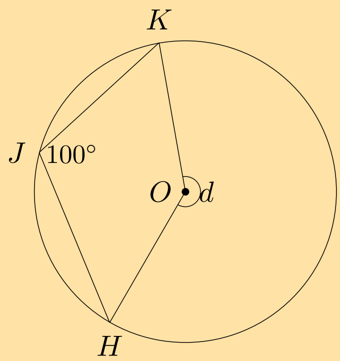
1.



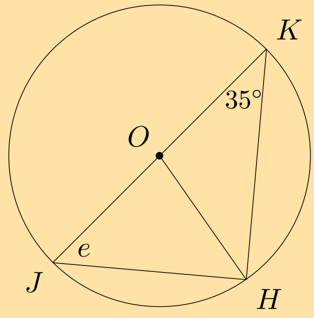
2.



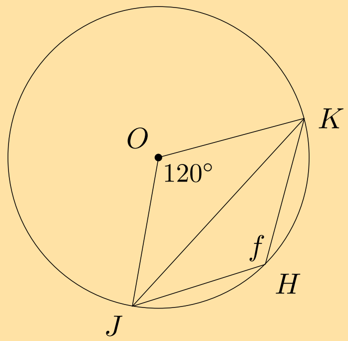
3.



4.



5.



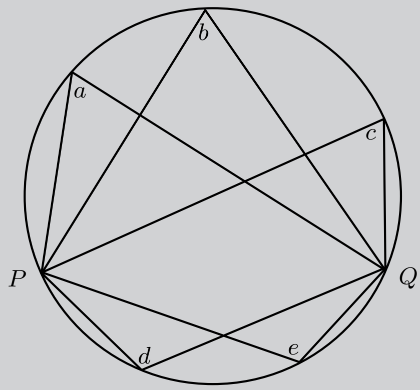
Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26GG 2. 26GH 3. 26GJ 4. 26GK 5. 26GM

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Omtrekshoeke in dieselfde sirkelsegment

1. Meet hoeke a, b, c, d en e in die diagram hieronder:



2. Kies enige twee punte op die omtrek van die sirkel en benoem hulle A en B .
3. Trek AP en BP, en meet $A\hat{P}B$
4. Trek AQ en BQ, en meet $A\hat{Q}B$
5. Wat neem jy waar? Maak 'n bewering omtrent hierdie tipes hoeke.

Stelling: Omtrekshoeke in dieselfde sirkelsegment is ewe groot

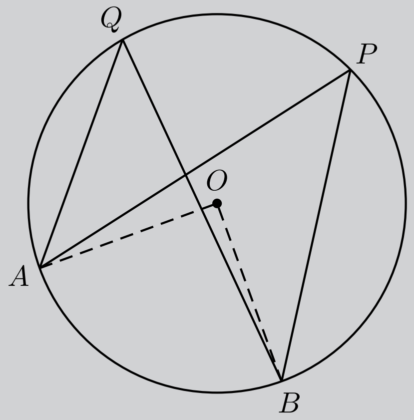
STELLING

Omtrekshoeke, onderspan deur 'n koord en aan dieselfde kant van die koord, is ewe groot.

(Rede: $\angle$s in dieselfde segment gelyk)

Gegee:

Sirkel met middelpunt O, en punte P en Q op die omtrek van die sirkel. Boog AB onderspan $A\hat{P}B$ en $A\hat{Q}B$ in dieselfde segment.



Benodig om te bewys:

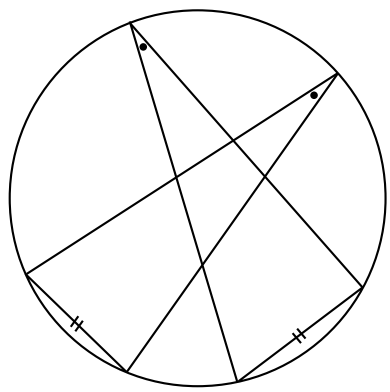
$A\hat{P}B = A\hat{Q}B$

BEWYS

$$\begin{aligned} A\hat{O}B &= 2A\hat{P}B && (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek}) \\ A\hat{O}B &= 2A\hat{Q}B && (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek}) \\ \therefore 2A\hat{P}B &= 2A\hat{Q}B \\ A\hat{P}B &= A\hat{Q}B \end{aligned}$$

Gelyke boë onderspan ewe groot hoeke

Van die stelling hierbo kan ons aflei dat as omtrekshoeke van 'n sirkel onderspan word deur boë van dieselfde lengte, sal die hoeke ewe groot wees. In die figuur hieronder, let daarop dat as ons die twee koorde van dieselfde lengte nader en nader aanmekaar skuif totdat hulle oorvleuel, sal ons dieselfde situasie hê as in die stelling hierbo. Dit toon dat hoeke onderspan deur boë van dieselfde lengte, ook ewe groot is.



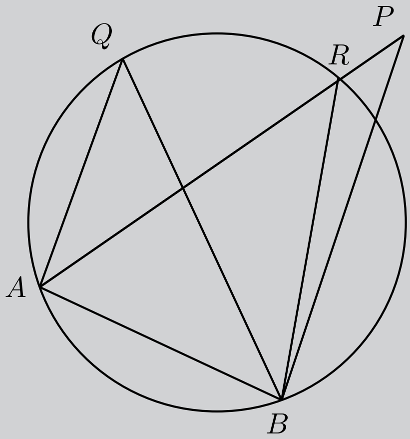
(BEWYS NIE VIR EKSAMENS) Omgekeerde: Konsikliese punte

STELLING

As 'n lynsegment twee gelyke hoeke by twee verskillende punte aan dieselfde kant van die lynsegment onderspan, is hierdie vier punt konsiklies (lê hulle op 'n sirkel).

Gegee:

Lynsegment AB sonderspan gelyke hoeke by punte P en Q aan dieselfde kant van die lynsegment AB.



Benodig om te bewys:

A, B, P en Q lê op die sirkel.

BEWYS

Bewys deur teenstelling:

Punte op die omtrek van 'n sirkel: ons weet daar is net twee moontlike opsies met betrekking tot 'n spesifieke punt - dit lê óf op die omtrek óf dit lê nie op die omtrek nie.

Ons neem aan dat die punt P nie op die omtrek lê nie.

Ons trek 'n sirkel wat AP sny by R en wat gaan deur A, B en Q.

$$\begin{aligned}
A\hat{Q}B &= A\hat{R}B && (\angle\text{e in dieselfde segment gelyk}) \\
\text{maar } A\hat{Q}B &= A\hat{P}B && (\text{gegee}) \\
\therefore A\hat{R}B &= A\hat{P}B && \\
\text{maar } A\hat{R}B &= A\hat{P}B + R\hat{B}P && (\text{buitehoek van } \triangle = \text{som van tst binnehoeke}) \\
\therefore R\hat{B}P &= 0^\circ &&
\end{aligned}$$

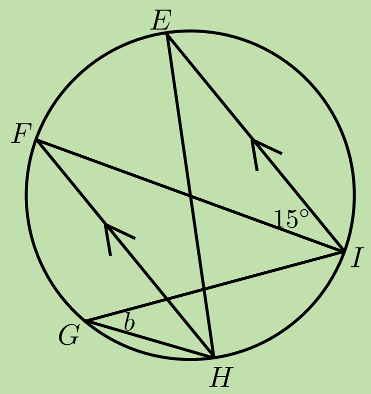
Dus moet die aanname dat die sirkel nie deur punt P loop nie vals wees.

Ons kan dus aanneem A, B, Q en P lê op die sirkel (A, B, Q en P is konsiklies).

Uitgewerkte voorbeeld 3: Konsikliese punte

VRAAG

Gegee $FH \parallel EI$ en $E\hat{I}F = 15°$, bepaal die waarde van b.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik stellings en die gegewe inligting om al die gelyke hoeke in die diagram te vind

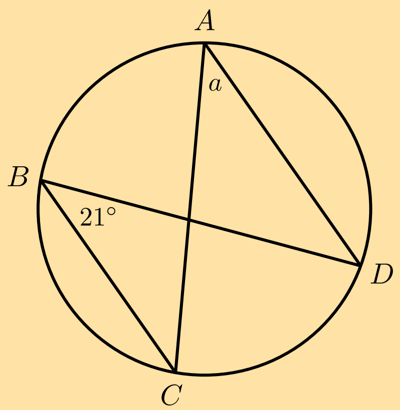
Stap 2: Los op vir b

$$
\begin{aligned}
H\hat{F}I &= 15° && \text{(verw. } \angle, FH \parallel EI) \\
\text{en } b &= H\hat{F}I && (\angle\text{e in dieselfde segment gelyk}) \\
\therefore b &= 15°
\end{aligned}
$$

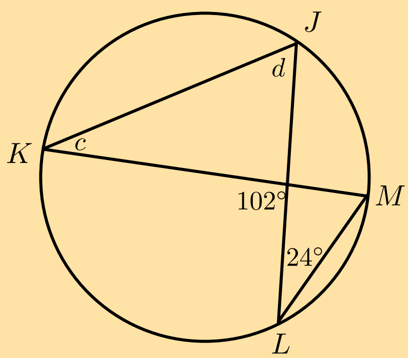
Oefening 8 – 3: Onderspande hoeke in die sirkelsegment

1. Bepaal die waardes van die onbekende hoeke.

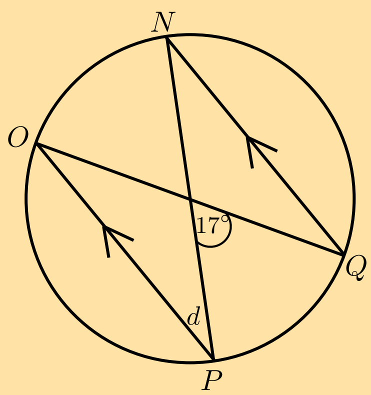
a)



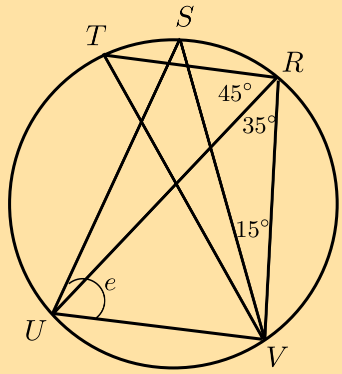
b)



c)



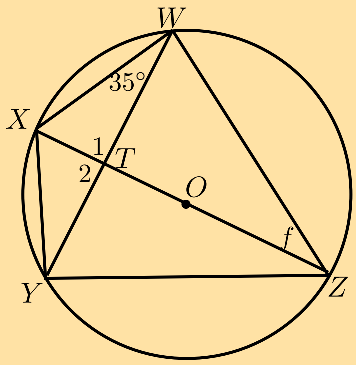
2.



a) Gegee $T\hat{V}S = S\hat{V}R$, bepaal die waarde van e.

b) Is TV die middellyn van die sirkel? Verduidelik jou antwoord.

3.



Gegee 'n sirkel met middelpunt O, $WT = TY$ en $X\hat{W}T = 35°$. Bepaal f.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26GN 1b. 26GP 1c. 26GQ 2. 26GR 3. 26GS

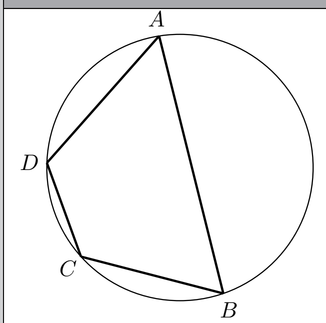
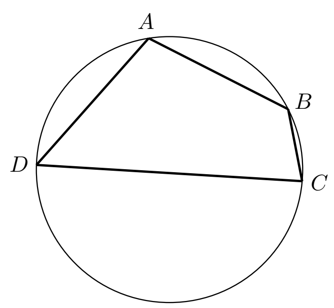
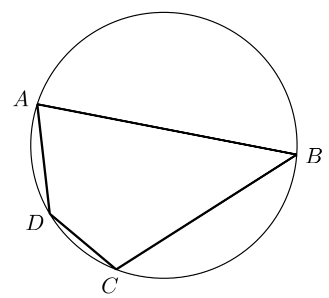
www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Koordevierhoeke

Koordevierhoeke is vierhoeke waar al vier punte op die omtrek van 'n sirkel lê (konsiklies is).

Ondersoek: Koordevierhoek

Beskou die onderstaande diagramme:

Sirkel 1	Sirkel 2	Sirkel 3
		

1. Voltooi die volgende:

   $ABCD$ is 'n koordevierhoek omdat ......

2. Voltooi die tabel:

	Sirkel 1	Sirkel 2	Sirkel 3
$\hat{A} =$			
$\hat{B} =$			
$\hat{C} =$			
$\hat{D} =$			
$\hat{A} + \hat{C} =$			
$\hat{B} + \hat{D} =$			

3. Gebruik jou resultate om 'n veronderstelling te maak oor die verhouding tussen hoeke van 'n koordevierhoek.

Stelling: Teenoorstaande binnehoeke van 'n koordevierhoek

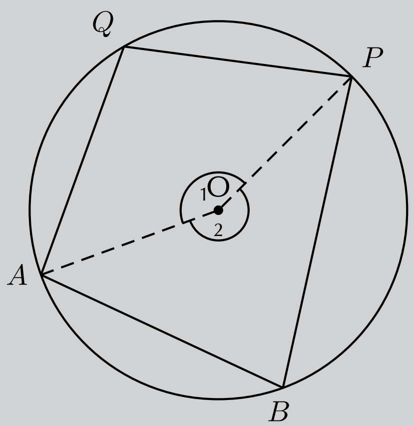
STELLING

Die teenoorstaande binnehoeke van 'n koordevierhoek is supplementêr.

(Rede: teenoorst. $\angle$e koordevierhoek.)

Gegee:

Sirkel met middelpunt O en met punte A, B, P en Q op die omtrek (dus $ABPQ$ is 'n koordevierhoek).



Benodig om te bewys:

$A\hat{B}P + A\hat{Q}P = 180°$ en $Q\hat{A}B + Q\hat{P}B = 180°$

BEWYS

Trek AO en OP. Benoem $\hat{O}_1$ en $\hat{O}_2$.

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 &= 2A\hat{B}P && (\angle \text{ by mid. pt } = 2\angle \text{ by omtrek}) \\ \hat{O}_2 &= 2A\hat{Q}P && (\angle \text{ by mid. pt } = 2\angle \text{ by omtrek}) \\ \text{en } \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= 360° && (\angle\text{e om 'n punt}) \\ \therefore 2A\hat{B}P + 2A\hat{Q}P &= 360° \\ A\hat{B}P + A\hat{Q}P &= 180° \end{aligned}$$

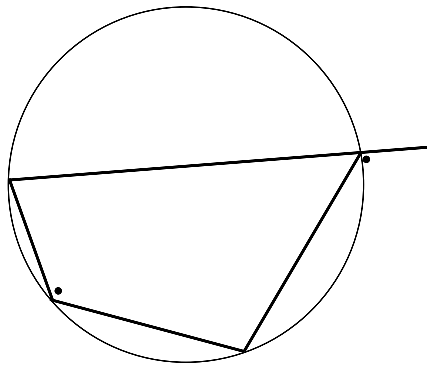
Ons kan net so wys dat $Q\hat{A}B + Q\hat{P}B = 180°$.

Omgekeerde stelling: teenoorstaande binnehoeke van ’n vierhoek

As die teenoorstaande hoeke van ’n vierhoek supplementêr is, dan is dit ’n koordevierhoek.

Buitehoeke van ’n koordevierhoek

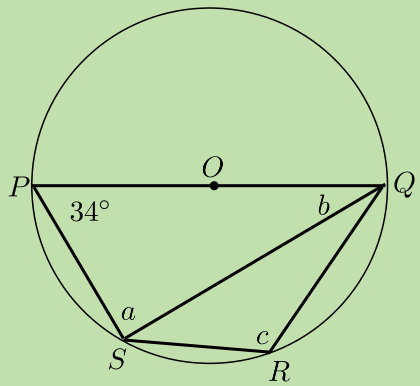
As ’n vierhoek ’n koordevierhoek is, dan is die buitehoek gelyk aan die teenoorstaande binnehoek.



Uitgewerkte voorbeeld 4: Teenoorstaande binnehoeke van ’n koordevierhoek

VRAAG

Gegee ’n sirkel met middelpunt O en ’n koordevierhoek $PQRS$. SQ is getrek en $S\hat{P}Q = 34°$. Bepaal die waardes van a, b en c.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik stellings en die gegewe inligting om al die gelyke hoeke in die skets te vind

Stap 2: Los op vir b

$$\begin{aligned} S\hat{P}Q + c &= 180^\circ & &\text{(teenoorst. } \angle\text{e koordevierhoek supp.)} \\ \therefore c &= 180^\circ - 34^\circ \\ &= 146^\circ \end{aligned}$$

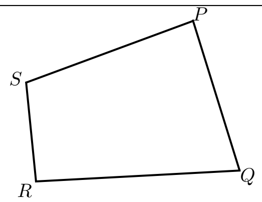
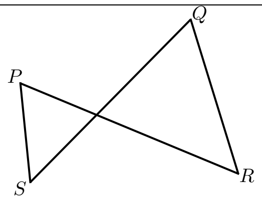
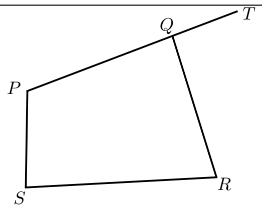
$$a = 90^\circ \qquad (\angle \text{ in 'n halfsirkel})$$

In $\triangle PSQ$:

$$\begin{aligned} a + b + 34^\circ &= 180^\circ & &(\angle \text{ som van } \triangle) \\ \therefore b &= 180^\circ - 90^\circ - 34^\circ \\ &= 56^\circ \end{aligned}$$

Metodes om te bewys dat 'n vierhoek 'n koordevierhoek is

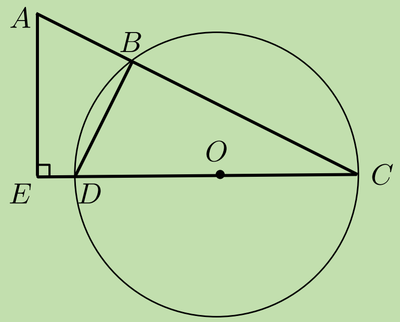
Daar is drie maniere om te bewys dat 'n vierhoek 'n koordevierhoek is:

	Metode om te bewys	Rede
	As $\hat{P} + \hat{R} = 180^\circ$ of $\hat{S} + \hat{Q} = 180^\circ$, dan is $PQRS$ is 'n koordevierhoek	tst. binnehoeke suppl.
	As $\hat{P} = \hat{Q}$ of $\hat{S} = \hat{R}$, dan is $PQRS$ 'n koordevierhoek	hoeke in dieselfde seg. is gelyk
	As $T\hat{Q}R = \hat{S}$, dan is $PQRS$ 'n koordevierhoek	buitehoek gelyk aan tst binnehoek

Uitgewerkte voorbeeld 5: Om te bewys dat 'n vierhoek 'n koordevierhoek is

VRAAG

Bewys $ABDE$ is 'n koordevierhoek.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik stellings en die gegewe inligting om al die gelyke hoeke in die skets te vind

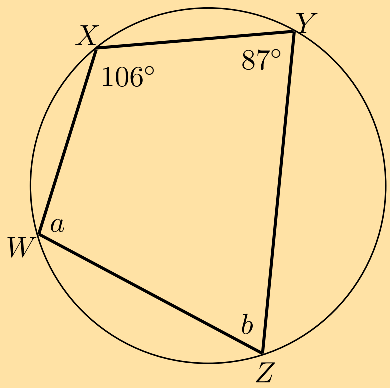
Stap 2: Bewys dat $ABDE$ is 'n koordevierhoek

$D\hat{B}C = 90^\circ$	($\angle$ in 'n halfsirkel)
en $\hat{E} = 90^\circ$	(gegee)
$\therefore D\hat{B}C = \hat{E}$	
$\therefore ABDE$ is 'n koordevierhoek	(buitehoek = teenoorst. binne $\angle$)

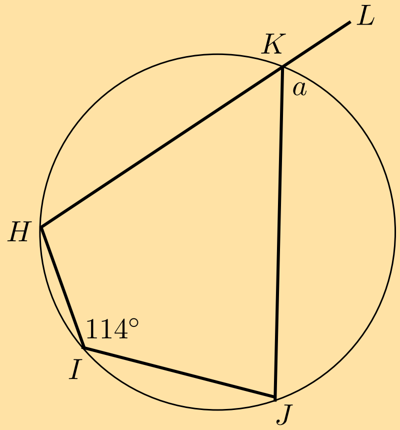
Oefening 8 – 4: Koordevierhoeke

1. Vind die waardes van die onbekende hoeke.

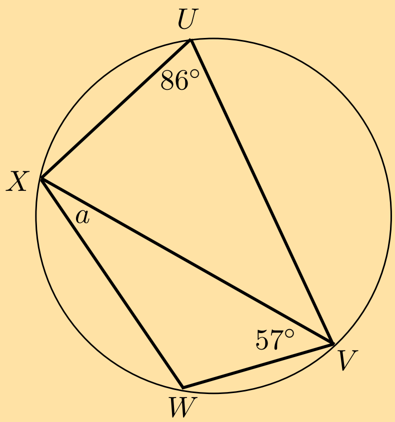
a)



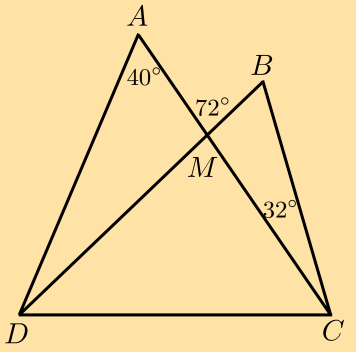
b)

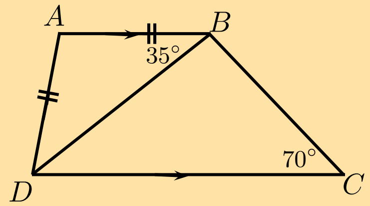


c)



2. Bewys dat $ABCD$ is 'n koordevierhoek.

a) 

b) 

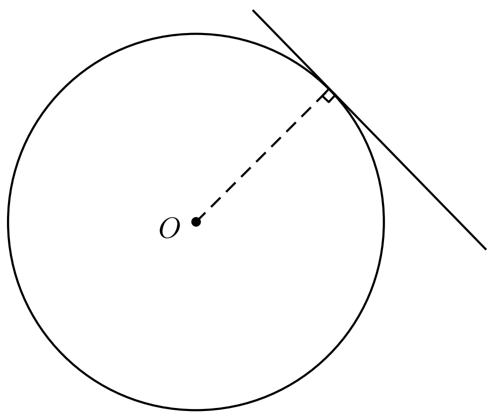
Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26GT 1b. 26GV 1c. 26GW 2a. 26GX 2b. 26GY

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Raaklyn aan 'n sirkel

'n Raaklyn is 'n lyn wat die omtrek van 'n sirkel raak in slegs een plek. Die radius van 'n sirkel is loodreg op die raaklyn by die raakpunt.



Stelling: Twee raaklyne wat van dieselfde punt buite 'n sirkel getrek word

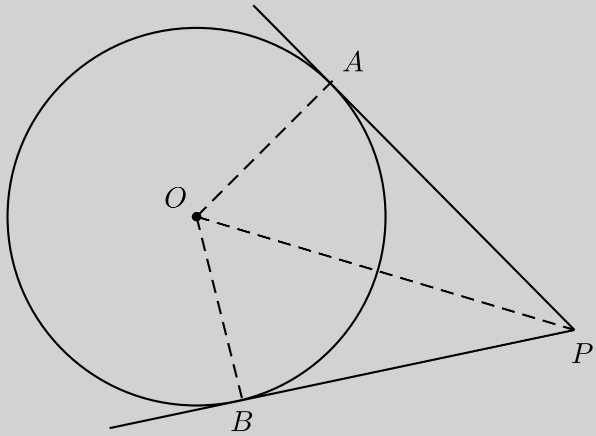
STELLING

As twee raaklyne vanaf dieselfde punt buite 'n sirkel getrek word, is hulle ewe lank.

(Rede: raaklyne vanaf dieselfde punt na omtrek)

Gegee:

Sirkel met middelpunt O en raaklyne PA en PB, waar A en B die onderskeie kontakpunte van die twee lyne is.



Benodig om te bewys:

$AP = BP$

BEWYS

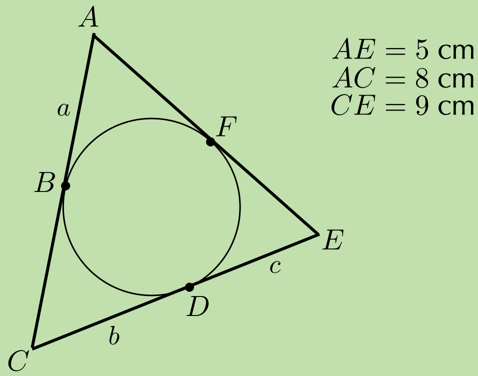
In $\triangle AOP$ en $\triangle BOP$,

$O\hat{A}P = O\hat{B}P = 90°$	(raaklyn $\perp$ radius)
$AO = BO$	(gelyke radii)
$OP = OP$	(gemene sy)
$\therefore \triangle AOP \equiv \triangle BOP$	(RSS)
$\therefore AP = BP$	

Uitgewerkte voorbeeld 6: Raaklyne vanaf dieselfde punt buite 'n sirkel

VRAAG

In die diagram hieronder is $AE = 5$ cm, $AC = 8$ cm en $CE = 9$ cm. Bepaal die waardes van a, b en c.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik stellings en die gegewe inligting om al die gelyke hoeke in die diagram te vind

Stap 2: Los op vir a, b en c

$$\begin{aligned}
AB = AF &= a && \text{(raaklyne van } A\text{)}\\
EF = ED &= c && \text{(raaklyne van } E\text{)}\\
CB = CD &= b && \text{(raaklyne van } C\text{)}\\
\therefore AE = a + c &= 5 &&\\
\text{en } AC = a + b &= 8 &&\\
\text{en } CE = b + c &= 9 &&
\end{aligned}$$

Stap 3: Los op vir onbekende veranderlikes met gelyktydige vergelykings

$$\begin{aligned}
a + c &= 5 && \ldots (1)\\
a + b &= 8 && \ldots (2)\\
b + c &= 9 && \ldots (3)
\end{aligned}$$

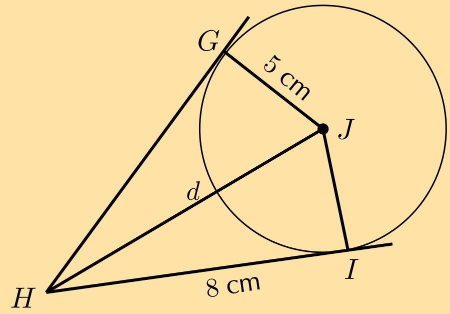
Trek vergelyking (1) van (2) af en vervang dan in vergelyking (3).

$$\begin{aligned}
(2) - (1) \quad b - c &= 8 - 5\\
&= 3\\
\therefore b &= c + 3\\
\text{Vervang in } (3) \quad c + 3 + c &= 9\\
2c &= 6\\
c &= 3\\
\therefore a &= 2\\
\text{en } b &= 6
\end{aligned}$$

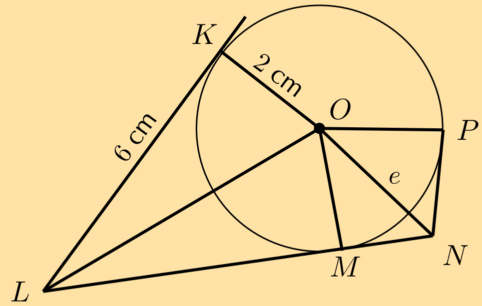
Oefening 8 – 5: Raaklyne aan 'n sirkel

Bepaal die waardes van die onbekende lengtes.

1.

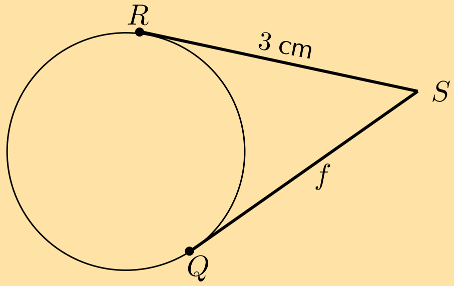


2.



$LN = 7{,}5$ cm

3.



Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26GZ 2. 26H2 3. 26H3

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Ondersoek: Raaklyn-koord

Beskou die diagramme hieronder:

Diagram 1

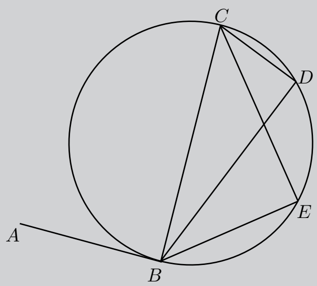


Diagram 2

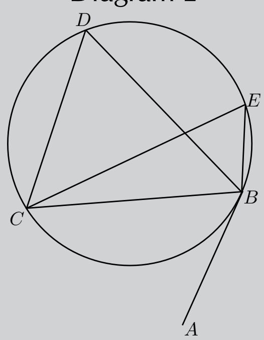
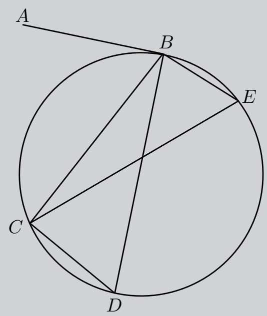


Diagram 3



1. Meet die volgende hoeke met 'n gradeboog en voltooi die tabel:

	Diagram 1	Diagram 2	Diagram 3
$A\hat{B}C =$			
$\hat{D} =$			
$\hat{E} =$			

2. Gebruik jou resultate om die volgende te voltooi: die hoek tussen 'n raaklyn aan 'n sirkel en 'n koord is . . . . . . aan die hoek in die teenoorstaande segment.

Stelling: Raaklyn-koord

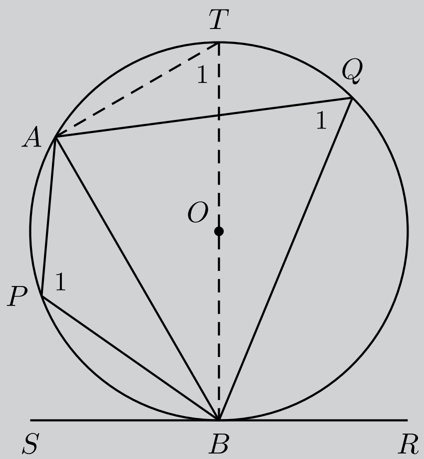
STELLING

Die hoek tussen 'n raaklyn aan 'n sirkel en 'n koord wat by die kontakpunt getrek word, is gelyk aan die hoek wat die koord onderspan in die teenoorstaande segment.

(Rede: raaklyn-koord)

Gegee:

Sirkel met middelpunt O en raaklyn SR wat die sirkel by B raak. Koord AB wat $\hat{P}_1$ en $\hat{Q}_1$ onderspan.



Benodig om te bewys:

1. $A\hat{B}R = A\hat{P}B$
2. $A\hat{B}S = A\hat{Q}B$

BEWYS

Trek middellyn BT en verbind T en A.

Laat $A\hat{T}B = T_1$.

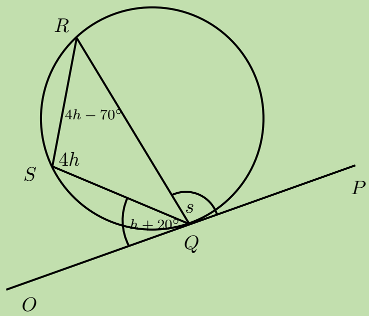
$$\begin{aligned} A\hat{B}S + A\hat{B}T &= 90^\circ && \text{(raaklyn } \perp \text{ radius)} \\ B\hat{A}T &= 90^\circ && (\angle \text{ in 'n halfsirkel}) \\ \therefore A\hat{B}T + T_1 &= 90^\circ && (\angle \text{ som van } \triangle BAT) \\ \therefore A\hat{B}S &= T_1 && \\ \text{maar } Q_1 &= T_1 && (\angle\text{e in dieselfde segment gelyk}) \\ \therefore Q_1 &= A\hat{B}S && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\hat{B}S + A\hat{B}R &= 180^\circ && (\angle\text{e op reguitlyn}) \\ \hat{Q}_1 + \hat{P}_1 &= 180^\circ && \text{(teenoorst. } \angle\text{e van koordevierhoek supp.)} \\ \therefore A\hat{B}S + A\hat{B}R &= Q_1 + P_1 && \\ \text{en } A\hat{B}S &= Q_1 && \\ \therefore A\hat{B}R &= P_1 && \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 7: Raaklyn-koord

VRAAG

Bepaal die waardes van h en s.



OPLOSSING

Stap 1: Gebruik stellings en die gegewe inligting om al die gelyke hoeke in die diagram te vind

Stap 2: Los op vir h

$$\begin{aligned} O\hat{Q}S &= S\hat{R}Q && \text{(raaklyn-koord)} \\ h + 20° &= 4h - 70° \\ 90° &= 3h \\ \therefore h &= 30° \end{aligned}$$

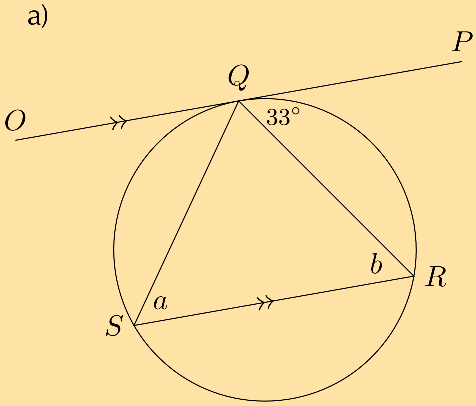
Stap 3: Los op vir s

$$\begin{aligned} P\hat{Q}R &= Q\hat{S}R && \text{(raaklyn-koord stelling)} \\ s &= 4h \\ &= 4(30°) \\ &= 120° \end{aligned}$$

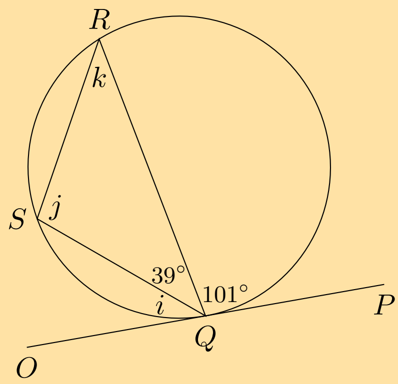
Oefening 8 – 6: Raaklyn-koord stelling

1. Bepaal die waardes van die onbekende simbole en gee redes vir jou antwoord.

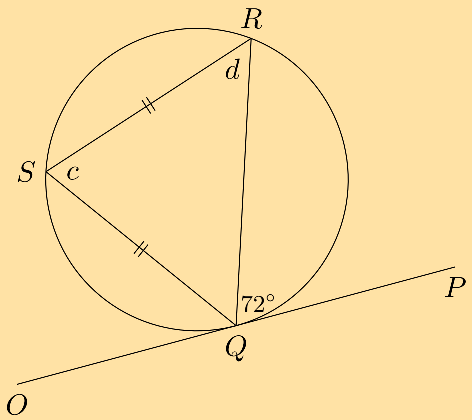
a)



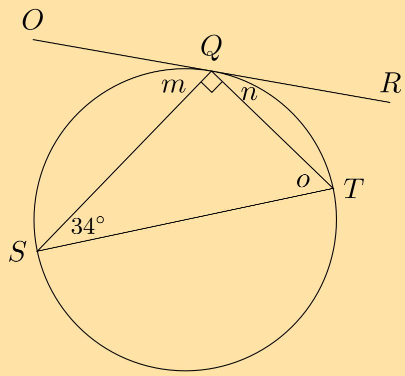
e)



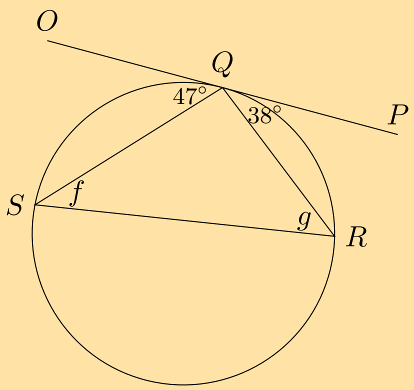
b)



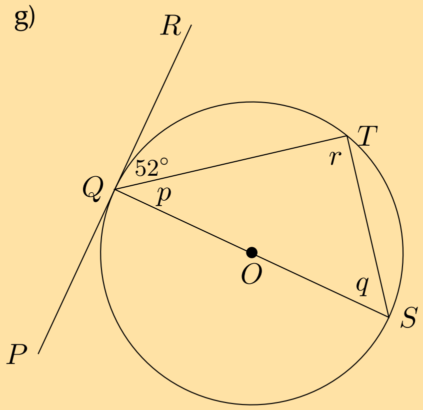
f)



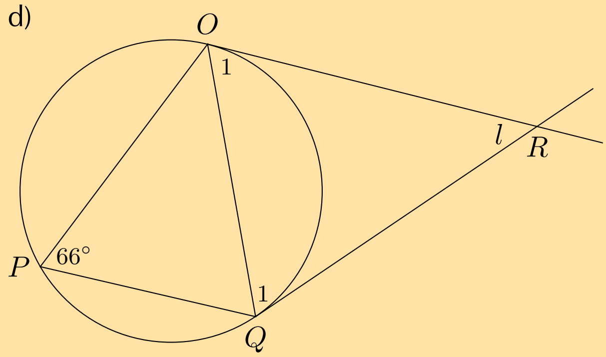
c)



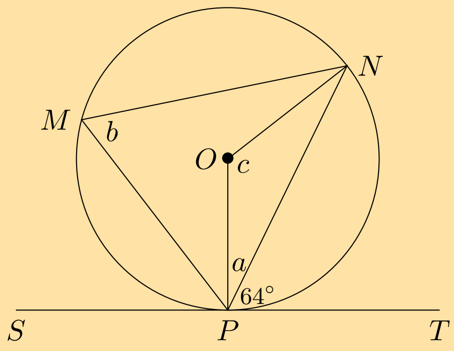
g)



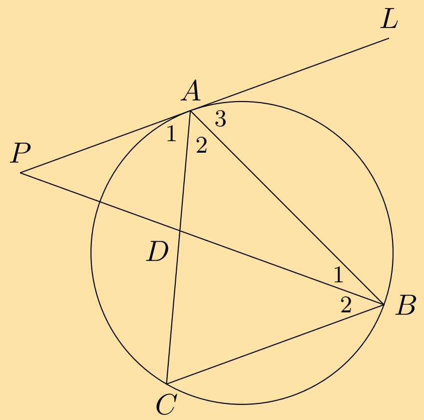
d)



2. O is die middelpunt van die sirkel en SPT is 'n raaklyn, met $OP \perp ST$. Bepaal a, b en c, met redes.



3.



Gegee $AB = AC$, $AP \parallel BC$ en $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$. Bewys.

a) PAL is 'n raaklyn aan die sirkel ABC.

b) AB is 'n raaklyn aan die sirkel ADP.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26H4 1b. 26H5 1c. 26H6 1d. 26H7 1e. 26H8 1f. 26H9
1g. 26HB 2. 26HC 3. 26HD

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

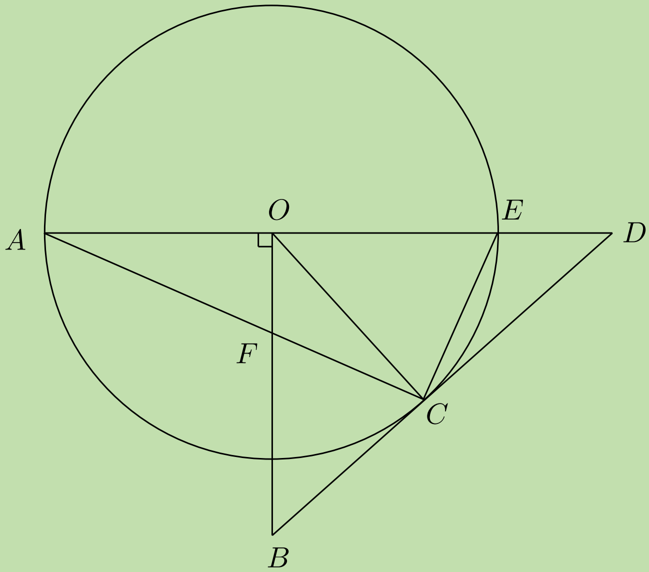
Omgekeerde: raaklyn-koord stelling

As 'n lyn deur die eindpunt van 'n koord geteken word sodat dit 'n hoek vorm wat gelyk is aan die hoek wat die koord in die alternatiewe segment onderspan, dan is die lyn 'n raaklyn aan die sirkel.

(Rede: $\angle$ tussen lyn en koord $= \angle$ in alt. seg.)

Uitgewerkte voorbeeld 8: Toepassing van stellings

VRAAG



BD is 'n raaklyn aan die sirkel met middelpunt O, met $BO \perp AD$.

Bewys dat:

1. $CFOE$ is 'n koordevierhoek
2. $FB = BC$
3. $\angle A\hat{O}C = 2B\hat{F}C$
4. Sal DC 'n raaklyn aan 'n sirkel wees wat deur C, F, O en E? Motiveer jou antwoord.

OPLOSSING

Stap 1: Bewys $CFOE$ is 'n koordevierhoek deur te wys dat die teenoorstaande binnehoeke supplementêr is

$BO \perp OD$	(gegee)
$\therefore F\hat{O}E = 90°$	
$F\hat{C}E = 90°$	($\angle$ in 'n halfsirkel)
$\therefore CFOE$ is 'n koordevierhoek	(teenoorst. $\angle$e suppl.)

Stap 2: Bewys dat BFC 'n gelykbenige driehoek is

Om te wys dat $FB = BC$, moet ons eers bewys dat $\triangle BFC$ 'n gelykbenige driehoek is deur te wys dat $B\hat{F}C = B\hat{C}F$.

$B\hat{C}F = C\hat{E}O$	(raaklyn-koord)
$C\hat{E}O = B\hat{F}C$	(buitehoek $\angle$ koordevierhoek $CFOE$)
$\therefore B\hat{F}C = B\hat{C}F$	
$\therefore FB = BC$	($\triangle BFC$ gelykbenige driehoek)

Stap 3: Bewys $A\hat{O}C = 2B\hat{F}C$

$$\begin{aligned} A\hat{O}C &= 2A\hat{E}C && (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek}) \\ \text{en } A\hat{E}C &= B\hat{F}C && (\text{buitehoek } \angle \text{ koordevierhoek } CFOE) \\ \therefore A\hat{O}C &= 2B\hat{F}C \end{aligned}$$

Stap 4: Bepaal of DC 'n raaklyn aan die sirkel deur C, F, O en E is

Bewys deur teenstelling.

Laat ons aanneem dat DC 'n raaklyn aan die sirkel wat deur die punte C, F, O en E is:

$$\therefore D\hat{C}E = C\hat{O}E \quad (\text{raaklyn-koord})$$

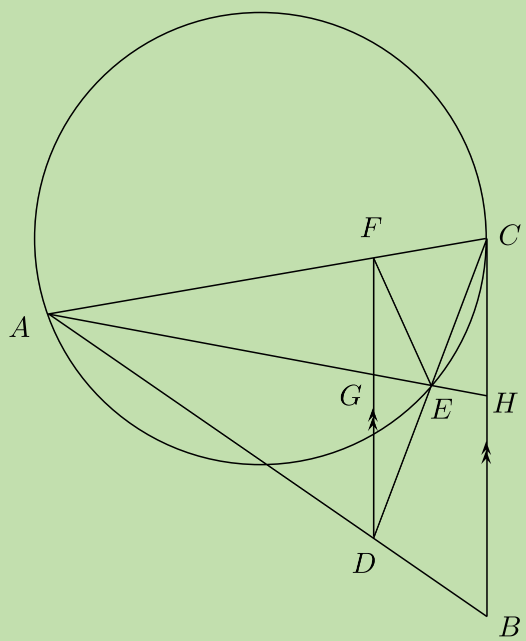
En deur die sirkel met middelpunt O en raaklyn BD te gebruik, het ons:

$$\begin{aligned} D\hat{C}E &= C\hat{A}E && (\text{raaklyn-koord}) \\ \text{but } C\hat{A}E &= \tfrac{1}{2}C\hat{O}E && (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek}) \\ \therefore D\hat{C}E &\neq C\hat{O}E \end{aligned}$$

Daarom is ons aanname vals en kan ons tot die gevolgtrekking kom dat DC is nie 'n raaklyn aan die sirkel deur C, F, O en E nie.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Toepassing van stellings

VRAAG



FD is parallel aan raaklyn CB

Bewys dat:

1. $FADE$ is 'n koordevierhoek
2. $F\hat{E}A = \hat{B}$

OPLOSSING

Stap 1: Bewys dat $FADE$ 'n koordevierhoek is deur hoeke in dieselfde segment te gebruik

$$\begin{array}{rl}
F\hat{D}C = D\hat{C}B & \text{(verw. } \angle\text{e } FD \parallel CB) \\
\text{en } D\hat{C}B = C\hat{A}E & \text{(raaklyn-koord)} \\
\therefore F\hat{D}C = C\hat{A}E & \\
\therefore FADE \text{ is 'n koordevierhoek} & (\angle\text{e in dieselfde segment gelyk})
\end{array}$$

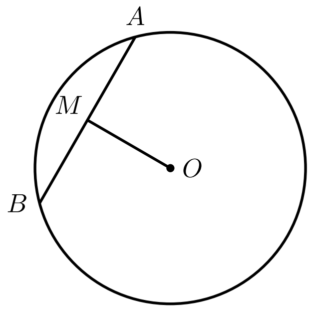
Stap 2: Bewys $F\hat{E}A = \hat{B}$

$$\begin{array}{rl}
F\hat{D}A = \hat{B} & \text{(ooreenk. } \angle\text{e } FD \parallel CB) \\
\text{en } F\hat{E}A = F\hat{D}A & (\angle\text{e koordevierhoek } FADE) \\
\therefore F\hat{E}A = \hat{B} &
\end{array}$$

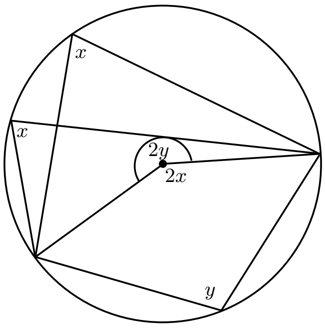
8.3 Opsomming EME5C

Sien aanbieding: 26HF op www.everythingmaths.co.za

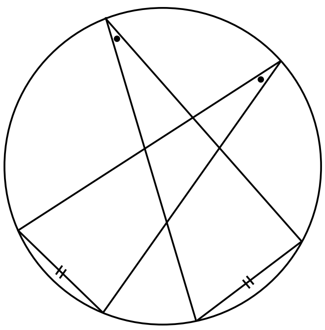
- **Boog** — 'n gedeelte van die omtrek van 'n sirkel.
- **Koord** — 'n reguitlyn wat die eindpunte van 'n boog verbind.
- **Omtrek** — grenslyn van die sirkel.
- **Radius** (r) — enige reguitlyn vanaf die middelpunt van 'n sirkel tot by 'n punt op die omtrek.
- **Middellyn** — 'n spesiale koord wat deur die middelpunt van die sirkel gaan. 'n Midellyn is 'n reguitlynsegment van een punt op die omtrek na 'n ander punt op die omtrek en wat deur die middelpunt van die sirkel gaan.
- **Segment** — 'n deel van die sirkel wat afgesny word deur 'n koord; 'n koord verdeel 'n sirkel in twee segmente.
- **Raaklyn** — 'n reguitlyn wat die sirkel slegs in een punt op die omtrek ontmoet.
- 'n Raaklyn is loodreg op die radius getrek vanaf die kontakpunt van die raaklyn met die sirkel.



- As O die middelpunt is en $OM \perp AB$, dan $AM = MB$.
- As O die middelpunt is en $AM = MB$, dan $A\hat{M}O = B\hat{M}O = 90°$.
- As $AM = MB$ en $OM \perp AB$, dan gaan $\Rightarrow MO$ deur die middelpunt O.

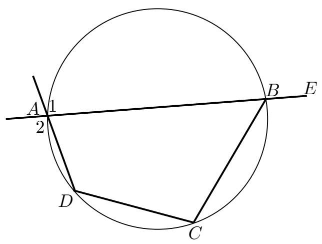


As ’n boog ’n hoek by die middelpunt van ’n sirkel en op die omtrek onderspan, dan is die grootte van die hoek by die middelpunt tweemaal die grootte van die hoek by die omtrek.

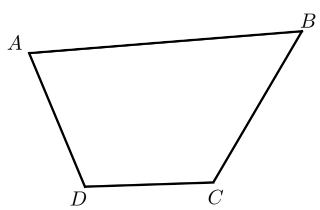


Hoeke by die omtrek wat onderspan word deur dieselfde boog (of deur gelyke boë) is ewe groot.

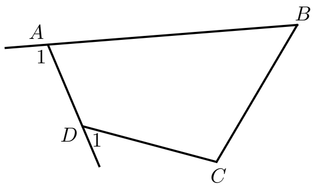
Die vier sye van ’n koordevierhoek $ABCD$ is koorde van die sirkel met middelpunt O.



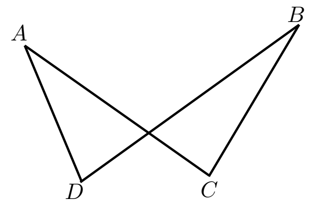
- $\hat{A} + \hat{C} = 180°$ (teenoorst. $\angle$e supp.)
- $\hat{B} + \hat{D} = 180°$ (teenoorst. $\angle$e supp.)
- $E\hat{B}C = \hat{D}$ (buitehoek koordevierhoek)
- $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{C}$ (regoorstaande hoeke, buitehoek koordevierhoek)



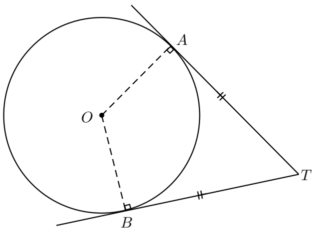
Om te bewys ’n vierhoek is ’n koordevierhoek: As $\hat{A} + \hat{C} = 180°$ of $\hat{B} + \hat{D} = 180°$, dan is $ABCD$ ’n koordevierhoek.



As $\hat{A}_1 = \hat{C}$ of $\hat{D}_1 = \hat{B}$, dan is $ABCD$ 'n koordevierhoek.

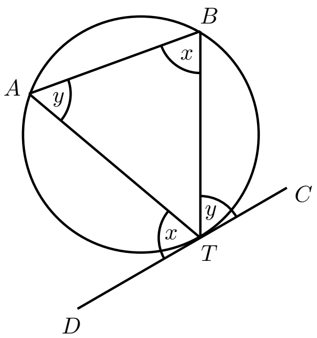


As $\hat{A} = \hat{B}$ of $\hat{C} = \hat{D}$, dan is $ABCD$ 'n koordevierhoek.



As AT en BT raaklyne is aan die sirkel O, dan

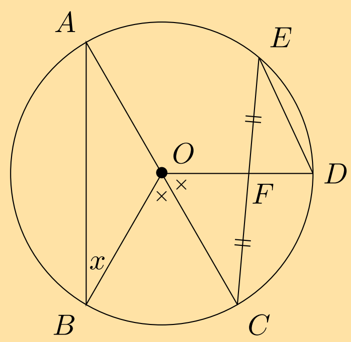
- $OA \perp AT$ (raaklyn $\perp$ radius)
- $OB \perp BT$ (raaklyn $\perp$ radius)
- $TA = TB$ (raaklyne vanaf dieselfde punt is ewe lank)



- As DC 'n raaklyn is, dan $D\hat{T}A = T\hat{B}A$ en $C\hat{T}B = T\hat{A}B$
- As $D\hat{T}A = T\hat{B}A$ of $C\hat{T}B = T\hat{A}B$, dan is DC 'n raaklyn wat raak by T

Oefening 8 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1.



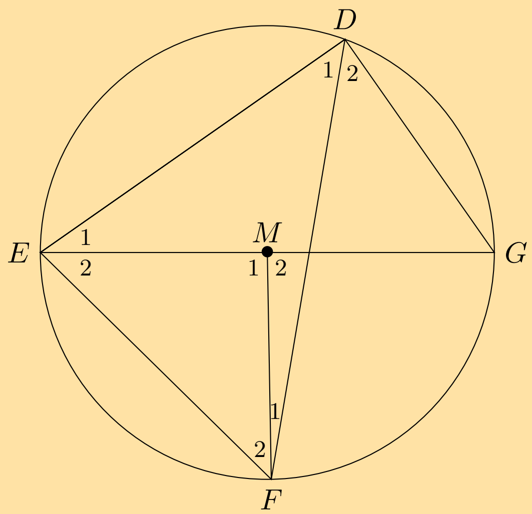
AOC is die middellyn van die sirkel met middelpunt O. F is die middelpunt van koord EC. $B\hat{O}C = C\hat{O}D$ en $\hat{B} = x$. Druk die volgende hoeke uit in terme van x, met vermelding van redes:

a) $\hat{A}$

b) $C\hat{O}D$

c) $\hat{D}$

2.



D, E, F en G is punte op die sirkel met middelpunt M. $\hat{F}_1 = 7°$ en $\hat{D}_2 = 51°$. Bepaal die groottes van die volgende hoeke, met vermelding van redes:

a) $\hat{D}_1$

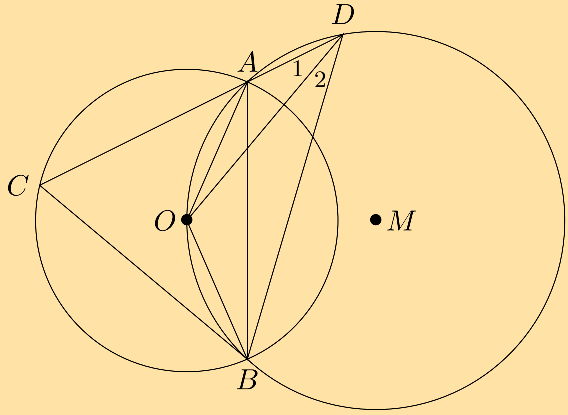
b) $\hat{M}_1$

c) $\hat{F}_2$

d) $\hat{G}$

e) $\hat{E}_1$

3.



O is 'n punt op die sirkel met middelpunt M. O is ook die middelpunt van 'n tweede sirkel. DA sny die kleiner sirkel by C en $\hat{D}_1 = x$. Druk die volgende hoeke uit in terme van x; met redes:

a) $\hat{D}_2$

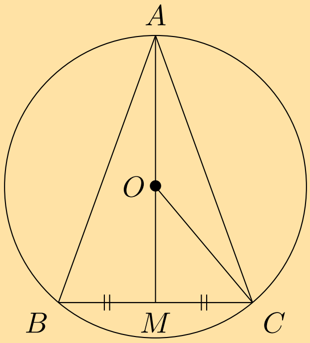
b) $O\hat{A}B$

c) $O\hat{B}A$

d) $A\hat{O}B$

e) $\hat{C}$

4.



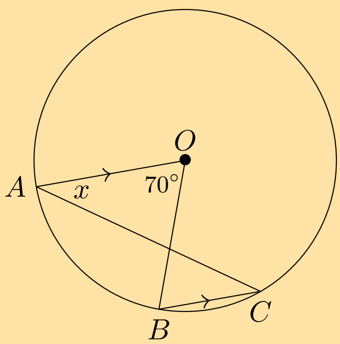
O is die middelpunt van die sirkel met radius 5 cm en koord $BC = 8$ cm. Bereken die lengtes van:

a) OM

b) AM

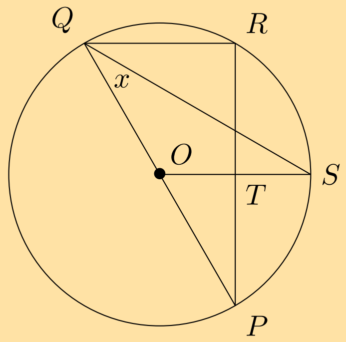
c) AB

5.



$AO \parallel CB$ in sirkel met middelpunt O. $A\hat{O}B = 70°$ en $O\hat{A}C = x$. Bereken die waarde van x, met opgaaf van redes.

6.



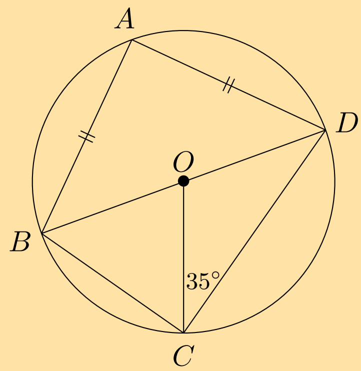
PQ is die middellyn van die sirkel met middelpunt O. SQ halveer $P\hat{Q}R$ en $P\hat{Q}S = x$.

a) Skryf nog twee hoeke neer wat ook gelyk is aan x.

b) Bereken $P\hat{O}S$ in terme van x, met opgaaf van redes.

c) Bewys dat OS 'n loodregte halveerlyn is van PR.

7.



$B\hat{O}D$ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. $AB = AD$ en $O\hat{C}D = 35°$. Bereken die waarde van die volgende, met redes:

a) $O\hat{D}C$

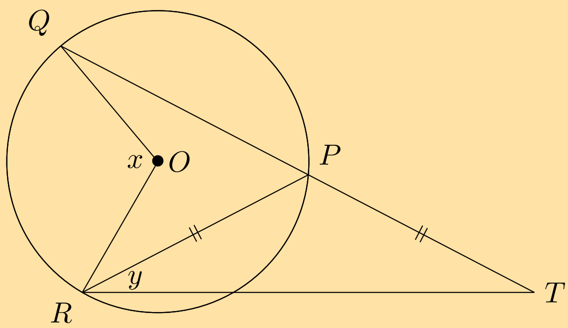
b) $C\hat{O}D$

c) $C\hat{B}D$

d) $B\hat{A}D$

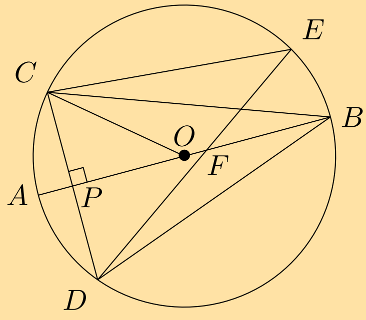
e) $A\hat{D}B$

8.



QP in die sirkel met middelpunt O, is verleng na T sodat $PR = PT$. Druk y uit in terme van x.

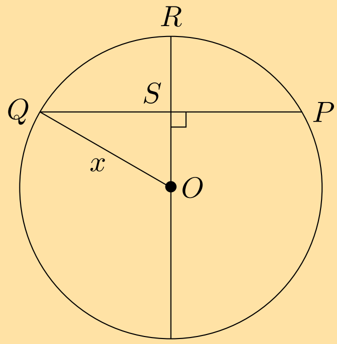
9.



O is die middelpunt van die sirkel met middellyn AB. $CD \perp AB$ by P en koord DE sny AB by F. Bewys dat:

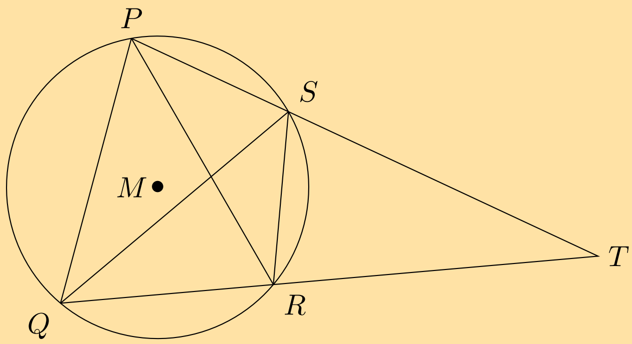
a) $C\hat{B}P = D\hat{P}B$
b) $C\hat{E}D = 2C\hat{B}A$
c) $A\hat{B}D = \frac{1}{2}C\hat{O}A$

10.



In die sirkel met middelpunt O, $OR \perp QP$, $PQ = 30$ mm en $RS = 9$ mm. Bepaal die lengte van OQ.

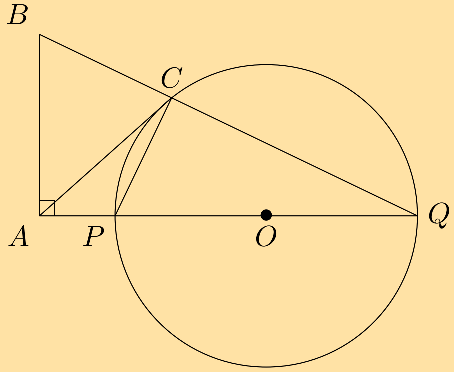
11.



P, Q, R en S is punte op die sirkel met middelpunt M. PS en QR word verleng en ontmoet by T. $PQ = PR$ en $P\hat{Q}R = 70°$.

a) Bepaal, met redes, nog drie hoeke gelyk aan $70°$.
b) As $Q\hat{P}S = 80°$, bereken $S\hat{R}T$, $S\hat{T}R$ en $P\hat{Q}S$.
c) Verduidelik hoekom PQ 'n raaklyn is aan die sirkel QST by punt Q.
d) Bepaal $P\hat{M}Q$.

12.



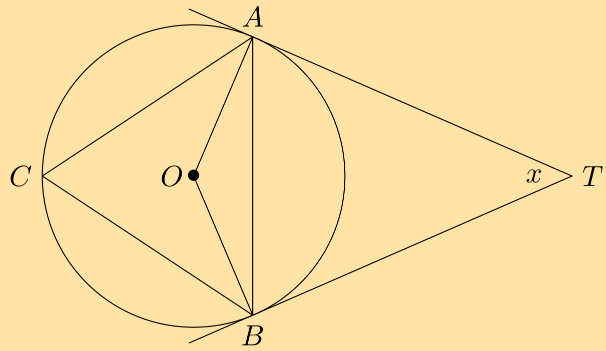
POQ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. QP is verleng na A en AC is 'n raaklyn aan die sirkel. $BA \perp AQ$ en BCQ is 'n reguitlyn. Bewys:

a) $P\hat{C}Q = B\hat{A}P$

b) $BAPC$ is 'n koordevierhoek

c) $AB = AC$

13.



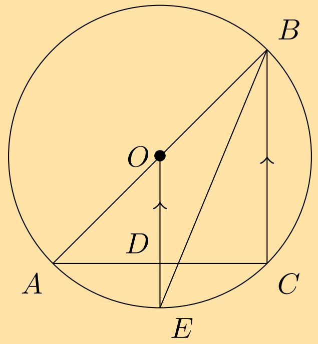
TA en TB is raaklyne aan die sirkel met middelpunt O. C is 'n punt op die omtrek van $A\hat{T}B = x$. Druk die volgende uit in terme van x, met vermelding van redes:

a) $A\hat{B}T$

b) $O\hat{B}A$

c) $\hat{C}$

14.



AOB is 'n middellyn van die sirkel $AECB$ met middelpunt O. $OE \parallel BC$ en sny AC by D.

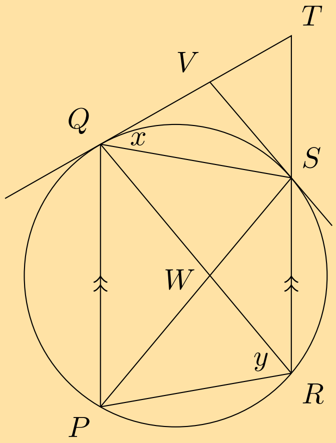
a) Bewys $AD = DC$

b) Toon dat $A\hat{B}C$ halveer word deur EB

c) As $O\hat{E}B = x$, druk $B\hat{A}C$ uit in terme van x

d) Bereken die radius van die sirkel as $AC = 10$ cm en $DE = 1$ cm

15.



PQ en RS is koorde van die sirkel en $PQ \parallel RS$. Die raaklyn aan die sirkel by Q ontmoet RS verleng by T. Die raaklyn by S ontmoet QT by V. QS en PR word getrek.

Laat $T\hat{Q}S = x$ en $Q\hat{R}P = y$. Bewys dat:

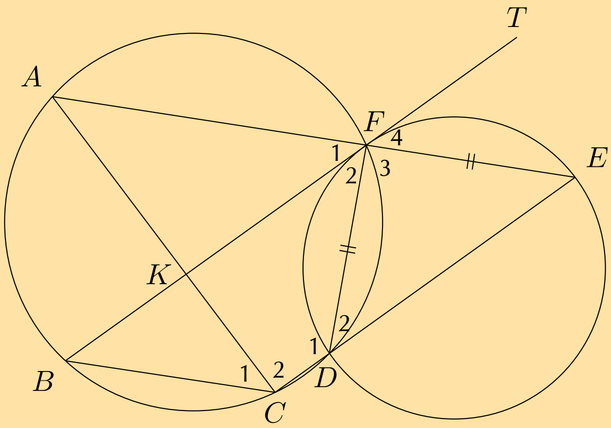
a) $T\hat{V}S = 2Q\hat{R}S$

b) $QVSW$ is 'n koordevierhoek

c) $Q\hat{P}S + \hat{T} = P\hat{R}T$

d) W is die middelpunt van die sirkel

16.



Die twee sirkels sny by punte F en D. BFT is 'n raaklyn aan die kleiner sirkel by F. Reguitlyn AFE word so getrek dat $DF = EF$. CDE 'n reguitlyn is en koord AC en BF sny by K. Bewys dat:

a) $BT \parallel CE$

b) $BCEF$ is 'n parallelogram

c) $AC = BF$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26HG	2. 26HH	3. 26HJ	4. 26HK	5. 26HM	6. 26HN
7. 26HP	8. 26HQ	9. 26HR	10. 26HS	11. 26HT	12. 26HV
13. 26HW	14. 26HX	15. 26HY	16. 26HZ		

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 9

Finansies, groei en verval

9.1 Hersiening EME5D

Enkelvoudige rente is die rente wat slegs bereken word op die aanvanklike bedrag wat belê is, die hoofsom. Saamgestelde rente word bereken op die hoofsom en die opgeloopte rente. Dit beteken dat rente op rente verdien word. Die opgeloopte bedrag is die finale bedrag; die som van die hoofsom bedrag en die hoeveelheid rente verdien.

Formule vir enkelvoudige rente:

$$A = P(1 + in)$$

Formule vir saamgestelde rente:

$$A = P(1 + i)^n$$

met

$$\begin{aligned} A &= \text{opgeloopte bedrag/eindbedrag} \\ P &= \text{aanvangsbedrag/hoofsom} \\ i &= \text{rentekoers geskryf as 'n desimaal} \\ n &= \text{tydsperiode in jare} \end{aligned}$$

Uitgewerkte voorbeeld 1: Enkelvoudige en saamgestelde rente

VRAAG

Sam wil R 3450 vir 5 jaar lank belê. Wise Bank bied 'n spaarrekening aan wat enkelvoudige rente teen 'n rentekoers van $12{,}5\%$ per jaar betaal, en Grand Bank bied 'n spaarrekening aan wat saamgestelde rente teen 'n rentekoers van $10{,}4\%$ per jaar betaal. Watter bankrekening sal vir Sam die hoogste opgeloopte balans gee teen die einde van die 5 jaar periode?

OPLOSSING

Stap 1: Bereken deur die enkelvoudige rente formule te gebruik

Skryf die bekende veranderlikes, asook die enkelvoudige rente formule, neer

$$\begin{aligned} P &= 3450 \\ i &= 0{,}125 \\ n &= 5 \\ A &= P(1 + in) \end{aligned}$$

Vervang nou die waardes in om die opgeloopte bedrag vir Wise Bank se spaarrekening te bepaal.

$$\begin{aligned} A &= 3450(1 + 0{,}125 \times 5) \\ &= \text{R } 5606{,}25 \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken deur die saamgestelde rente formule te gebruik

Skryf die bekende veranderlikes, asook die saamgestelde rente formule, neer.

$$\begin{aligned} P &= 3450 \\ i &= 0{,}104 \\ n &= 5 \\ A &= P(1 + i)^n \end{aligned}$$

Vervang nou die waardes in om die opgeloopte bedrag vir Grand Bank se spaarrekening te bepaal

$$\begin{aligned} A &= 3450(1 + 0{,}104)^5 \\ &= \text{R } 5658{,}02 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die Grand Bank spaarrekening sou vir Sam die hoogste opgeloopte balans, teen die einde van die 5 jaar periode, gegee het.

Uitgewerkte voorbeeld 2: Om i te bepaal

VRAAG

Bongani besluit om R 30 000 in 'n beleggingsrekening te plaas. Watter saamgestelde rentekoers moet die beleggingsrekening vir Bongani gee sodat hy sy geld kan verdubbel in 6 jaar? Gee jou antwoord korrek tot een desimale plek.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes en die saamgestelde rente formule neer

$$\begin{aligned} A &= 60\ 000 \\ P &= 30\ 000 \\ n &= 6 \\ A &= P(1 + i)^n \end{aligned}$$

Stap 2: Vervang die waardes in en los op vir i

$$
\begin{aligned}
60\ 000 &= 30\ 000(1+i)^6 \\
\frac{60\ 000}{30\ 000} &= (1+i)^6 \\
2 &= (1+i)^6 \\
\sqrt[6]{2} &= 1+i \\
\sqrt[6]{2} - 1 &= i \\
\therefore i &= 0{,}122\ldots
\end{aligned}
$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord neer en interpreteer die antwoord

Ons rond boontoe af na 'n rentekoers van $12{,}3\%$ p.j. om seker te maak dat Bongani sy belegging sal verdubbel.

Oefening 9 – 1: Hersiening

1. Bepaal die waarde van 'n belegging van R 10 000 teen $12{,}1\%$ enkelvoudige rente per jaar vir 3 jaar.
2. Bereken die waarde van R 8000 belê teen $8{,}6\%$ p.j. saamgestelde rente vir 4 jaar.
3. Bereken hoeveel rente John sal verdien as hy R 2000 vir 4 jaar belê teen:
   a) $6{,}7\%$ p.j. enkelvoudige rente
   b) $5{,}4\%$ p.j. saamgestelde rente
4. Die waarde van die belegging groei van R 2200 tot R 3850 in 8 jaar. Bepaal die enkelvoudige rentekoers waarteen dit belê is.
5. James het R 12 000 gehad en het dit vir 5 jaar belê. As die waarde van sy belegging R 15 600 is, watter saamgestelde rente het dit verdien?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26J2 2. 26J3 3. 26J4 4. 26J5 5. 26J6

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

9.2 Enkelvoudige en saamgestelde waardevermindering EME5F

Sodra 'n nuwe motor die handelaar verlaat, verminder sy waarde en word hy as "tweedehands" beskou. Voertuie, toerusting, masjinerie en ander soortgelyke bates verloor waarde met tyd as gevolg van gebruik en ouderdom. Hierdie verlies in waarde word waardevermindering (of depresiasie) genoem. Bates wat 'n relatief lang gebruikslewe, soos masjiene, vragmotors, plaastoerusting ens., depresiëer stadiger as bates soos kantoortoerusting, rekenaars, meubels ens., wat meer gereeld vervang moet word en dus vinniger depresiëer (m.a.w. vinniger waardevermindering ondergaan).

Waardevermindering word gebruik om die waarde van 'n maatskappy se bates te bereken, wat bepaal hoeveel belasting 'n maatskappy moet betaal. Maatskappye kan waardevermindering as 'n uitgawe sien, en sodoende hul belasbare inkomste verminder. 'n Laer belasbare inkomste beteken dat die maatskappy minder inkomstebelasting aan die Suid-Afrikaanse Inkomstediens (SAID) sal betaal.

Ons kan twee verskillende tipes waardevermindering bereken: enkelvoudige verval en saamgestelde verval. Verval is ook 'n term wat gebruik word om 'n vermindering of afname in waarde te beskryf. Enkelvoudige verval word ook reguitlyn waardevermindering genoem, en saamgestelde verval kan ook na verwys word as verminderde-balans waardevermindering. In die reguitlynmetode word die waarde van die bate elke jaar met 'n vaste bedrag verminder, wat op die beginwaarde van die bate bereken word. In verminderde-balans waardevermindering word die waardevermindering op die verminderde waarde van die bate gebaseer. Dit beteken dat die waarde van die bate elke jaar met 'n verskillende hoeveelheid verminder.

Ondersoek: Enkelvoudige en saamgestelde waardevermindering

1. Mnr. Sontange koop 'n Opel Fiesta vir R 72 000. Hy verwag dat die waarde van die motor elke jaar met R 6000 sal depresiëer. Hy stel 'n tabel op om die gedepresiëerde waarde van sy Opel Fiesta te bereken.

   Voltooi Mnr. Sontange se tabel van waardes vir die 7 jaar periode:

Jaar	Waarde aan die begin van die jaar	Depresiasiebedrag	Waarde aan die einde van die jaar
1	R 72 000	R 6000	R 66 000
2	R 66 000	R 6000	
3			
4			
5			
6			
7			

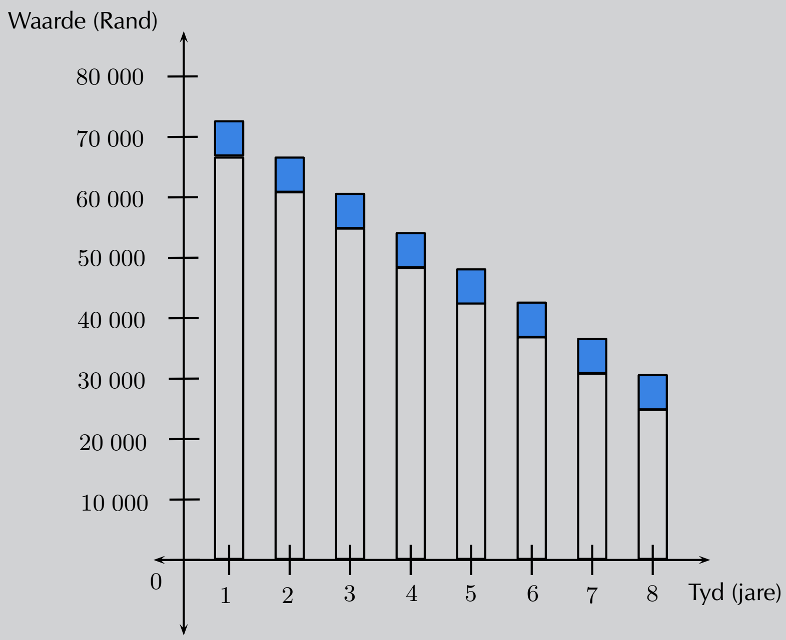
2. Sy seun, David, stem nie saam dat die waarde van die motor elke jaar met dieselfde bedrag sal afneem nie. David dink dat die motor sal depresiëer met 10% per jaar.

Voltooi David se tabel van waardes:

Jaar	Waarde aan die begin van die jaar	Depresiasiebedrag	Waarde aan die einde van die jaar
1	R 72 000	R 7200	R 64 800
2	R 64 800	R 6480	
3			
4			
5			
6			
7			

3. Vergelyk en bespreek die resultate van die twee verskillende tabelle.

4. Beskou die grafiek hieronder wat Mnr. Sontange se tabel van waardes verteenwoordig:



a) Teken 'n soortgelyke grafiek deur David se tabel van waardes te gebruik.

b) Interpreteer die twee grafieke en bespreek die verskille tussen hulle.

c) Verduidelik hoe die grafieke gebruik kan word om die totale waardevermindering in elke geval te bepaal.

d) i. Teken twee grafieke deur die maksimumwaarde van elke staaf te stip.
   ii. Verbind die punte met 'n lyn om die algemene tendens te wys.
   iii. Is dit wiskundig korrek om hierdie punte te verbind? Verduidelik jou antwoord.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Reguitlyn waardevermindering

VRAAG

'n Nuwe slimfoon kos R 6000, en depresiëer teen 22% p.j. op 'n reguitlyn. Bepaal die waarde van die slimfoon aan die einde van elke jaar oor 'n 4-jaar tydperk.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die depresiasiebedrag

$$\begin{aligned}\text{Depresiasiebedrag} &= 6000 \times \frac{22}{100} \\ &= 1320\end{aligned}$$

Dus depresiëer die slimfoon met R 1320 elke jaar.

Stap 2: Voltooi die tabel van waardes

Jaar	Waarde aan die begin van die jaar	Depresiasiebedrag	Waarde aan die einde van die jaar
1	R 6000	R 1320	R 4680
2	R 4680	R 1320	R 3360
3	R 3360	R 1320	R 2040
4	R 2040	R 1320	R 720

Ons let op dat

$$\text{Totale depresiasiebedrag} = P \times i \times n$$

waar

$$\begin{aligned} P &= \text{aanvangsbedrag/hoofsom} \\ i &= \text{rentekoers geskryf as 'n desimaal} \\ n &= \text{tydsperiode}\end{aligned}$$

Dus kan die gedepresiëerde waarde van die bates (ook genoem die boekwaarde) bereken word as:

$$A = P(1 - in)$$

Let op die ooreenkoms met die enkelvoudige rente formule $A = P(1 + in)$. Rente verhoog die waarde van die hoofsombedrag, terwyl enkelvoudige verval die waarde van die hoofsombedrag verminder.

Belangrik: om 'n akkurate antwoord te verkry, doen al jou berekenings in een stap op jou sakrekenaar. Moenie jou antwoorde afrond voor jou finale antwoord nie. In die uitgewerkte voorbeelde in hierdie hoofstuk gebruik ons kolletjies om aan te toon dat die antwoord nie afgerond is nie. Ons rond altyd die finale antwoord af tot twee desimale plekke (sente, in die geval van geld).

Uitgewerkte voorbeeld 4: Reguitlyn waardeverminderingsmetode

VRAAG

'n Motor is gewaardeer teen R 240 000. As dit depresiëer met 15% p.j. op die reguitlyn-metode, bereken die waarde van die motor na 5 jaar.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes en die enkelvoudige vervalformule neer

$$\begin{aligned} P &= 240\ 000 \\ i &= 0{,}15 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

$$A = P(1 - in)$$

Stap 2: Vervang die waardes in en los op vir A

$$\begin{aligned} A &= 240\ 000(1 - 0{,}15 \times 5) \\ &= 240\ 000(0{,}25) \\ &= 60\ 000 \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Aan die einde van 5 jaar is die motor R 60 000 werd.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Enkelvoudige verval

VRAAG

'n Klein besigheid koop 'n fotokopieerder vir R 12 000. Vir die belastingopgawe depresiëer die eienaar hierdie bate oor 3 jaar deur die reguitlyn depresiasiemetode te gebruik. Watter bedrag sal hy elke jaar op sy belastingvorm invul?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

Die eienaar van die besigheid wil hê dat die fotokopieerder 'n boekwaarde van R 0 na 3 jaar moet hê.

$$\begin{aligned} A &= 0 \\ P &= 12\ 000 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

Dus kan ons die jaarlikse waardevermindering bereken as

$$\begin{aligned}
\text{Depresiasiebedrag} &= \frac{P}{n} \\
&= \frac{12\ 000}{3} \\
&= \text{R } 4000
\end{aligned}$$

Stap 2: Bepaal die boekwaarde aan die einde van elke jaar

$$\begin{aligned}
\text{Boekwaarde aan die einde van die eerste jaar} &= 12\ 000 - 4000 \\
&= \text{R } 8000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Boekwaarde aan die einde van die tweede jaar} &= 8000 - 4000 \\
&= \text{R } 4000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Boekwaarde aan die einde van die derde jaar} &= 4000 - 4000 \\
&= \text{R } 0
\end{aligned}$$

Oefening 9 – 2: Enkelvoudige verval

1. 'n Besigheid koop 'n vragmotor vir R 560 000. Oor 'n periode van 10 jaar depresiëer die waarde van die vragmotor na R 0 volgens die reguitlynmetode. Wat is die waarde van die vragmotor na 8 jaar?
2. Harry wil sy oupa se donkie vir R 800 koop. Sy oupa is ingenome met die aanbod, aangesien die donkie slegs teen 3% per jaar gedepresiëer het op die reguitlynmetode. Oupa het die donkie 5 jaar gelede gekoop. Wat het oupa oorspronklik vir die donkie betaal?
3. Sewe jaar gelede het Rocco se drommestel hom R 12 500 gekos. Dit is nou gewaardeer op R 2300. Teen watter koers van enkelvoudige waardevermindering het dit gedepresiëer?
4. Fiona koop 'n DStv satellietskottel vir R 3000. As gevolg van verwering depresiëer die waarde daarvan met 15% per jaar. Na hoe lank sal die satellietskottel 'n boekwaarde van nul hê?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26J7   2. 26J8   3. 26J9   4. 26JB

www.everythingmaths.co.za   m.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 6: Verminderende-balans depresiasie

VRAAG

'n Tweedehandse plaastrekker wat R 60 000 werd is, het 'n gebruiksleeftyd van 5 jaar, en depresiëer teen 20% p.j. op 'n verminderde-balans beginsel. Bepaal die waarde van die trekker aan die einde van elke jaar oor die 5-jaar periode.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} P &= 60\ 000 \\ i &= 0{,}2 \\ n &= 5 \end{aligned}$$

Wanneer ons die waardevermindering met behulp van die verminderde-balans metode bereken, moet ons onthou:

1. die depresiasiebedrag verander elke jaar.
2. die depresiasiebedrag word elke jaar minder.
3. die boekwaarde aan die einde van 'n jaar word die hoofsombedrag vir die volgende jaar.
4. die bate sal altyd 'n sekere waarde hê (die boekwaarde sal nooit gelyk wees aan nul nie).

Stap 2: Voltooi die tabel van waardes

Jaar	Boekwaarde	Waardevermindering	Waarde aan die einde van die jaar
1	R 60 000	$60\ 000 \times 0{,}2 = 12\ 000$	R 48 000
2	R 48 000	$48\ 000 \times 0{,}2 = 9600$	R 38 400
3	R 38 400	$38\ 400 \times 0{,}2 = 7680$	R 30 720
4	R 30 720	$30\ 720 \times 0{,}2 = 6144$	R 24 576
5	R 24 576	$24\ 576 \times 0{,}2 = 4915{,}20$	R 19 660,80

Let op dat ons ook in die voorbeeld die boekwaarde aan die einde van elke jaar kan skryf as:

$$\begin{aligned}
\text{Boekwaarde aan die einde van die eerste jaar} &= 60\ 000(1-0{,}2)\\
\text{Boekwaarde aan die einde van die tweede jaar} &= 48\ 000(1-0{,}2) = 60\ 000(1-0{,}2)^2\\
\text{Boekwaarde aan die einde van die derde jaar} &= 38\ 400(1-0{,}2) = 60\ 000(1-0{,}2)^3\\
\text{Boekwaarde aan die einde van die vierde jaar} &= 30\ 720(1-0{,}2) = 60\ 000(1-0{,}2)^4\\
\text{Boekwaarde aan die einde van die vyfde jaar} &= 24\ 576(1-0{,}2) = 60\ 000(1-0{,}2)^5
\end{aligned}$$

Deur van die formule vir enkelvoudige verval en die waargenome patroon in die berekening hierbo gebruik te maak, verkry ons die formule vir saamgestelde verval:

$$A = P(1-i)^n$$

waar

$$\begin{aligned}
A &= \text{boekwaarde of verminderde-balans waarde}\\
P &= \text{aanvangsbedrag/hoofsom}\\
i &= \text{rentekoers geskryf as 'n desimaal}\\
n &= \text{tydsperiode}
\end{aligned}$$

Weereens, let op die ooreenkoms met die saamgestelde rente formule $A = P(1+i)^n$.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Verminderende-balans depresiasie

VRAAG

Die aantal pelikane by die Bergriviermond verminder teen 'n saamgestelde tempo 12% p.j. As daar op die oomblik 3200 pelikane in die vleiland van die Bergriviermond is, wat sal die bevolking oor 5 jaar wees?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes en die saamgestelde vervalformule neer

$$\begin{aligned}
P &= 3200\\
i &= 0{,}12\\
n &= 5
\end{aligned}$$

$$A = P(1-i)^n$$

Stap 2: Vervang die waardes in en los op vir A

$$\begin{aligned}
A &= 3200(1-0{,}12)^5\\
&= 3200(0{,}88)^5\\
&= 1688{,}7421\ldots
\end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Oor 5 jaar sal die pelikaanbevolking ongeveer 1689 wees.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Saamgestelde verval

VRAAG

1. 'n Skool koop 'n minibus vir R 950 000, en dit depresiëer teen $13{,}5\%$ per jaar. Bepaal die waarde van die minibus na 3 jaar as die depresiasie bereken word:
   a) met die reguitlynmetode
   b) met die verminderde-balans metode
2. Watter een is die beter opsie?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

$$\begin{aligned} P &= 950\ 000 \\ i &= 0{,}135 \\ n &= 3 \end{aligned}$$

Stap 2: Gebruik die enkelvoudige vervalformule en los op vir A

$$\begin{aligned} A &= 950\ 000(1 - 3 \times 0{,}135) \\ &= 950\ 000(0{,}865) \\ &= 565\ 250 \\ \therefore A &= \text{R } 565\ 250 \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik die saamgestelde vervalformule en los op vir A

$$\begin{aligned} A &= 950\ 000(1 - 0{,}135)^3 \\ &= 950\ 000(0{,}865)^3 \\ &= 614\ 853{,}89 \\ \therefore A &= \text{R } 614\ 853{,}89 \end{aligned}$$

Stap 4: Interpreteer die antwoorde

Na 'n periode van 3 jaar, is die waarde van 'n minibus, soos met die reguitlyn metode bepaal, minder as die waarde van die minibus, soos met die saamgestelde metode bepaal. Die waarde van die minibus het minder gedepresiëer met die verminderde-balans metode omdat die hoeveelheid waardevermindering elke jaar op 'n kleiner bedrag bereken word, terwyl die reguitlynmetode elke jaar gebaseer is op die volle oorspronklike waarde van die minibus.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Saamgestelde depresiasie

VRAAG

Boer Jack het 'n trekker gekoop en dit het gedepresiëer met 20% p.j. op 'n verminderde-balans beginsel. As die huidige waarde van die trekker R 52 429 is, bereken hoeveel Boer Jack vir sy trekker betaal het as hy dit 7 jaar gelede gekoop het.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes en die saamgestelde vervalformule neer

$$\begin{aligned} A &= 52\ 429 \\ i &= 0{,}2 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

$$A = P(1 - i)^n$$

Stap 2: Vervang die waardes in en los op vir P

$$\begin{aligned} 52\ 429 &= P(1 - 0{,}2)^7 \\ &= P(0{,}8)^7 \\ \therefore P &= \frac{52\ 429}{(0{,}8)^7} \\ &= 250\ 000{,}95\ldots \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

7 jaar gelede het Boer Jack R 250 000 vir sy trekker betaal.

Oefening 9 – 3: Saamgestelde depresiasie

1. Jwayelani koop 'n vragmotor vir R 89 000 en depresiëer dit teen 9% p.j. deur die saamgestelde waardeverminderingsmetode te gebruik. Wat is die waarde van die vragmotor na 14 jaar?
2. Die aantal rietduikers by die Amanzimtoti-riviermond neem af met 'n saamgestelde koers van 8% p.j. As daar nou $10\ 000$ rietduikers is, hoeveel sal daar 18 jaar van nou af wees?
3. Op 1 Januarie 2008 is die waarde van my Kia Sorento R 320 000. Elke jaar daarna sal die motor se waarde verminder met 20% van die vorige jaar se waarde. Wat is die waarde van die motor op 1 Januarie 2012?

4. Die bevolking van Bonduel verminder teen 'n verminderde-balans koers van $9{,}5\%$ per jaar, soos mense na die stede migreer. Bereken die afname in bevolking oor 'n periode van 5 jaar as die oorspronklike bevolking $2\ 178\ 000$ was.

5. 'n 20 kg waatlemoen bestaan uit 98% water. As dit buite in die son gelaat word verloor dit elke dag 3% van hierdie water. Hoeveel weeg dit na 'n maand van 31 dae?

6. Richard het 15 jaar gelede 'n motor gekoop en dit het met 17% p.j. op 'n saamgestelde basis gedepresiëer. Hoeveel het hy vir die motor betaal as dit nou R 5256 werd is?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26JC 2. 26JD 3. 26JF 4. 26JG 5. 26JH 6. 26JJ

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Om i te bepaal EME5J

Uitgewerkte voorbeeld 10: Vind i vir enkelvoudige verval

VRAAG

Na 4 jaar is die waarde van 'n rekenaar gehalveer. Onder die aanname van enkelvoudige verval, wat is die jaarlikse koers waarteen dit gedepresiëer is? Gee jou antwoord korrek tot twee desimale plekke.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes en die enkelvoudige vervalformule neer

Laat die waarde van die rekenaar x wees, dus:

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{2} \\ P &= x \\ n &= 4 \end{aligned}$$

$$A = P(1 - in)$$

Stap 2: Vervang die waardes in en los op vir i

$$\frac{x}{2} = x(1 - 3i)$$
$$\frac{1}{2} = 1 - 3i$$
$$\therefore 3i = 1 - \frac{1}{2}$$
$$\therefore i = 0{,}1667$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die rekenaar het gedepresiëer teen 'n koers van 16,67% p.j.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Vind i vir saamgestelde verval

VRAAG

Cristina het 'n yskas aan die begin van 2009 vir R 8999 gekoop, en dit aan die einde van 2011 verkoop vir R 4500. Teen watter koers het die waarde van haar yskas verminder, as ons aanneem dat 'n verminderde-balans metode gebruik word? Gee jou antwoord korrek tot twee desimale plekke.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes en die saamgestelde vervalformule neer

$$A = 4500$$
$$P = 8999$$
$$n = 3$$
$$A = P(1 - i)^n$$

Stap 2: Vervang die waardes in en los op vir i

$$4500 = 8999(1 - i)^3$$
$$\frac{4500}{8999} = (1 - i)^3$$
$$\sqrt[3]{\frac{4500}{8999}} = 1 - i$$
$$\therefore i = 1 - \sqrt[3]{\frac{4500}{8999}}$$
$$= 0{,}206$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Cristina se yskas het teen 'n koers van 20,6% p.j. gedepresiëer.

Oefening 9 – 4: Om i te bepaal

1. 'n Masjien kos R 45 000 en het 'n afskryfwaarde van R 9000 na 10 jaar. Bepaal die jaarlikse depresiasiekoers bereken op die verminderde-balans metode.
2. Na 15 jaar is 'n vliegtuig $\frac{1}{6}$ van sy oorspronklike waarde werd. Teen watter jaarlikse koers is waardevermindering saamgestel?
3. Mnr. Mabula koop meubels teen R 20 000. Na 6 jaar verkoop hy die meubels vir R 9300. Bereken die jaarlikse saamgestelde waardeverminderingskoers van die meubels.
4. Ayanda het 7 jaar gelede 'n nuwe motor gekoop teen dubbel wat dit vandag werd is. Teen watter jaarlikse saamgestelde koers het haar motor gedepresiëer?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26JK 2. 26JM 3. 26JN 4. 26JP

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

9.3 Tydlyne EME5K

Rente kan meer as een keer per jaar saamgestel word. 'n Belegging kan byvoorbeeld maandeliks of kwartaalliks saamgestel word. Hieronder is 'n tabel van saamstellingstydperke en hul ooreenkomstige numeriese waardes (p). Wanneer bedrae meer as een keer per jaar saamgestel word, vermenigvuldig ons die aantal jare met p, en deel die rentekoers deur p.

Tydperk	p
jaarliks	1
halfjaarliks	2
kwartaalliks	4
maandeliks	12
weekliks	52
daagliks	365

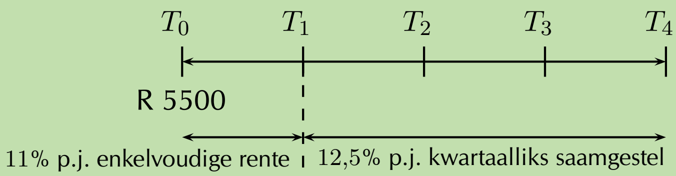
Uitgewerkte voorbeeld 12: Tydlyne

VRAAG

R 5500 is vir 'n tydperk van 4 jaar in 'n spaarrekening belê. Gedurende die eerste jaar groei die belegging teen 'n enkelvoudige rentekoers van 11% p.j. en dan word 'n koers van $12{,}5\%$ p.j. kwartaalliks saamgestel vir die res van die tydperk. Bepaal die waarde van die belegging teen die einde van die 4 jaar.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n tydlyn en skryf die bekende veranderlikes neer



In die tydlyn hierbo dui elke interval 'n jaar aan. Byvoorbeeld, T_0 is die begin van die belegging, T_1 is die einde van die eerste jaar en T_4 is die einde van die vierde jaar.

Stap 2: Gebruik die formule vir enkelvoudige rente om A teen T_1 te bereken

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= 5500(1 + 0{,}11) \\ &= \text{R } 6105 \end{aligned}$$

Stap 3: Gebruik die formule vir saamgestelde rente om A teen T_4 te bereken

Die belegging word kwartaalliks saamgestel, dus:

$$\begin{aligned} n &= 3 \times 4 \\ &= 12 \\ \text{en } i &= \frac{0{,}125}{4} \end{aligned}$$

Let ook op dat die opgeloopte hoeveelheid teen die einde van die eerste jaar die hoofsom aan die begin van die tweede jaar word

$$\begin{aligned} A &= P(1 + i)^n \\ &= 6105\left(1 + \frac{0{,}125}{4}\right)^{12} \\ &= \text{R } 8831{,}88 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Die waarde van die belegging teen die einde van die vierde jaar is R 8831,88.

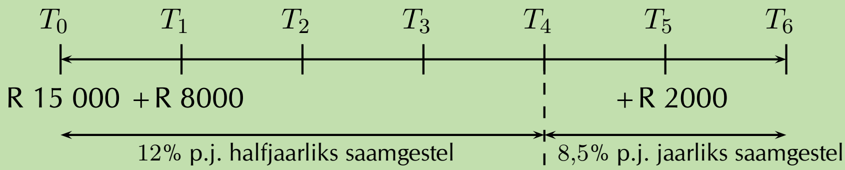
Uitgewerkte voorbeeld 13: Tydlyne

VRAAG

R 150 000 is gedeponeer in 'n beleggingsrekening vir 'n periode van 6 jaar, teen 'n rentekoers van 12% p.j. wat halfjaarliks saamgestel word vir die eerste 4 jaar, en dan $8{,}5\%$ p.j. wat jaarliks saamgestel word vir die res van die periode. 'n Deposito van R 8000 is in die rekening inbetaal na die eerste jaar en toe is nog 'n deposito van R 2000 gemaak, 5 jaar na die oorspronklike belegging. Bereken die waarde van die belegging teen die einde van die 6 jaar.

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n tydlyn en skryf die bekende veranderlikes neer



Onthou om te wys wanneer die addisionele deposito's van R 8000 en R 2000 in die rekening inbetaal is. Dit is baie belangrik om op te let dat die rentekoers by T_4 verander.

Ons verdeel hierdie vraag in dele en hanteer elke bedrag apart.

Stap 2: Die oorspronklike deposito by T_0

Tussen T_0 en T_4:

Ons let op dat die rente vir die eerste 4 jaar halfjaarliks saamgestel word, dus:

$$\begin{aligned} n_1 &= 4 \times 2 \\ &= 8 \\ \text{en } i_1 &= \frac{0{,}12}{2} \end{aligned}$$

Tussen T_4 en T_6:

$$\begin{aligned} n_2 &= 2 \\ \text{en } i_2 &= 0{,}085 \end{aligned}$$

Dus is die totale groei van die oorspronklike deposito oor die 6 jaar:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \\ &= 150\ 000\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^8(1+0{,}085)^2 \end{aligned}$$

Stap 3: Die deposito by T_1

Tussen T_1 en T_4:

Rente op hierdie deposito word halfjaarliks saamgestel vir 3 jaar, dus:

$$\begin{aligned} n_3 &= 3 \times 2 \\ &= 6 \\ \text{en } i_3 &= \frac{0{,}12}{2} \end{aligned}$$

Tussen T_4 en T_6:

$$\begin{aligned} n_4 &= 2 \\ \text{en } i_4 &= 0{,}085 \end{aligned}$$

Dus is die totale groei van die deposito oor die 5 jaar:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i_3)^{n_3}(1+i_4)^{n_4} \\ &= 8000\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^6 (1+0{,}085)^2 \end{aligned}$$

Stap 4: Die deposito by T_5

Verdien slegs vir 1 jaar rente:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 2000(1+0{,}085)^1 \end{aligned}$$

Stap 5: Bepaal die totaal

Om 'n antwoord te kry wat so akkuraat as moontlik is, doen ons die berekening op die sakrekenaar in een stap. Deur die geheuefunksie op die sakrekenaar te gebruik, vermy ons afronding totdat ons die finale antwoord kry.

$$\begin{aligned} A = 150\ 000&\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^8 (1+0{,}085)^2 \\ &+ 8000\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^6 (1+0{,}085)^2 + 2000(1+0{,}085)^1 \\ &= \text{R } 296\ 977{,}00 \end{aligned}$$

Stap 6: Skryf die finale antwoord

Die waarde van die belegging teen die einde van die 6 jaar is R 296 977,00.

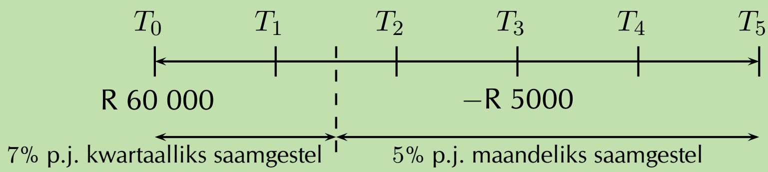
Uitgewerkte voorbeeld 14: Tydlyne

VRAAG

R 60 000 is belê in 'n rekening wat rente verdien teen 7% p.j. kwartaalliks saamgestel vir die eerste 18 maande. Daarna verander die rentekoers na 5% p.j. maandeliks saamgestel. Drie jaar na die oorspronklike belegging, is R 5000 vanuit die rekening onttrek. Hoeveel sal in die rekening wees teen die einde van 5 jaar?

OPLOSSING

Stap 1: Teken 'n tydlyn en skryf die bekende veranderlikes neer



Onthou om te wys wanneer die onttrekking van R 5000 uit die rekening gehaal is. Dit is ook belangrik om op te let dat die rentekoers na 18 maande verander ($T_{1\frac{1}{2}}$).

Ons verdeel hierdie vraag in dele en hanteer elke bedrag apart.

Stap 2: Die oorspronklike deposito by T_0

Rente vir die eerste $1{,}5$ jaar is kwartaalliks saamgestel, dus:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1{,}5 \times 4 \\ &= 6 \\ \text{en } i_1 &= \frac{0{,}07}{4} \end{aligned}$$

Rente vir die oorblywende $3{,}5$ jaar is maandeliks saamgestel, dus:

$$\begin{aligned} n_2 &= 3{,}5 \times 12 \\ &= 42 \\ \text{en } i_2 &= \frac{0{,}05}{12} \end{aligned}$$

Dus is die totale groei van die oorspronklike deposito oor die 5 jaar:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2} \\ &= 60\ 000\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{6}\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{42} \end{aligned}$$

Stap 3: Die onttrekking by T_3

Ons bereken die rente wat die R 5000 sou verdien as dit in die rekening sou bly:

$$\begin{aligned} n &= 2 \times 12 \\ &= 24 \\ \text{en } i &= \frac{0{,}05}{12} \end{aligned}$$

Dus het ons dat:

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= 5000\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{24} \end{aligned}$$

Stap 4: Bepaal die totaal

Ons trek die onttrekking, en die rente wat dit sou verdien het, af van die opgeloopte bedrag aan die einde van die 5 jaar:

$$\begin{aligned} A &= 60\ 000\left(1+\frac{0{,}07}{4}\right)^{6}\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{42} - 5000\left(1+\frac{0{,}05}{12}\right)^{24} \\ &= \text{R } 73\ 762{,}19 \end{aligned}$$

Stap 5: Skryf die finale antwoord

Die waarde van die belegging teen die einde van die 5 jaar is R 73 762,19.

Oefening 9 – 5: Tydlyne

1. Na 'n 20-jaar periode word Josh se enkelbedragbelegging uitbetaalbaar tot 'n bedrag van R 313 550. Hoeveel het hy belê as sy geld rente teen 'n koers van 13,65% p.j. verdien het, halfjaarliks saamgestel vir die eerste 10 jaar, dan 8,4% p.j. kwartaalliks saamgestel vir die volgende vyf jaar, en dan 7,2% p.j. maandeliks saamgestel vir die oorblywende tydperk?
2. Sindisiwe wil 'n motorfiets koop. Die koste van die motorfiets is R 55 000. In 1998 het Sindisiwe 'n rekening by Sutherland Bank met R 16 000 oopgemaak. Toe het sy in 2003 nog R 2000 in die rekening inbetaal. In 2007 het Sinidisiwe nog 'n verandering gemaak: sy het R 3500 onttrek vanuit die rekening. As die rekening 6% betaal, halfjaarliks saamgestel, sal Sinidisiwe teen die einde van 2012 genoeg geld hê om die motorfiets te koop?
3. 'n Lening moet terugbetaal word in twee gelyke halfjaarlikse paaiemente. As die rentekoers 16% per jaar is, halfjaarliks saamgestel, en elke paaiement is R 1458, bereken die bedrag wat geleen is.

4. 'n Man met die naam van Phillip belê R 10 000 in 'n rekening by North Bank teen 'n rentekoers van $7{,}5\%$ p.j. maandeliks saamgestel. Na 5 jaar verander die bank die rentekoers na 8% p.j. kwartaalliks saamgestel. Hoeveel geld sal Phillip in sy rekening hê 9 jaar na die oorspronklike deposito?

5. R 75 000 is belê in 'n rekening wat rente bied teen 11% p.j. maandeliks saamgestel vir die eerste 24 maande. Dan verander die rentekoers na $7{,}7\%$ p.j. halfjaarliks saamgestel. As R 9000 vanuit die rekening onttrek word na een jaar, en 'n addisionele deposito van R 3000 drie jaar na die oorspronklike belegging gemaak word, hoeveel geld sal in die rekening wees teen die einde van 6 jaar?

6. Christopher wil 'n rekenaar koop, maar op die oomblik het hy nie genoeg geld nie. 'n Vriend het vir hom gesê dat die rekenaar oor 5 jaar R 9150 sal kos. Christopher besluit om vandag geld te begin spaar by Durban United Bank. Hy deponeer R 5000 in 'n spaarrekening met 'n rentekoers van $7{,}95\%$ p.j. maandeliks saamgestel. Dan, na 18 maande, verander die bank die rentekoers na $6{,}95\%$ p.j. weekliks samgestel. Na nog 6 maande verander die rentekoers weer na $7{,}92\%$ p.j. wat twee keer per jaar saamgestel word. Hoeveel geld sal Christopher in die rekening hê na 5 jaar, en sal hy dan genoeg geld hê om die rekenaar te koop?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26JQ 2. 26JR 3. 26JS 4. 26JT 5. 26JV 6. 26JW

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

9.4 Nominale en effektiewe rentekoerse EME5M

Alhoewel rente as 'n persentasie per jaar genoteer word, het ons gesien dat dit meer as een keer per jaar saamgestel kan word. Daarom het ons 'n manier nodig om rentekoerse te vergelyk. Byvoorbeeld, is 'n jaarlikse rentekoers van 8% kwartaalliks saamgestel hoër of laer as 'n rentekoers van 8% p.j. jaarliks saamgestel?

Ondersoek: Nominale en effektiewe rentekoerse

1. Bereken die opgeloopte hoeveelheid aan die einde van een jaar as R 1000 belê word teen 8% p.j. saamgestelde rente.

$$\begin{aligned} A &= P(1+i)^n \\ &= \ldots\ldots \end{aligned}$$

2. Bereken die waarde van R 1000 as dit vir een jaar belê word teen 8% p.j. saamgestelde rente:

Frekwensie	Berekening	Opgeloopte bedrag	Bedrag van rente
halfjaarliks	$A = 1000\left(1 + \frac{0,08}{2}\right)^{1\times2}$	R 1081,60	R 81,60
kwartaalliks			
maandeliks			
weekliks			
daagliks			

3. Gebruik jou resultate van die tabel hierbo om die effektiewe koers wat die belegging van R 1000 in een jaar verdien, te bereken.

Frekwensie	Opgeloopte bedrag	Berekening	Effektiewe rentekoers
halfjaarliks	R 1081,60	$1081,60 = 1000(1+i)$ $\frac{1081,60}{1000} = 1+i$ $\frac{1081,60}{1000} - 1 = i$ $\therefore i = 0,0816$	$i = 8,16\%$
kwartaalliks			
maandeliks			
weekliks			
daagliks			

4. As jy R 10 000 by die bank wou leen, sou dit beter wees om dit teen 'n rentekoers van 22% p.j. kwartaalliks saamgestel of 22% maandeliks saamgestel terug te betaal? Wys jou berekeninge.

'n Rentekoers wat meer as een keer per jaar saamgestel word, word die nominale rentekoers genoem. In die ondersoek hierbo het ons bepaal dat 'n nominale rentekoers van 8% p.j. halfjaarliks saamgestel, eintlik 'n effektiewe koers van $8,16\%$ p.j.

Gegewe 'n nominale rentekoers van $i^{(m)}$ wat teen 'n frekwensie van m keer per jaar saamgestel word, en die effektiewe rentekoers van i, sal die opgeloopte hoeveelheid wat bereken word deur beide rentekoerse gelyk wees, so ons kan skryf:

$$P(1+i) = P\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$
$$\therefore 1+i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Uitgewerkte voorbeeld 15: Nominale en effektiewe rentekoerse

VRAAG

Rente op ’n kredietkaart word genoteer as 23% p.j. maandeliks saamgestel. Wat is die effektiewe jaarlikse rentekoers? Gee jou antwoord korrek tot twee desimale plekke.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

Rente word maandeliks bygevoeg, dus:

$$\begin{aligned} m &= 12 \\ i^{(12)} &= 0{,}23 \end{aligned}$$

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Stap 2: Stel die waardes in en los op vir i

$$\begin{aligned} 1 + i &= \left(1 + \frac{0{,}23}{12}\right)^{12} \\ \therefore i &= 1 - \left(1 + \frac{0{,}23}{12}\right)^{12} \\ &= 25{,}59\% \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die effektiewe koers is $25{,}59\%$ per jaar.

Uitgewerkte voorbeeld 16: Nominale en effektiewe rentekoerse

VRAAG

Bepaal die nominale rentekoers, kwartaalliks saamgestel, as die effektiewe rentekoers 9% per jaar is (korrek tot twee desimale plekke).

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die bekende veranderlikes neer

Rente word kwartaalliks bygevoeg, dus:

$$\begin{aligned} m &= 4 \\ i &= 0{,}09 \end{aligned}$$

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Stap 2: Stel die waardes in en los op vir $i^{(m)}$

$$\begin{aligned} 1 + 0{,}09 &= \left(1 + \frac{i^{(4)}}{4}\right)^4 \\ \sqrt[4]{1{,}09} &= 1 + \frac{i^{(4)}}{4} \\ \sqrt[4]{1{,}09} - 1 &= \frac{i^{(4)}}{4} \\ 4\left(\sqrt[4]{1{,}09} - 1\right) &= i^{(4)} \\ \therefore i^{(4)} &= 8{,}71\% \end{aligned}$$

Stap 3: Skryf die finale antwoord

Die nominale rentekoers is $8{,}71\%$ p.j. kwartaalliks saamgestel.

Oefening 9 – 6: Nominale en effektiewe rentekoerse

1. Bepaal die effektiewe jaarlikse rentekoers as hierdie die nominale rentekoers is:
   a) 12% p.j. kwartaalliks saamgestel.
   b) $14{,}5\%$ p.j. weekliks saamgestel.
   c) 20% p.j. daagliks saamgestel.
2. Beskou die volgende:
   - $16{,}8\%$ p.j. jaarliks saamgestel.
   - $16{,}4\%$ p.j. maandeliks saamgestel.
   - $16{,}5\%$ p.j. kwartaalliks saamgestel.

   a) Bepaal die effektiewe jaarlikse rentekoers van elk van die nominale koerse wat hierbo gelys word.
   b) Watter rentekoers is die beste vir 'n belegging?
   c) Watter rentekoers is die beste vir 'n lening?

3. Bereken die effektiewe jaarlikse rentekoers wat gelyk is aan 'n nominale rentekoers van $8{,}75\%$ p.j. maandeliks saamgestel.

4. Cebela ontvang 'n nominale rentekoers van $9{,}15\%$ per jaar, wat elke vier maande op haar belegging van R 85 000 saamgestel word. Bereken die effektiewe koers per jaar.

5. Bepaal watter van die volgende 'n beter ooreenkoms sal wees om 'n studentelening terug te betaal:

   a) $9{,}1\%$ p.j. kwartaalliks saamgestel.
   b) 9% p.j. maandeliks saamgestel.
   c) $9{,}3\%$ p.j. halfjaarliks saamgestel.

6. Miranda belê R 8000 vir 5 jaar vir haar seun se studiefonds. Bepaal hoeveel geld sy aan die einde van die periode sal hê, en die effektiewe jaarlikse rentekoers as die nominale rentekoers van 6% as volg saamgestel word:

	Berekening	Opgeloopte bedrag	Effektiewe jaarlikse rentekoers
jaarliks			
halfjaarliks			
kwartaalliks			
maandeliks			

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26JX 1b. 26JY 1c. 26JZ 2. 26K2 3. 26K3 4. 26K4
5. 26K5 6. 26K6

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

9.5 Opsomming EME5N

Sien aanbieding: 26K7 op www.everythingmaths.co.za

- Enkelvoudige rente: $A = P(1 + in)$
- Saamgestelde rente: $A = P(1 + i)^n$
- Enkelvoudige waardevermindering: $A = P(1 - in)$
- Saamgestelde waardevermindering: $A = P(1 - i)^n$
- Nominale en effektiewe jaarlikse rentekoerse: $1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

Oefening 9 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Thabang koop 'n Mercedes wat R 385 000 in 2007 werd is. Wat sal die waarde van die Mercedes teen die einde van 2013 wees as:

   a) die motor teen 6% p.j. reglynige waardevermindering depresiëer.

   b) die motor teen 6% p.j. verminderde-saldo waardevermindering depresiëer.

2. Greg gaan 'n 5-jaar huurkoop ooreenkoms aan om 'n rekenaar vir R 8900 te koop. Die rentekoers word genoteer as 11% per jaar gebaseer op enkelvoudige rente. Bereken die maandelikse betaling vir hierdie kontrak.

3. 'n Rekenaar word aangekoop teen R 16 000. Dit depresiëer teen 15% per jaar.

   a) Bepaal die boekwaarde van die rekenaar na 3 jaar as waardevermindering met die reglynige metode bereken word.

   b) Vind die koers volgens die verminderde-saldo metode wat na 3 jaar dieselfde boekwaarde sou oplewer as wat bereken is in die vorige vraag.

4. Maggie belê R 12 500 vir 5 jaar teen 12% per jaar, maandeliks saamgestel vir die eerste 2 jaar, en dan 14% per jaar, halfjaarliks saamgestel vir die volgende 3 jaar. Hoeveel sal Maggie na 5 jaar ontvang, in totaal?

5. Tintin belê R 120 000. Hy ontvang 'n nominale rentekoers van $7{,}2\%$ per jaar, maandeliks saamgestel.

   a) Bereken die effektiewe koers per jaar (korrek tot twee desimale plekke).

   b) Gebruik die effektiewe koers om die waarde van Tintin se belegging te bereken as hy die geld vir 3 jaar belê het.

   c) Veronderstel dat Tintin sy geld vir 'n totale periode van 4 jaar belê, maar na 18 maande 'n onttrekking van R 20 000 maak. Hoeveel sal hy ontvang aan die einde van die 4 jaar?

6. Ntombi maak rekeninge by 'n aantal klerewinkels oop en bestee kwistig. Sy maak groot skuld en kan nie haar rekeninge afbetaal nie. Sy skuld R 5000 aan Fashion World en die winkel stem in dat sy die rekening teen 'n nominale rentekoers van 24%, maandeliks saamgestel, kan afbetaal.

   a) Hoeveel geld sal sy aan Fahion World verskuldig wees na twee jaar?

   b) Wat is die effektiewe rentekoers wat Fashion World haar laat betaal?

7. John belê R 30 000 in die bank vir 'n periode van 18 maande. Bereken hoeveel geld hy teen die einde van die periode sal hê en bereken die effektiewe jaarlikse rentekoers as die nominale rente van 8% as volg saamgestel word:

	Berekening	Opgeloopte bedrag	Effektiewe jaarlikse rentekoers
jaarliks			
halfjaarliks			
kwartaalliks			
maandeliks			
daagliks			

8. Skakel 'n effektiewe jaarlikse rentekoers van $11{,}6\%$ p.j. oor na 'n nominale rentekoers wat as volg bereken word:

   a) halfjaarliks
   b) kwartaalliks
   c) maandeliks

9. Joseph moet sy erf in die Weskus verkoop en hy moet R 300 000 inkry uit die verkoop van die grond. As die eiendomsagent 7% kommissie neem op die verkoopsprys, hoeveel moet die koper vir die erf betaal?

10. Mev. Brown het afgetree en 'n enkelbedrag van R 200 000 ontvang. Sy het die geld in 'n vaste spaarrekening gedeponeer vir 6 jaar. Aan die einde van die 6 jaar was die waarde van die belegging R 265 000. As die rente op haar belegging maandeliks saamgestel is, bepaal:

    a) die nominale rentekoers per jaar
    b) die effektiewe jaarlikse rentekoers

11. R 145 000 is belê in 'n rekening wat rente bied teen 9% p.j. halfjaarliks saamgestel vir die eerste 2 jaar. Dan verander die rentekoers na 4% p.j. kwartaalliks saamgestel. Vier jaar na die oorspronklike belegging word R 20 000 onttrek. 6 jaar na die oorspronklike belegging word 'n deposito van R 15 000 gemaak. Bepaal die balans van die rekening aan die einde van 8 jaar.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26K8 2. 26K9 3. 26KB 4. 26KC 5. 26KD 6. 26KF
7. 26KG 8. 26KH 9. 26KJ 10. 26KK 11. 26KM

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 10

Waarskynlikheid

10.1 Hersiening EME5P

Terminologie EME5Q

Uitkoms: 'n enkele waarneming van 'n onsekere of toevallige proses (genoem 'n *eksperiment*). Byvoorbeeld, as jy per ongeluk 'n boek laat val, kan dit op die voorkant of op die agterkant land. Elkeen van hierdie gevalle is 'n moontlike uitkoms.

Steekproefruimte van 'n eksperiment: die versameling van alle moontlike uitkomste van die eksperiment. Byvoorbeeld, die steekproefruimte wanneer jy 'n enkele 6-kantige dobbelsteen rol, is die versameling $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Vir 'n gegewe eksperiment is daar presies een steekproefruimte. Die steekproefruimte word aangedui deur die letter S.

Gebeurtenis: 'n versameling uitkomste van 'n proefneming. Byvoorbeeld, tydens die radioaktiewe verval van 1 gram van uranium-234, is een moontlike gebeurtenis dat die hoeveelheid alfadeeltjies wat uitgestraal word in 1 mikrosekonde tussen 225 en 235 is.

Waarskynlikheid van 'n gebeurtenis: 'n reële getal tussen 0 en 1 wat beskryf hoe groot die kans is dat die gebeurtenis sal plaasvind. 'n Waarskynlikheid van 0 beteken die uitkoms van die eksperiment sal nooit in die gebeurtenisversameling wees nie. 'n Waarskynlikheid van 1 beteken die uitkoms van die eksperiment sal nooit nie in die gebeurtenisversameling wees nie dus, dit sal altyd daar wees. Wanneer al die moontlike uitkomste van 'n eksperiment 'n gelyke kans het om voor te kom, dan is die waarskynlikheid van die gebeurtenis die hoeveelheid uitkomste in die gebeurtenisversameling gedeel deur die hoeveelheid uitkomste in die steekproefruimte.

Relatiewe frekwensie van 'n gebeurtenis: die aantal kere wat die gebeurtenis voorkom tydens proefnemings, gedeel deur die totale aantal proefnemings wat uitgevoer word. Byvoorbeeld, as ons 'n muntstuk 10 keer opskiet en dit land 3 keer op kop, dan is die relatiewe frekwensie van die kopgebeurtenis $\frac{3}{10} = 0{,}3$.

Vereniging van gebeurtenisse: die versameling van al die uitkomste wat in ten minste een van die gebeurtenisse voorkom. Vir 2 gebeurtenisse voorgestel deur A en B, skryf ons die verening as "A of B". 'n Ander manier om die versameling voor te stel is deur middel van versamelingnotasie: $A \cup B$.

Snyding van gebeurtenisse: die versameling van alle moontlike uitkomste wat in al die gebeurtenisse voorkom. Vir 2 gebeurtenisse, voorgestel deur A en B, skryf ons die snyding as "A en B". 'n Ander manier om die versameling voor te stel is deur middel van versamelingnotasie: $A \cap B$.

Onderling uitsluitende gebeurtenisse: gebeurtenisse wat geen uitkomste in gemeen het nie, dit is: $(A \text{ en } B) = \emptyset$. Onderling uitsluitende gebeurtenisse kan nooit gelyktydig voorkom nie. Byvoorbeeld, die gebeurtenis dat 'n getal ewe is en die gebeurtenis dat 'n getal onewe is, is onderling uitsluitend, want 'n getal kan nooit beide ewe en onewe wees nie.

Komplementêre gebeurtenisse: twee onderling uitsluitende gebeurtenisse wat saam al die uitkomste in die steekproefruimte bevat. Vir 'n gebeurtenis A, skryf ons die komplement as "nie A". 'n Ander manier om die komplement voor te stel is as A'.

Sien video: 26KN op www.everythingmaths.co.za

Identiteite EME5R

Die **somreël** vir enige 2 gebeurtenisse, A en B is

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$$

Hierdie reël verbind die waarskynlikhede van 2 gebeurtenisse met die waarskynlikhede van hulle vereniging en snyding.

Die **somreël vir 2 onderling uitsluitende gebeurtenisse** is

$$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$$

Hierdie reël is 'n spesiale geval van die vorige reël, want die gebeurtenisse is onderling uitsluitend, $P(A \text{ en } B) = 0$.

Die **komplementreël** is

$$P(\text{nie } A) = 1 - P(A)$$

Hierdie reël is 'n spesiale geval van die vorige die vorige reël. Want A en $(\text{nie } A)$ is onderling uitsluitend en, $P(A \text{ of } (\text{nie } A)) = 1$.

Sien video: 26KP op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Gebeurtenisse

VRAAG

Jy neem al die harte uit 'n pak kaarte. Jy kies dan 'n kaart ewekansig uit die versameling van harte. Wat is die steekproefruimte? Wat is die waarskynlikheid van elkeen van die volgende gebeurtenisse?

1. Die kaart is die aas, of A, van harte.
2. Die kaart het 'n priemgetal op.
3. Die kaart het 'n letter van die alfabet op.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die steekproefruimte neer

Aangesien ons slegs een stel uit die pak kaarte (die hartens) oorweeg, hoef ons slegs die letters en nommers van die kaarte neer te skryf. Dus die steekproefruimte is:

$$S = \{\text{A}; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; \text{J}; \text{Q}; \text{K}\}$$

Stap 2: Skryf die gebeurtenisversamelings neer

- A van harte: $\{\text{A}\}$
- priemgetal: $\{2; 3; 5; 7\}$
- letter van die alfabet: $\{\text{A}; \text{J}; \text{Q}; \text{K}\}$

Stap 3: Bereken die waarskynlikhede

Die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis is gedefiniëer as die aantal elemente in die gebeurtenisversameling gedeel deur die aantal gebeurtenisse in die steekproefruimte. Daar is 13 elemente in die steekproefruimte. Die waarskynlikheid van elke gebeurtenis is dus

- A van harte: $\frac{1}{13}$
- priemgetal: $\frac{4}{13}$
- letter van die alfabet: $\frac{4}{13}$

Uitgewerkte voorbeeld 2: Gebeurtenisse

VRAAG

Jy rol twee 6-kantige dobbelstene. Laat E die gebeurtenis voorstel dat die totale getal kolletjies op die twee dobbelstene 10 is. Laat F die gebeurtenis voorstel dat ten minste een dobbelsteen 'n 3 wys.

1. Skryf die gebeurtenisversamelings vir E en F.
2. Bepaal die waarskynlikhede vir E en F.
3. Is E en F onderling uitsluitend? Hoekom of hoekom nie?

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die steekproefruimte neer

Die steekproefruimte van 'n enkele 6-kantige dobbelsteen is $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Om die steekproefruimte van twee 6-kantige dobbelstene te bepaal, moet ons kyk na elke moontlike paar nommers van 1 tot 6.

$$S = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1;1) & (1;2) & (1;3) & (1;4) & (1;5) & (1;6) \\ (2;1) & (2;2) & (2;3) & (2;4) & (2;5) & (2;6) \\ (3;1) & (3;2) & (3;3) & (3;4) & (3;5) & (3;6) \\ (4;1) & (4;2) & (4;3) & (4;4) & (4;5) & (4;6) \\ (5;1) & (5;2) & (5;3) & (5;4) & (5;5) & (5;6) \\ (6;1) & (6;2) & (6;3) & (6;4) & (6;5) & (6;6) \end{array} \right\}$$

Stap 2: Skryf die gebeurtenisse neer

Vir E moet die dobbelstene saam gelyk wees aan 10.

$$E = \{(4;6); (5;5); (6;4)\}$$

Vir F moet ten minste een dobbelsteen 3 vertoon.

$$F = \{(1;3); (3;1); (2;3); (3;2); (3;3); (4;3); (3;4); (5;3); (3;5); (6;3); (3;6)\}$$

Stap 3: Bereken die waarskynlikhede

Die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis is gedefiniëer as die aantal elemente in die gebeurtenisversameling gedeel deur die aantal gebeurtenisse in die steekproefruimte. Daar is:

- $6 \times 6 = 36$ uitkomste in die steekproefruimte, S
- 3 uitkomste in die gebeurtenis E
- 11 uitkomste in die gebeurtenis F

Dus

$$P(E) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

en

$$P(F) = \frac{11}{36}$$

Stap 4: Is hulle onderling uitsluitend

Om te toets of twee gebeurtenisse onderling uitsluitend is, moet ons toets of hulle snyding leeg is. Aangesien E geen uitkomste het wat 'n 3 op 'n dobbelsteen bevat nie, is die snyding van E en F is leeg, $(E \text{ en } F) = \emptyset$. Dit beteken die gebeurtenisse is onderling uitsluitend.

Sien video: 26KQ op www.everythingmaths.co.za

Oefening 10 – 1: Hersiening

1. 'n Sak bevat r rooi balle, b blou balle en y geel balle. Wat is die waarskynlikheid dat 'n bal, wat ewekansig uit die sak gehaal word, geel is?
2. 'n Pakkie bevat geel en pienk lekkers. Die waarskynlikheid dat 'n pienk lekker uitgehaal word is $\frac{7}{12}$. Wat is die waarskynlikheid dat 'n geel lekker uitgehaal word?
3. Jy skiet 'n muntstuk 4 keer op. Wat is die waarskynlikheid dat 2 uitkomste kruis sal wees en 2 uitkomste munt sal wees? Skryf die steekproefruimte en die gebeurtenisversameling neer om die waarskynlikheid van hierdie gebeurtenis te bepaal.
4. In 'n klas van 37 kinders, is daar 15 kinders wat skool toe stap, 20 wat troeteldiere by die huis het en 12 wat 'n troeteldier by die huis het en ook skool toe stap. Hoeveel van die kinders wat skool toe stap het nie 'n troeteldier by die huis nie?
5. Jy rol twee 6-kantige dobbelstene en stel belang in die volgende twee gebeurtenisse:
   - A: die som van die dobbelstene is gelyk aan 8
   - B: ten minste een van die dobbelstene vertoon 'n 1

   Toon aan dat hierdie gebeurtenisse onderling uitsluitend is.

6. Vra vir jou vriendin om te dink aan 'n getal van 1 tot 100. Jy vra dan vir haar die volgende vrae:

   - Is die getal ewe?
   - Is die getal deelbaar deur 7?

   Hoeveel moontlike getalle is kleiner as 80 as sy "ja" antwoord opbeide hierdie vrae?

7. In 'n groep van 42 leerlinge het almal behalwe 3, 'n pakkie skyfies of 'n Fanta of altwee. As 23 'n pakkie skyfies het en 7 van hierdie 23 ook 'n Fanta het, wat is die waarskynlikheid dat 'n leerling wat ewekansig gekies word die volgende het:

   a) skyfies sowel as 'n Fanta
   b) net Fanta

8. Tamara het 18 sokkies in 'n laai. Agt van hierdie is oranje en twee is pienk. 'n Sokkie word ewekansig uit die laai uitgehaal. Bereken die waarskynlikheid dat die sokkie beskryf kan word as:

   a) oranje
   b) nie oranje nie
   c) pienk
   d) nie pienk nie
   e) oranje of pienk
   f) nie oranje of pienk nie

9. 'n Boks het gekleurde blokkies. Die aantal blokkies van elke kleur word gegee in die volgende tabel:

Kleur	Pers	Oranje	Wit	Pienk
Aantal blokkies	24	32	41	19

   'n Blokkie word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat die blokkie die volgende kleur sal hê?

   a) pers
   b) pers of wit
   c) pienk en oranje
   d) nie oranje nie?

10. Die oppervlak van 'n sokkerbal is saamgestel uit 32 vlakke. 12 vlakke is reëlmatige vyfhoeke, waarvan elkeen se oppervlakte ongeveer 37 cm^2 is. Die ander 20 vlakke is reëlmatige seshoeke, elkeen met 'n oppervlakte van ongeveer 56 cm^2.

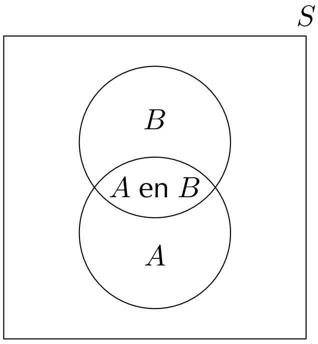
    Jy rol die sokkerbal. Wat is die waarskynlikheid dat dit stop sodat een van die vyfhoekige kante die grond raak?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26KR 2. 26KS 3. 26KT 4. 26KV 5. 26KW 6. 26KX
7. 26KY 8. 26KZ 9. 26M2 10. 26M3

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

'n Venndiagram word gebruik om die verwantskap tussen gebeurtenisse te verduidelik. 'n Venndiagramme kan baie behulpsaam wees wanneer waarskynlikhede bereken word. In die Venndiagram word elke gebeurtenis deur 'n vorm voorgestel, dikwels deur 'n sirkel of 'n reghoek.



'n Venndiagram verteenwoordig die steekproefruimte, S, as 'n vierkant; die twee gebeurtenisse A en B, as sirkels. Die snyding van die twee sirkels bevat die uitkomste wat in beide A én B voorkom.

Venndiagramme kan op effe verskillende maniere bebruik word en dit is belangrik om die verskille tussen hulle op te let. Die volgende 3 voorbeelde toon hoe 'n Venndiagram gebruik word in die voorstelling van:

- die uitkomste ingesluit in elke gebeurtenis;
- die aantal uitkomste in elke gebeurtenis; en
- die waarskynlikheid van elke gebeurtenis.

Uitgewerkte voorbeeld 3: Venndiagram met uitkomste

VRAAG

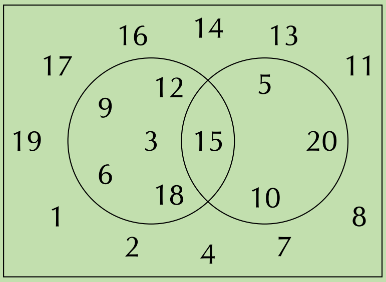
Kies 'n getal tussen 1 en 20. Teken 'n Venndiagram om die volgende vrae te beantwoord.

1. Wat is die waarskynlikheid dat die getal 'n veelvoud is van 3?
2. Wat is die waarskynlikheid dat die getal 'n veelvoud is van 5?
3. Wat is die waarskynlikheid dat die getal 'n veelvoud is van 3 of 5?
4. Wat is die waarskynlikheid dat die getal 'n veelvoud is van 3 en 5?

OPLOSSING

Stap 1: Skets 'n Venndiagram

Die Venndiagram moet die steekproefruimte van alle getalle van 1 tot 20 aandui. Dit moet ook 'n gebeurtenisversameling aandui wat alle veelvoude van 3 insluit, voorgestel deur $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$, en nog 'n gebeurtenisversameling wat alle veelvoude van 5 voorstel deur $B = \{5; 10; 15; 20\}$. Let daarop dat daar slegs een gedeelde uitkoms tussen die twee gebeurtenisse is, naamliks 15.



Stap 2: Bereken die waarskynlikhede

Die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis is die aantal uitkomste in die gebeurtenisversameling gedeel deur aantal uitkomste in die steekproefruimte. Daar is 20 uitkomste in die steekproefruimte.

1. Aangesien daar 6 uitkomste in die veelvoud van 3 gebeurtenisversameling is, is die waarskynlikheid dat 'n veelvoud van 3 sal voorkom is $P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.
2. Aangesien daar 4 uitkomste is in die veelvoud van 5 gebeurtenisvesameling, is die waarskynlikheid dat 'n veelvoud van 5 voorkom $P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.
3. Die gebeurtenis waar die getal 'n veelvoud is van 3 of 5 is die vereniging van die twee bogenoemde gebeurtenisversamelings. Daar is 9 elemente in die vereniging van die gebeurtenisversameling, so die waarskynlikheid is $\frac{9}{20}$.
4. Die gebeurtenis waar die getal 'n veelvoud is van 3 en 5 is die snyding van die twee gebeurtenisversamelings. Daar is 1 element in die snyding van die gebeurtenisversameling, so die waarskynlikheid is $\frac{1}{20}$.

Uitgewerkte voorbeeld 4: Venndiagram met hoeveelhede

VRAAG

In 'n groep van 50 leerlinge, neem 35 Wiskunde en 30 Geskiedenis, terwyl 12 nie een van die vakke neem nie. Skets 'n Venndiagram wat die inligting voorstel. As 'n leerling lukraak uit die groep gekies word, wat is die waarskynlikheid dat hy beide Wiskunde en Geskiedenis neem?

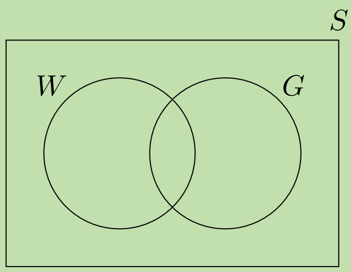
OPLOSSING

Stap 1: Skets die buitelyne van die Venndiagram

Daar is 2 gebeurtenisse in die vraag, naamlik

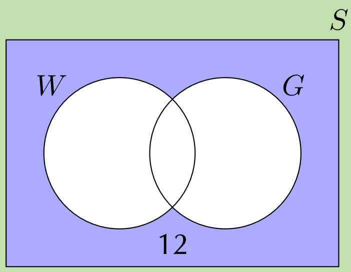
- W: dat 'n leerling Wiskunde neem; en
- G: dat 'n leerling Geskiedenis neem.

Ons moet eers 'n paar berekeninge doen voordat ons die volledige Venndiagram kan teken, maar met die bogenoemde inligting kan ons alreeds die buitelyne skets.



Stap 2: Skryf die groottes van die gebeurtenisversamelings neer, asook hul vereniging en snyding

Ons weet dat 12 leerlinge nie een van die twee vakke neem nie. Ons kan dit grafies voorstel as:



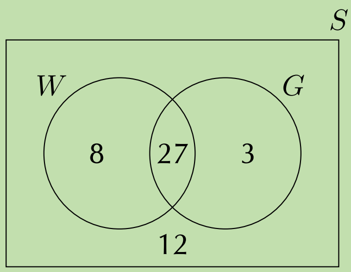
Aangesien daar 50 elemente in die steekproefruimte is, kan ons van hierdie figuur sien dat daar is $50 - 12 = 38$ elemente in (W of G). So ver weet ons

- $n(W) = 35$
- $n(G) = 30$
- $n(W \text{ of } G) = 38$

Van die somreël,

$$\begin{aligned} n(W \text{ of } G) &= n(W) + n(G) - n(W \text{ en } G) \\ \therefore n(W \text{ en } G) &= 35 + 30 - 38 \\ &= 27 \end{aligned}$$

Stap 3: Skets die finale Venndiagram



Uitgewerkte voorbeeld 5: Venndiagram met waarskynlikhede

VRAAG

Skets 'n Venndiagram wat dieselfde inligting voorstel as die vorige voorbeeld, behalwe dat in plaas van die hoeveelhede, moet die waarskynlikhede van die verkillende gebeurtenisse voorgestel word.

As 'n leerling willekeurig uit die groep gekies word, wat is die waarskynlikheid dat hy beide Wiskunde en Geskiedenis neem?

OPLOSSING

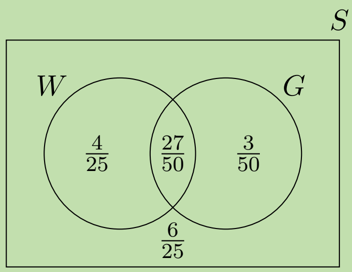
Stap 1: Gebruik hoeveelhede om die waarskynlikhede te bereken

Aangesien daar 50 elemente (leerlinge) in die steekproefruimte is, kan ons die waarskynlikhede van enige gebeurtenis bereken deur om die grootte van die gebeurtenisversameling te deel deur 50. Dit gee die volgende waarskynlikhede:

- $P(W) = \frac{35}{50} = \frac{7}{10}$
- $P(G) = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$
- $P(W \text{ of } G) = \frac{38}{50} = \frac{19}{25}$
- $P(W \text{ en } G) = \frac{27}{50}$

Stap 2: Skets die Venndiagram

Volgende vervang ons elke hoeveelheid in die Venndiagram in die vorige voorbeeld met 'n waarskynlikheid.



Stap 3: Vind die antwoord

Die waarskynlikheid dat 'n willekeurig gekose leerling beide Wiskunde en Geskiedenis neem is $P(W \text{ en } G) = \frac{27}{50}$.

Sien video: 26M4 op www.everythingmaths.co.za

Oefening 10 – 2: Venndiagram hersiening

1. Gegewe die volgende inligting:
   - $P(A) = 0{,}3$
   - $P(B \text{ en } A) = 0{,}2$
   - $P(B) = 0{,}7$

   Skets eers 'n Venndiagram wat die inligting voorstel. Bereken dan die waarde van $P(B \text{ en } (\text{nie } A))$.

2. Jy word die volgende inligting gegee:
   - $P(A) = 0{,}5$
   - $P(A \text{ en } B) = 0{,}2$
   - $P(\text{nie } B) = 0{,}6$

   Skets 'n Venndiagram wat hierdie inligting voorstel en bepaal $P(A \text{ of } B)$.

3. 'n Studie is onderneem om te bepaal hoeveel mense in Port Elizabeth besit of 'n Volkswagen of 'n Toyota. 3% besit beide, 25% besit 'n Toyota en 60% besit 'n Volkswagen. Watter persentasie van mense besit nie een van die twee nie?

4. Laat S die versameling telgetalle van 1 tot 15 voorstel, X die versameling ewe getalle van 1 tot 15 en Y die versameling van priemgetalle van 1 tot 15. Skets 'n Venndiagram wat S, X en Y uitbeeld.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26M5 2. 26M6 3. 26M7 4. 26M8

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.2 Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse

EME5T

Soms vertel die teenwoordigheid of afwesigheid van een gebeurtenis vir ons iets oor ander gebeurtenisse.

DEFINISIE: *Onafhanklike gebeurtenisse*

Twee gebeurtenisse, A en B is onafhanklik as en slegs as

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

Dit mag dalk nie onmiddellik duidelik wees hoekom ons gebeurtenisse wat bogenoemde vergelyking bevredig onafhanklik sou noem nie.

Ondersoek: Onafhanklikheid

Rol 'n enkele 6-kantige dobbelsteen en oorweeg die volgende twee gebeurtenisse:

- E: jy kry 'n ewe getal
- T: jy kry 'n getal wat deur drie gedeel kan word

Beantwoord nou die volgende vrae:

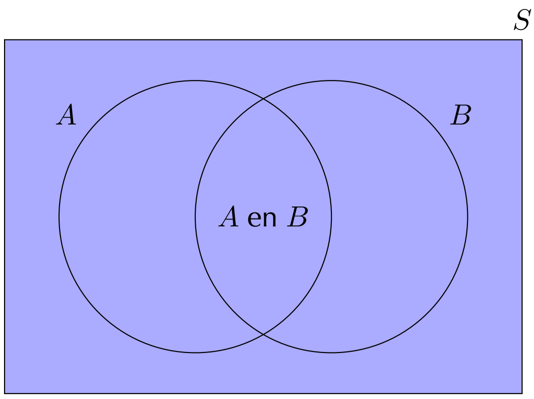
- Wat is die waarskynlikheid van E?
- Wat is die waarskynlikheid om 'n ewe getal te kry as jy vertel word dat die getal ook deur drie deelbaar is?
- As 'n mens weet dat die getal deelbaar is deur 3, verander dit die waarskynlikheid dat dit 'n ewe getal is?

Is die gebeurtenisse E en T afhanklik of onafhanklik volgens die definisie? (Wenk: oorweeg die definisie van onafhanklikheid.)

Sien video: 26M9 op www.everythingmaths.co.za

So, hoekom noem ons dit **onafhanklikheid** wanneer $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$? Vir twee gebeurtenisse, A en B, beteken onafhanklikheid dat as 'n mens die uitkoms van B weet, dit nie die waarskynlikheid van die gebeurtenis A beïnvloed nie.

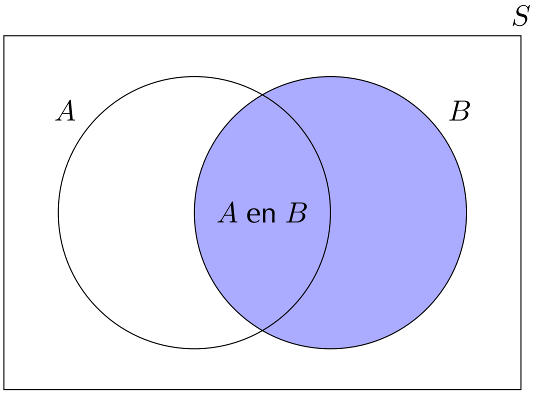
Oorweeg die volgende Venndiagram:



Die waarskynlikheid van A is die verhouding tussen die aantal uitkomste in A en die aantal uitkomste in die steekproefruimte, S.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Sê nou ons **weet** dat gebeurtenis B plaasgevind het. Hoe beïnvloed dit die waarskynlikheid van A? Hier is hoe die Venndiagram verander:



'n Aantal van die moontlike uitkomste (al die uitkomste buite B) is nou uit die prentjie, omdat ons weet dat hulle nie gebeur het nie. Die waarskynlikheid dat A plaasvind, gegewe dat ons weet dat B plaasgevind het, is die verhouding tussen die grootte van die gebied waar A teenwoordig is (A en B) en die grootte van alle moontlike gebeurtenisse(B).

$$P(A \text{ as ons weet } B) = \frac{n(A \text{ en } B)}{n(B)}$$

As $P(A) = P(A \text{ as ons weet } B)$ noem ons hulle onafhanklik, want om te weet wat B is, verander nie die waarskynlikheid van A nie.

Met behulp van 'n bietjie algebra, kan ons bewys dat hierdie stelling van onhafhanklikheid dieselde is as die definisie van onafhanklikheid wat ons aan die begin van hierdie afdeling gesien het. Vir onafhanklike gebeurtenisse

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

Dit is gelykstaande aan

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \text{ en } B) \div P(B) \\ &= \frac{n(A \text{ en } B)}{n(S)} \div \frac{n(B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A \text{ en } B)}{n(B)} \\ &= P(A \text{ as ons weet } B) \end{aligned}$$

Dit is hoekom ons gebeurtenisse onafhanklik noem!

(Slegs vir verryking):

Die verhouding

$$\frac{P(A \text{ en } B)}{P(B)}$$

word 'n **voorwaardelikke waarskynlikheid** genoem en word geskryf in die notasie $P(A \mid B)$. Hierdie notasie lees "die waarskynlikheid van A gegewe B."

As (en slegs as) A en B onafhanklik is: $P(A \mid B) = P(A)$ en $P(B \mid A) = P(B)$. Probeer om dit te bewys deur gebruik te maak van die definisie van onafhanklikheid.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Onafhanklike en afhanklike gebeurtenisse

VRAAG

'n Sak bevat 5 rooi en 5 blou balle. Ons trek dan ewekansige 'n bal uit die sak, maak 'n aantekening van die kleur en sit dit terug in die sak. Ons onttrek dan nog 'n bal ewekansig uit die sak en teken die kleur aan.

1. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste bal rooi is?
2. Wat is die waarskynlikheid dat die tweede bal blou is?
3. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste bal rooi en die tweede bal blou is?
4. Is die eerste bal wat rooi is en die tweede bal wat blou is onafhanklike gebeurtenisse?

OPLOSSING

Stap 1: Waarskynlikheid van 'n rooi bal eerste

Aangesien daar 'n totaal van 10 balle is, waarvan 5 rooi is, is die waarskynlikheid om 'n rooi bal tekry is

$$P(\text{eerste bal rooi}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Stap 2: Waarskynlikheid van 'n blou bal tweede

Die vraag sê dat die eerste bal weer terug in die sak gesit word voordat die tweede bal uitgehaal word. Dit beteken dat wanneer ons die tweede bal onttrek, is daar steeds 'n totaal van 10 balle in die sak is, waarvan 5 blou is. Dus is die waarskynlikheid om 'n blou bal te trek

$$P(\text{tweede bal blou}) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Stap 3: Waarskynlikheid van rooi eerste en blou tweede

Wanneer twee balle uit sak gehaal word is daar 4 moontlilkhede. Ons kan kry

- 'n rooi bal en dan nog 'n rooi bal;
- 'n rooi bal en dan 'n blou bal
- 'n blou bal en dan 'n rooi bal
- 'n blou bal en dan nog 'n blou bal

Ons wil die waarskynlikheid weet van die tweede trekking as ons eerste 'n rooi bal moet hê. Aangesien daar 5 rooi balle is en 10 balle in totaal, is daar $\frac{5}{10}$ maniere om rooi bal te trek. Nou plaas ons die eerste bal terug, sodat daar weer 5 rooi balle en 5 blou balle in die sak is. Dus is daar $\frac{5}{10}$ maniere om 'n blou bal tweede te trek as eerste bal rooi was. Dit beteken dat daar

$$\frac{5}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$$

maniere is om 'n rooi bal eerste en blou bal tweede te trek. Dus, die waarskynlikheid om eers 'n rooi bal en dan 'n blou bal te trek is $\frac{1}{4}$.

Stap 4: Afhanklik of onafhanklik?

Volgens die definisie, is gebeurtenisse onahanklik as en slegs as

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

In die probleem:

- $P(\text{eerste bal rooi}) = \frac{1}{2}$
- $P(\text{tweede bal blou}) = \frac{1}{2}$
- $P(\text{eerste bal rooi en tweede bal blou}) = \frac{1}{4}$

Aangesien $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, is die gebeurtenisse onafhanklik.

Sien video: 26MB op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 7: Onafhanklike en afhanklike gebeurtenisse

VRAAG

In die vorige voorbeeld, het ons willekeurig 'n bal getrek en teruggeplaas in die sak voor die volgende trekking. Dit word **trekking met terugplasing** genoem. In die voorbeeld, volg ons dieselfde prosedure, behalwe ons plaas nie die eerste bal terug in die sak nie. Dit word **trekking sonder terugplasing** genoem.

Dus, vir 'n sak met 5 rooi en 5 blou balle, verwyder ons willekeurig 'n bal en teken die kleur aan. Dan, sonder om die eerste bal terug te plaas, trek ons nog 'n bal uit die sak en teken die bal se kleur aan.

1. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste bal rooi is?
2. Wat is die waarskynlikheid dat die tweede bal blou is?
3. Wat is die waarskynlikheid dat die eerste bal rooi en die tweede bal blou is?
4. Is die eerste bal wat rooi is en die tweede bal wat blou is onafhanklike gebeurtenisse?

OPLOSSING

Stap 1: Tel die hoeveelheid uitkomste

Ons kyk vir die aantal moontlike kombinasies wat bestaan vir die 4 moontlike uitkomste wanneer daar 2 balle verwyder word. In die vorige voorbeeld, het ons gesien dat daar 4 moontlike uitkomste is

- ’n rooi bal en dan nog ’n rooi bal
- ’n rooi bal en dan ’n blou bal
- ’n blou bal en dan ’n rooi bal
- ’n blou bal en dan nog ’n blou bal

Vir die eerste uitkoms moet ons ’n rooi bal eerste trek. Omdat daar in totaal 5 rooi balle en 10 balle is, is daar $\frac{5}{10}$ maniere om eerste ’n rooi bal te trek. Nadat ons die rooi bal verwyder het, is daar nou 4 rooi balle oor en 5 blou balle. Gevolglik is daar $\frac{4}{9}$ maniere om ’n rooi bal tweede te trek, na die eerste ook rooi was. Dit beteken dat daar

$$\frac{5}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{90}$$

maniere is om ’n rooi bal eerste en ’n rooi bal tweede te trek. Die waarskynlikheid vir die eerste uitkoms is $\frac{2}{9}$.

Vir die tweede uitkoms, moet ons eerste ’n rooi bal trek. Soos in die eerste uitkoms, is daar $\frac{5}{10}$ maniere om rooi bal eerste te trek; en daar is nou 4 rooi balle oor en 5 blou balle oor. Gevolglik is daar $\frac{5}{9}$ maniere om ’n blou bal tweede te trek as die eerste ’n rooi bal was. Dit beteken dat daar

$$\frac{5}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{25}{90}$$

maniere is om ’n rooi bal eerste en ’n blou bal tweede te trek. Die waarskynlikheid van die tweede uitkoms is $\frac{5}{18}$.

Ons kan die waarskynlikheid van die derde en vierde uitkomste op dieselfde manier bepaal as die eerste twee, maar daar is ’n makliker manier. Let op dat daar slegs 2 tipes balle is en dat daar presies eweveel is van elk aan die begin van trekking. Dit beteken dat die probleem geheel en al simmetries is tussen rooi en blou. Ons kan die simmetrie gebruik om die waarskynlikheid te bereken van die ander twee uitkomste.

Vir die derde uitkoms is die eerste bal blou en die tweede bal rooi. As gevolg van simmetrie het die uitkoms dieselfde waarskynlikheid as die tweede uitkoms (wanneer die eerste bal rooi is en tweede ’n blou bal is). Gevolglik is die waarskynlikheid vir die derde uitkoms $\frac{5}{18}$.

Met die vierde uitkoms is die eerste en tweede balle altwee blou. Vanuit simmetrie moet die uitkoms dieselfde waarskynlikheid as die eerste uitkoms hê (toe beide balle rooi moes wees). Gevolglik is die waarskynlikheid vir die vierde uitkoms $\frac{2}{9}$.

Opsommend, daar is moontlike uitkomste en hul waarskynlikheid:

- eerste bal rooi en tweede bal rooi: $\frac{2}{9}$;
- eerste bal rooi en tweede bal blou: $\frac{5}{18}$;
- eerste bal blou en tweede bal rooi: $\frac{5}{18}$;
- eerste bal blou en tweede bal blou: $\frac{2}{9}$.

Stap 2: Waarskynlikheid van ’n rooi bal eerste

Om die waarskynlikheid te bepaal van ’n rooi bal op die eerste trekking, moet ons kyk na al die uitkomste wat rooi bal eerste bevat. Hulle is

- 'n rooi bal en dan weer 'n rooi bal;
- 'n rooi bal en dan 'n blou bal.

Die waarskynlikheid van die eerste uitkoms is $\frac{2}{9}$ en die waarskynlikheid van die tweede uitkoms is $\frac{5}{18}$. Deur die twee waarskynlikhede by mekaar te tel, sien ons dat die waarskynlikheid om 'n rooi bal te trek, is

$$P(\text{eertse rooi bal}) = \frac{2}{9} + \frac{5}{18} = \frac{1}{2}$$

Dit is dieselfde as in die vorige oefening, wat nie te verrassend is nie, aangesien die waarskynlikheid dat die eerste bal 'n rooi is, nie geaffekteer word deur dit terug te plaas voor die trekking van die tweede bal of nie.

Stap 3: Waarskynlikheid van 'n blou bal tweede

Om die waarskynlikheid, van 'n blou bal met tweede trekking te bepaal, kyk ons na al die uitkomste wat blou balle bevat met die tweede trekking. Hulle is

- 'n rooi bal en dan 'n blou bal
- 'n blou bal en dan nog 'n blou bal

Die waarskynlikheid vir die eerste uitkoms is $\frac{5}{18}$ en die waarskynlikheid van die tweede uitkoms is $\frac{2}{9}$. Deur die twee waarskynlikhede by mekaar te tel, sien ons dat die waarskynlikheid om 'n blou bal te trek, is

$$P(\text{tweede bal blou}) = \frac{5}{18} + \frac{2}{9} = \frac{1}{2}$$

Dit is ook dieselfde as in die vorige oefening! Jy mag dit dalk ook verrassend vind dat die waarskynlikheid van 'n tweede bal trekking nie geaffekteer word deur of die eerste bal teruggeplaas word of nie. Die rede hoekom die waarskynlikheid steeds $\frac{1}{2}$ is, is omdat ons die waarskynlikheid bereken dat die tweede bal 'n blou is, sonder dat kleur van die eerste bal bekend is. Aangesien daar slegs twee gelyke moontlikhede vir 'n tweede bal trekking is (rooi of blou) en omdat ons nie weet of die eerste bal rooi of blou was nie, is daar dus 'n gelyke kans dat die tweede bal een van die kleure is.

Stap 4: Waarskynlikheid van rooi eerste en blou tweede

Ons het reeds die waarskynlikheid dat die eerste bal rooi is en die tweede bal blou is, bepaal. Dit is dus $\frac{5}{18}$.

Stap 5: Afhanklik of onafhanklik?

Volgens die definisie, is gebeurtenisse onahanklik as en slegs as

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

In die probleem:

- $P(\text{eerste bal rooi}) = \frac{1}{2}$
- $P(\text{tweede bal blou}) = \frac{1}{2}$
- $P(\text{eerste bal rooi en tweede bal blou}) = \frac{5}{18}$

Aangesien $\frac{5}{18} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, is die toestande onafhanklik.

WAARSKUWING!

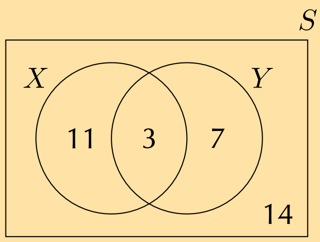
Net omdat twee toestande onderling uitsluitend is, beteken nie noodwendig dat hul onafhanklik is nie. Om te toets of toestande onderling uitsluitend, bevestig altyd dat $P(A \text{ en } B) = 0$. Om te bepaal of die toestande onafhanklik is, bevestig dat $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$. Sien die onderstaande oefeninge vir voorbeelde van toestande wat onderling uitsluitend en onafhanklik is in verskillende kombinasies.

Oefening 10 – 3: Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse

1. Gebruik die volgende Venndiagram om te bepaal of toestande X en Y

   a) onderling uitsluitende of nie-wedersyds eksklusief is;

   b) afhanklik of onafhanklik is



2. Van die 30 leerders in 'n klas het 17 swart hare, 11 het bruin hare en 2 het rooi hare. 'n Leerder word gekies uit die klas.

   a) Wat is die waarskylikheid dat die leerder swart hare het?

   b) Wat is die waarskylikheid dat die leerder bruin hare het?

   c) Is die twee toestande onderling uitsluitend?

   d) Is die twee toestande onafhanklik?

3. $P(M) = 0{,}45$; $P(N) = 0{,}3$ en $P(M \text{ of } N) = 0{,}615$. Is die toestande in M en N onderling uitsluitend, onafhanklik of nie-onderling uitsluitend of nie-onafhanklik?

4. (Vir verryking)

   Bewys dat as toestand A en toestand B onderling uitsluitend is met $P(A) \neq 0$ en $P(B) \neq 0$, dan is A en B is altyd afhanklik.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26MC 2. 26MD 3. 26MF 4. 26MG

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

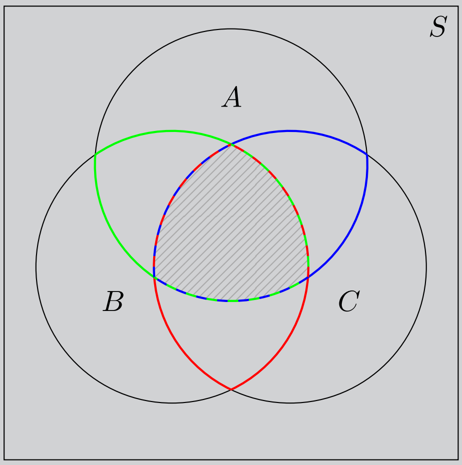
10.3 Meer Venndiagramme EME5V

In die oorblywende deel van die hoofstuk gaan ons kyk na gereedskap en tegnieke om waarskynlikheidproblemme op te los.

Wanneer daar met komplekse probleme gewerk word, waar ons drie of meer toestande het, kan kruisings verskillende vorms hê. Om hierdie probleme op te los, tel ons normaalweg die hoeveelheid (of persentasie) uitkomste van 'n toestand, of kombinasies van toestande. Venndiagramme is 'n hulpmiddel van opname en visualisering van tellings.

Ondersoek: Venndiagram vir 3 gebeurtenisse

Die diagram hieronder wys 'n algemene Venndiagram vir 3 gebeurtenisse.



Skryf die versameling neer wat ooreenstem met elk van die drie gekleurde gebiede en ook die arseringsgebied. Onthou dat die kruisings tussen sirkels verteenwoordig die kruising van verskillende gebeurtenisse.

Wat is die gebeurtenis vir

- die rooi gebied;
- die groen gebied;
- die blou gebied; en
- die arseringsgebied?

Uitgewerkte voorbeeld 8: Venndiagram vir 3 events

VRAAG

Skets 'n Venndiagram wat die steekproefruimte en gebeurtenisse toon:

- S: al die heelgetalle van 1 tot 30
- P: priemgetalle
- M: veelvoude van 3
- F: faktore van 30

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die steekproefruimte en gebeurtenis versamelings

Die steekproefruimte bestaan uit alle positiewe heelgetalle tot by 30.

$$S = \{1; 2; 3; \ldots; 30\}$$

Die priemgetalle tussen 1 en 30 is

$$P = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29\}$$

Die veelvoude van 3 tussen 1 en 30 is

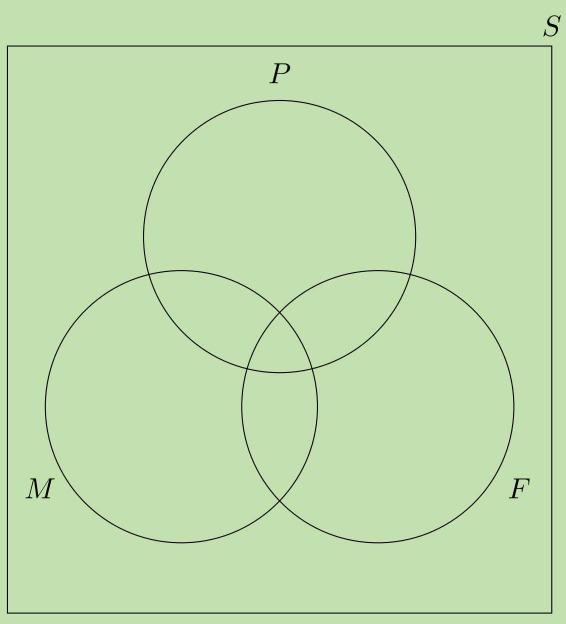
$$M = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21; 24; 27; 30\}$$

Die faktore van 30 is

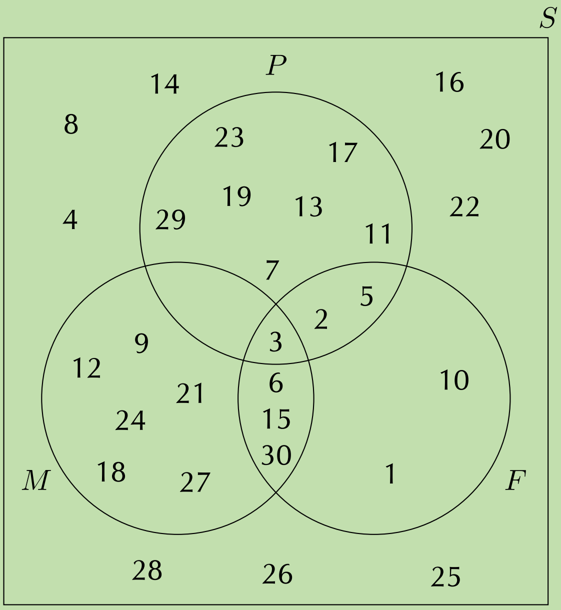
$$F = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

Stap 2: Teken die buitelyn van die Venndiagram

Daar is 3 gebeurtenisse, naamlik P, M en F, en die steekproefruimte, S. Toon die inligting in 'n Venndiagram:



Stap 3: Toon die uitkomste in die toepaslike gebeurtenisse versamelings



Uitgewerkte voorbeeld 9: Venndiagram vir 3 gebeurtenisse

VRAAG

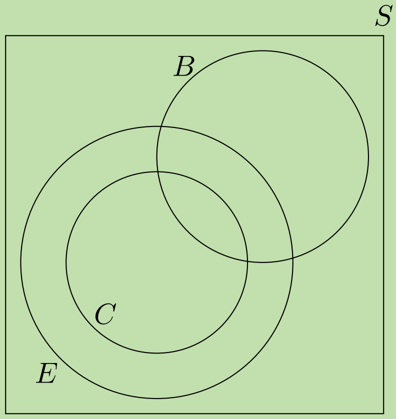
By Hoër Skool Dawnview is daar 400 Graad 11 leerders. 270 neem Rekenaarwetenskap, 300 neem Engels en 50 neem Besigheidstudies. Almal wat Rekenaarwetenskap neem, neem ook Engels, 20 neem Rekenaarwetenskap en Besigheidstudies en 35 neem Engels en Besigheidstudies. Gebruik 'n Venndiagram en bereken die waarskynlikheid dat 'n leerder wat willekeurig getrek word die volgende vak(ke) neem:

1. Engels, maar nie Besigheidstudies of Rekenaarwetenskap nie
2. Engels, maar nie Besigheidstudies nie
3. Engels of Besigheidstudies, maar nie Rekenaarwetenskap nie
4. Engels of Besigheidstudies

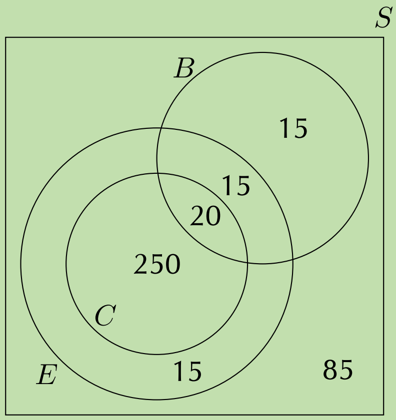
OPLOSSING

Stap 1: Teken die buitelyn van die Venndiagram

Ons moet versigtig wees met die probleem. Uit die vraagstelling word gesê dat al die leerders wat Rekenaarweteskap neem, ook Engels neem. Dit beteken dat die sirkel vir Rekenaarwetenskap, op die Venndiagram, binne die sirkel van Engels moet wees.

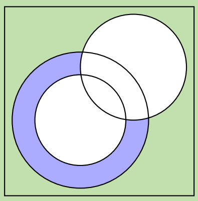


Stap 2: Vul die tellings in op Venndiagram



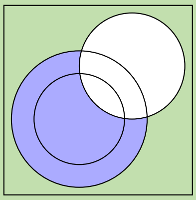
Stap 3: Bereken die waarskynlikhede

Om die hoeveelheid leerders aan te toon wat Engels neem, maar nie Besigheidstudies of Rekenaarwetenskap nie, moet ons in die gebied van die Venndiagram kyk:



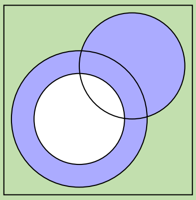
Die telling in die gebied is 15 en daar is 'n totaal van 400 leerders in die graad. Gevolglik is die waarskynlikheid dat 'n leerder Engels neem, maar nie Besigheidstudies of Rekenaarwetenskap nie, $\frac{15}{400} = \frac{3}{80}$.

Om die aantal leerders te toon wat Engels neem, maar nie Besigheidstudies nie, moet ons in die gebied van die Venndiagram kyk:



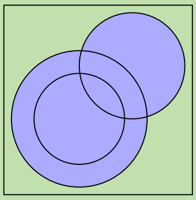
Die hoeveelheid in hierdie gebied is 265. Gevolglik is die waarskynlikheid dat 'n leerder Engels neem, maar nie Besigheidstudies nie, $\frac{265}{400} = \frac{53}{80}$.

Om die getal leerders te vind wat Engels of Besigheidstudies neem, maar nie Rekenaarwetenskap nie, moet ons na hierdie gebied op die Venndiagram kyk:



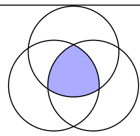
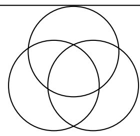
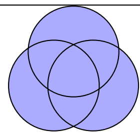
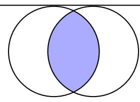
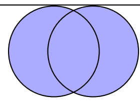
Die telling in hierdie gebied is 45. Dus die waarskynlikheid dat 'n leerder Engels of Besigheidstudies sal vat maar nie Rekenaarwetenskap nie is $\frac{45}{400} = \frac{9}{80}$.

Om die hoeveelheid leerders te bepaal wat Engels of Besigheidstudies neem, moet ons in die gebied van die Venndiagram kyk:



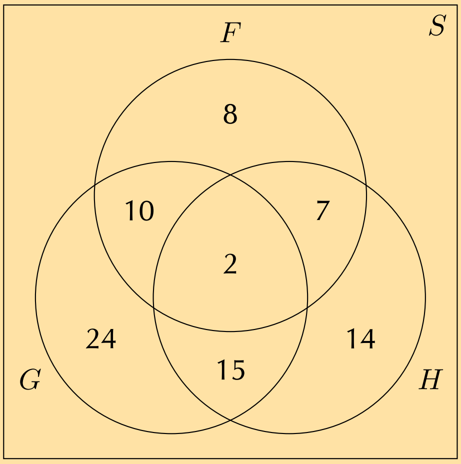
Die hoeveelheid in die gebied is 315. Gevolglik is die waarskynlikheid dat 'n leerder Engels of Besigheidstudies neem $\frac{315}{400} = \frac{63}{80}$.

Daar is sekere sleutel woorde wat vir jou sê watter deel van die Venndiagram voltooi moet word. Die volgende tabel lys die belangriker terme:

Woorde	Simbole	Venndiagram
älle”	A en B en C / $A \cap B \cap C$	
”geen”		
”minstens een”	A of B of C / $A \cup B \cup C$	
”beide A en B”	A en B / $A \cap B$	
”A of B”	A of B / $A \cup B$	

Oefening 10 – 4: Venndiagramme

1. Gebruik die Venndiagram hieronder en beantwoord die volgende vrae. Ook gegee: $n(S) = 120$.



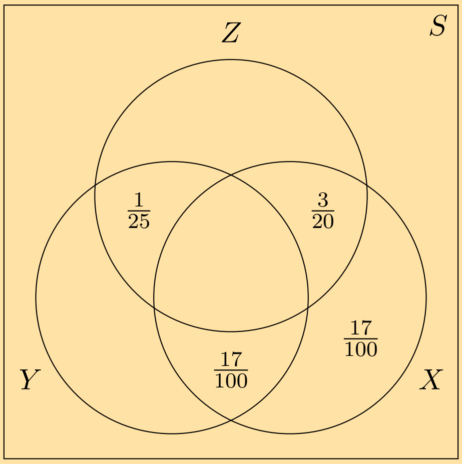
a) Bereken $P(F)$.

b) Bereken $P(G \text{ of } H)$.

c) Bereken $P(F \text{ en } G)$.

d) Is F en G afhanklik of onafhanklik?

2. Die onderstaande Venndiagram dui die waarskynlikhede van 3 gevalle aan. Voltooi die Venndiagram deur gebruik te maak van die addisionele inligting wat gegee is.



- $P(Z \text{ en (nie } Y)) = \frac{31}{100}$
- $P(Y \text{ en } X) = \frac{23}{100}$
- $P(Y) = \frac{39}{100}$

Na die voltooiing van die Venndiagram, bereken die volgende:

$$P\left(Z \text{ en nie } (X \text{ of } Y)\right)$$

3. Daar is 79 Graad 10 leerders by die skool. Al die leerders neem een of ander kombinasie van Wiskunde, Aardrykskunde en Geskiedenis. Die aantal leerders wat Aardrykskunde neem is 41; 36 wat Geskiedenis neem, en 30 neem Wiskunde. Die aantal leerders wat Wiskunde en Geskiedenis neem is 16; die aantal leerders wat Aardrykskunde en Geskiedenis neem is 6, en daar is 8 leerders wat slegs Wiskunde neem en 16 wat slegs Geskiedenis neem.

   a) Teken 'n Venndiagram om al hierdie inligting te illustreer.
   b) Hoeveel leerders neem Wiskunde en Aardrykskunde, maar nie Geskiedenis nie?
   c) Hoeveel leerders neem slegs Aardrykskunde?
   d) Hoeveel leerders neem al drie vakke?

4. Teken 'n Venndiagram met 3 wedersyds uitsluitende gevalle. Gebruik die diagram om te wys dat vir 3 wedersyds uitsluitende gevalle, A, B en C, die volgende waar is:

$$P(A \text{ of } B \text{ of } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

   Hierdie is die somreël vir 3 wedersydse uitsluitende gevalle.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

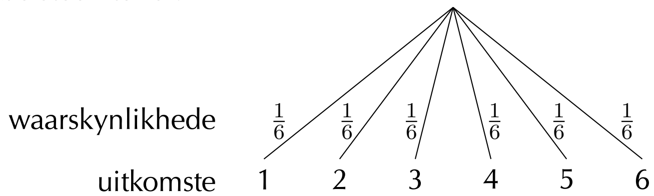
1. 26MH 2. 26MJ 3. 26MK 4. 26MM

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

10.4 Boomdiagramme EME5W

Boomdiagramme is nuttig vir die organisering visualisering van die verskillende moontlike uitkomste van 'n reeks van gebeurtenisse. Vir elke moontlike uitkoms van die eerste gebeurtenis, trek ons 'n lyn waarop ons die waarskynlikheid van die uitkoms skryf, en die situasie as daardie uitkoms gebeur. Dan, vir elke moontlike uitkoms van die tweede gebeurtenis, sal ons dieselfde doen.

Hieronder is 'n voorbeeld van 'n boomdiagram wat die moontlike uitkomste wys om 'n 6-kantige dobbelsteen te rol.



Let op dat elke uitkoms (die getalle 1 tot 6) aan die einde van elke lyn aangedui word; en die waarskynlikheid van elke uitkoms (almal $\frac{1}{6}$ in die geval) word op elke lyn aangedui. Die waarskynlikhede moet optel na 1 ten einde al die moontlike uitkomste te dek. In die onderstaande voorbeelde, sal ons sien hoe om die boomdiagramme met veelvoudige gebeurtenisse te teken en hoe om die waarskynlikhede te bereken deur die diagramme te gebruik.

Vroeër in die hoofstuk het jy geleer van afhanklike en onafhanklike gevalle. Boomdiagramme is baie nuttig om afhanklike gebeurtenisse te analiseer. 'n Boomdiagram laat jou toe om te wys hoe elke moontlike uitkoms van een gebeurtenis die waarskynlikheid van die die ander gebeurtenisse beïnvloed.

Boomdiagramme is minder nuttig vir onafhanklike gebeurtenisse omdat ons net die waarskynlikhede van die afsonderlike gevalle met mekaar kan vermenigvuldig om die gesamentlike waarskynlikheid te kry. Onthou dat vir onafhanklike gevalle:

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

So, as jy reeds weet dat die gevalle onafhanklik is, is dit gewoonlik makliker om die probleem op te los sonder die gebruik van boomdiagramme. Maar, as jy onseker is of die gevalle onafhanklik is of as jy weet dit is nie, moet jy die boomdiagram teken.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Teken 'n boomdiagram

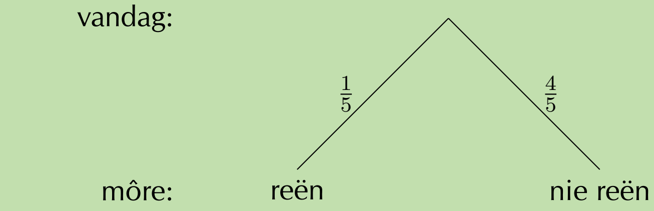
VRAAG

As dit reën op 'n gegewe dag, is die waarskynlikheid dat dit die volgende dag reën $\frac{1}{3}$. As dit nie die gegewe dag reën nie, is die waarskynlikheid dat dit die volgende dag gaan reën $\frac{1}{6}$. Die waarskynlikheid dat dit môre sal reën is $\frac{1}{5}$. Wat is die waarskynlikheid dat dit sal reën die dag na môre? Teken 'n boomdiagram van al die moontlikhede om die antwoord te bepaal.

OPLOSSING

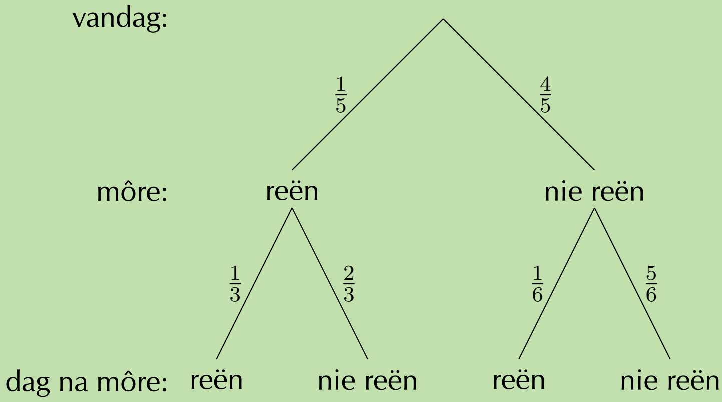
Stap 1: Teken die eerste vlak van die boomdiagram

Voordat ons kan bepaal wat die dag na môre gebeur, moet ons eers bepaal wat môre moontlik gaan gebeur. Ons weet dat daar 'n $\frac{1}{5}$ kans is dat dit môre sal reën. Hier is hoe om die inligting op 'n boomdiagram voor te stel:



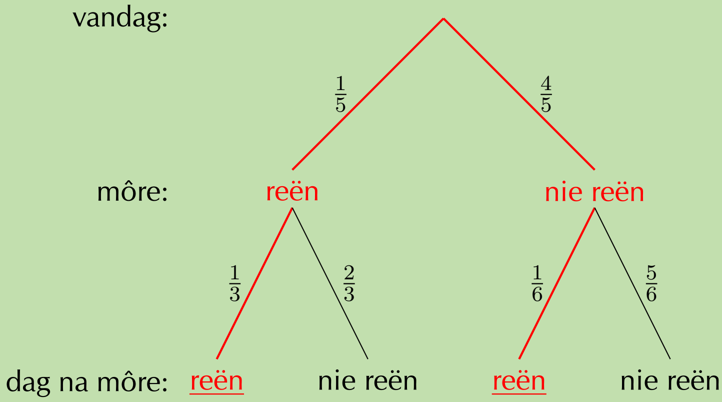
Stap 2: Teken die tweede vlak van die boomdiagram

Daar word ook gesê dat as dit **wel** reën op dag een, is daar 'n $\frac{1}{3}$ kans dat dit ook die volgende dag gaan reën. Aan die anderkant, as **dit nie** reën op daardie dag nie, is daar slegs 'n $\frac{1}{6}$ kans dat dit ook die volgende dag sal reën. Deur die inligting te gebruik gaan ons die boomdiagram voltooi:



Stap 3: Bereken die waarskynlikheid

Ons word gevra wat is die waarskynlikheid dat die dag na môre dit sal reën. Op die boomdiagram hierbo kan ons sien dat daar 2 gevalle is waar dit reën die dag na môre. Dit is in rooi gemerk hieronder.



Om die waarskynlikheid te kry vir die eerste geval (dat dit môre reën en die dag na môre) moet ons die waarskynlikhede vermenigvuldig langs die eerste rooi lyn af.

$$\begin{aligned}
&P(\text{reën môre en reën oormôre}) \\
=&\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} \\
=&\frac{1}{15}
\end{aligned}$$

Om die waarskynlikheid te kry vir die tweede geval (dat dit nie môre reën nie, maar wel die dag na môre reën) moet ons die waarskynlikhede vermenigvuldig langs die tweede rooi lyn af.

$$
\begin{aligned}
&P(\text{nie reën môre maar wel reën oormôre })\\
=&\frac{4}{5}\times\frac{1}{6}\\
=&\frac{2}{15}
\end{aligned}
$$

Dus is die totale waarskynlikheid dat dit sal reën die dag na môre, die som van die waarskynlikhede langs die twee rooi lyne, naamlik

$$\frac{1}{15}+\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$$

Uitgewerkte voorbeeld 11: Teken 'n boomdiagram

VRAAG

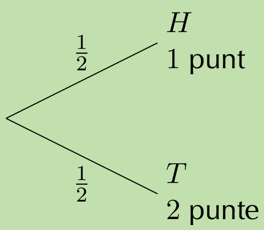
Jy speel die volgende speletjie: jy gooi 'n muntstuk. As die stert bo is, kry jy 2 punte en jou beurt eindig. As die kop bo is, kry jy slegs 1 punt, maar jy kan die muntstuk weer skiet as jy wil. As jy die muntstuk verskeie kere gooi tydens een beurt, moet jy die punte bymkaartel. Jy kan die muntstuk op die meeste 3 keer skiet in een beurt. Wat is die waarskynlikheid dat jy presies 3 punte kry tydens een beurt? Teken 'n boomdiagram om die verskillende moontlikhede te illustreer.

OPLOSSING

Stap 1: Skryf die gevalle en hul simbole neer

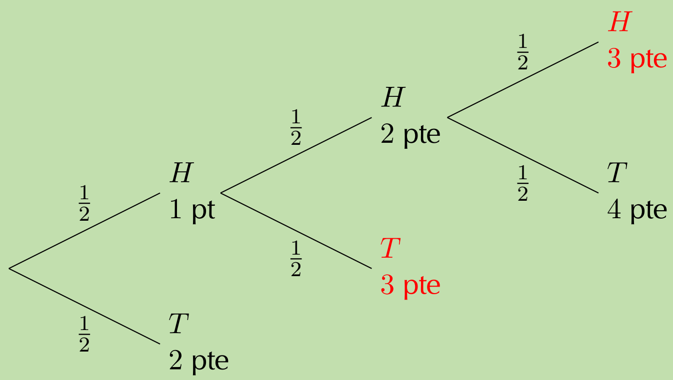
Elke gooi van die munstuk in die eksperiment het een van twee uitkomste, naamlik kop (H) en stert (T). Elke uitkoms het 'n waarskynlikheid van $\frac{1}{2}$. Daar word van ons gevra om die aantal punte te tel, so ons sal ook aandui hoeveel punte ons het vir elke uitkoms in die eksperiment.

Stap 2: Teken die eerste vlak van die boomdiagram



Die boomdiagram wys die moontlike uitkomste na 1 gooi van die muntstuk. Onthou ons kan tot en met 3 gooie hê, so die diagram is nog nie voltooi nie. As die muntstuk met die kop bo land, gooi ons dit weer. As die muntstuk met die stert bo land, dan stop ons.

Stap 3: Teken die derde en vierde vlakke van die boomdiagram



In die boomdiagram kan jy sien dat ons die punte wat ons kry na elke gooi bymekaartel. Na drie gooie is die speletjie verby.

Stap 4: Vind die toepaslike uitkomste en bereken die waarskynlikheid

Ons stel belang daarin om presies 3 punte te kry gedurende die spel. Om hierdie uitkomste te kry, kyk ons slegs na die eindpunte van die boomtakke. Ons eindig met presies 3 punte waneer die puntegooie as volg is:

- $(H; T)$ met waarskynlikheid $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$;
- $(H; H; H)$ met waarskynlikheid $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Let daarop dat ons die waarskynlikheid van 'n uitkoms bereken deur al die waarskynlikhede langs 'n tak van die boom, vanaf die beginpunt tot by die einduitkoms, te vermenigvuldig. Ons tel die twee waarskynlikhede bymekaar om die finale waarskynlikheid van presies 3 punte te kry as $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Teken 'n boomdiagram

VRAAG

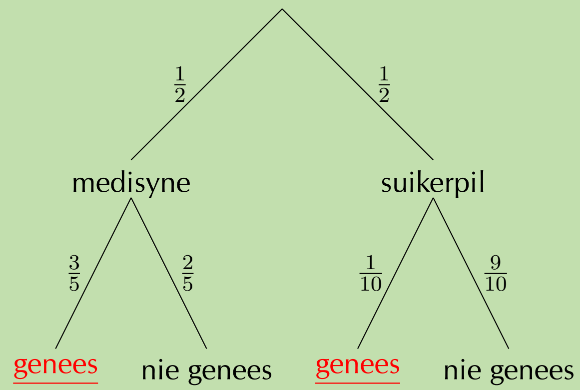
'n Persoon neem deel aan 'n mediese proef wat die effek van medisyne op 'n siekte toets. Helfte van die mense word die medisyne gegee en die ander helfte kry 'n suikerpil, wat geen effek op die siekte het nie. Die medisyne het 'n 60% kans om iemand te genees. Maar, mense wat nie die medisyne gekry het nie, het nog steeds 'n kans van 10% om genees te word. Daar is 50 mense deel van die proef en almal het die siekte. Talwar neem ook deel aan die proef, maar ons weet nie of hy die medisyne gebruik of die suikerpil nie. Teken 'n boomdiagram van al die moontlike gevalle. Wat is die waarskynlikheid dat Talwar genees word?

OPLOSSING

Stap 1: Som die inligting van die probeem op

Daar is twee gevalle in die probleem wat onseker is. Elke persoon ontvang medisyne (waarskynlikheid $\frac{1}{2}$) of 'n suikerpil (waarskynlikheid $\frac{1}{2}$). Elke persoon word ook genees (waarskynlikheid $\frac{3}{5}$ met medisyne en $\frac{1}{10}$ sonder medisyne) of sal siek bly (waarkskynlikheid $\frac{2}{5}$ met medisyne en $\frac{9}{10}$ sonder).

Stap 2: Teken die boomdiagram



In die eerste vlak van die boomdiagram wys ons Talwar kry óf die medisyne óf die suikerpil. In die tweede vlak van die boomdiagram wys ons of Talwar genees is of nie, afhangend van watter een van die pille hy ontvang het.

Stap 3: Bereken die verlangde waarskynlikheid

Ons vermenigvuldig die waarskynlikhede langs die takke van die boomdiagram wat lei tot die genesing van Talwar:

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$
$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

Ons tel dan die waarskynlikhede bymekaar om die finale antwoord te kry. Die waarskynlikheid dat Talwar genees word, is: $\frac{7}{20}$.

Oefening 10 – 5: Boomdiagramme

1. Jy rol die dobbelsteen twee keer en tel die kolletjies bymekaar om 'n telling te kry. Teken die boomdiagram om die eksperiment voor te stel. Wat is die waarskynlikheid dat jou telling 'n veelvoud is van 5?
2. Wat is die waarskynlikheid om ten minste een vyf te gooi in vier gooie van 'n gewone 6-kantige dobbelsteen? Wenk: moenie al die moontlike uitkomste van elke gooi van die dobbelsteen wys nie. Ons stel slegs belang of die uitkomste 5 is of nie-5-nie.
3. Jy gooi die muntstuk 4 keer.
   a) Wat is die waarskynlikheid om presies 3 keer kop te kry?
   b) Wat is die waarskynlikheid om ten minste 3 koppe te kry?

4. Jy gooi 4 verskillende muntstukke tegelykertyd.

   a) Wat is die waarskynlikheid om presies 3 keer kop te kry?

   b) Wat is die waarskynlikheid om ten minste 3 koppe te kry?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26MN 2. 26MP 3. 26MQ 4. 26MR

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.5 Gebeurlikheidstabelle EME5X

'n Gebeurlikheidstabel is nog 'n manier om rekord te hou van tellings of persentasies in 'n waarskynlikheidsprobleem. Gebeurliksheidstabelle is veral nuttig om te bepaal of 'n gebeurtenis afhanklik of onafhanklik is.

Ons gaan die tweerigting gebeurlikheidstabelle bestudeer, waar ons die aantal uitkomste vir 2 gevalle tel en hulle komplemente, wat 'n totaal van 4 gevalle aandui. 'n Tweerigting gebeurlikheidstabel wys altyd die telling vir die 4 moontlike kombinasies van gebeure, asook die totale vir elke geval en sy komplement. Ons kan die gebeurliksheidstabel gebruik om die waarskynlikhede te bereken van die verskeie gebeurtenisse deur die verhoudings tussen tellings te bereken, en om te bepaal of die gevalle afhanklik of onafhanklik is. Die onderstaande voorbeeld wys 'n tweerigting gebeurlikheidstabel, wat die uitkomste van 'n mediese studie verteenwoordig.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Gebeurlikheidstabelle

VRAAG

'n Mediese proef vir die effektiwiteit van nuwe medikasie is uitgevoer. 120 vrouens en 90 mans het deelgeneem aan die studie. Uit die mense het 50 vrouens en 30 mans positief gereageer op die medikasie. Hieronder word die gebeurlikheidstabel gegee met die inligting ingevul.

	Vroulik	**Manlik**	**Totale**
Positief	50	30	
Negatief			
Totale	120	90	

1. Wat is die waarskynlikheid dat die medisyne 'n positiewe resultaat gee vir vrouens?

2. Wat is die waarskynlikheid dat die medisyne 'n negatiewe resultaat gee vir mans?

3. Was die sukses van die medisyne afhanklik van geslag? Verduidelik.

OPLOSSING

Stap 1: Voltooi die gebeurlikheidstabel

Die beste plek om te begin is om die gebeurlikheidstabel te voltooi. Omdat elke kolom moet optel na sy totaal, kan ons uitwerk hoeveel vrouens en mans het negatief gereageer op die medikasie. Dan kan ons elke ry optel om die totale aan die regterkant van die tabel te kry.

	Vroulik	Manlik	Totale
Positief	50	30	80
Negatief	70	60	130
Totale	120	90	210

Stap 2: Bereken die verlangde waarskynlikhede

Die manier waarop die eerste vraag geformuleer is, moet ons laat bepaal wat is die waarskynlikheid dat 'n persoon positief reageer as sy vroulik is. Dit beteken dat ons nie die mans insluit in die berekening nie. So, die waarskynlikheid dat die medikasie 'n positiewe resultaat gee vir vrouens, is die verhouding tussen die aantal vrouens wat positief gereageer het en die totale aantal vrouens.

$$\begin{aligned} P(\text{positief as vroulik}) &= \frac{n(\text{positief en vroulik})}{n(\text{vroulik})} \\ &= \frac{50}{120} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Soortgelyk, die waarskynlikheid dat die medisyne 'n negatiewe resultaat vir mans sal gee is:

$$\begin{aligned} P(\text{negatief as manlik}) &= \frac{n(\text{negatief en manlik})}{n(\text{manlik})} \\ &= \frac{60}{90} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Stap 3: Onafhanklikheid

Ons moet bepaal of die effek van die medikasie en die geslag van die deelnemer afhanklik of onafhanklik is. Volgens die definisie is twee gebeurtenisse onafhanklik as en slegs as

$$P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$$

Ons gaan na die gevalle kyk waar deelnemers vroulik is en die deelnemer reageer positief op die proefstudie.

$$\begin{aligned} P(\text{vroulik}) &= \frac{n(\text{vroulik})}{n(\text{totale proewe})} \\ &= \frac{120}{210} \\ &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

$$P(\text{positief}) = \frac{n(\text{positief})}{n(\text{totale proewe})}$$
$$= \frac{80}{210}$$
$$= \frac{8}{21}$$

$$P(\text{vroulik en positief}) = \frac{n(\text{vroulik en positief})}{n(\text{totale proewe})}$$
$$= \frac{50}{210}$$
$$= \frac{5}{21}$$

Vanaf die waarskynlikhede kan ons sien dat

$$P(\text{vroulik en positief}) \neq P(\text{vroulik}) \times P(\text{positief})$$

en daarom is die geslag van die deelnemer en die uitkomste van die studie afhanklike gebeurtenisse.

Uitgewerkte voorbeeld 14: Gebeurlikheidstabelle

VRAAG

Gebruik die onderstaande gebeurlikheidstabel om die volgende vrae te beantwoord.

	Graad 11	Graad 12	Totale
Het selfoon	59	50	109
Geen selfoon	6	3	9
Totale	65	53	118

1. Wat is die waarskynlikheid dat 'n Graad 11 leerder 'n selfoon het?
2. Wat is die waarskynlikheid dat 'n leerder wat nie 'n selfoon het nie, in Graad 11 is?
3. Is die graad van 'n leerder en of hy 'n selfoon het onafhanklike gevalle? Verduidelik jou antwoord.

OPLOSSING

1. Daar is 65 leerders in Graad 11 en 59 van hulle het 'n selfoon. Dus die waarskynlikheid dat 'n Graad 11 leerder 'n selfoon het $\frac{59}{65}$.
2. Daar is 9 leerders wat nie 'n selfoon het nie en 6 van hulle is in Graad 11. Dus die waarskynlikheid dat 'n leerder wat nie 'n selfoon het nie, in Graad 11 is, is $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

3. Om te toets vir onafhanklikheid, sal ons moet kyk of 'n leerder in Graad 11 is en of die leerder 'n selfoon het. Die waarskynlikheid dat 'n leerder in Graad 11 is, is $\frac{65}{118}$. Die waarskynlikheid dat 'n leerder 'n selfoon het is $\frac{109}{118}$. Die waarskynlikheid dat 'n leerder in Graad 11 is en 'n selfoon het is $\frac{59}{118} = \frac{1}{2}$. Aangesien $\frac{1}{2} \neq \frac{65}{118} \times \frac{109}{118}$, beteken dit die graad van 'n leerder en of hy/sy 'n selfoon het is afhanklik gebeurtenisse.

Oefening 10 – 6: Gebeurlikheidstabelle

1. Gebruik die onderstaande gebeurlikheidstabel om die volgende vrae te beantwoord.

	Bruin oë	Nie bruin oë	Totale
Swart hare	50	30	80
Rooi hare	70	80	150
Totale	120	110	230

   a) Wat is die waarskynlikheid dat iemand met swart hare, bruin oë sal hê?
   b) Wat is die waarskynlikheid dat iemand swart hare het?
   c) Wat is die waarskynlikheid dat iemand bruin oë het?
   d) Is om swart hare en bruin oë te hê afhanklike of onafhanklike gebeurtenisse?

2. Gegee die volgende gebeurlikheidstabel, identifiseer die gebeurtenisse en bepaal of hulle afhanklik of onafhanklik is.

	Plek A	Plek B	Totale
Busse vertrek laat	15	40	55
Busse vertrek betyds	25	20	45
Totale	40	60	100

3. Jy word die volgende inligting gegee.
   - Gebeurtenisse A en B is onafhanklik.
   - $P(\text{nie } A) = 0{,}3$
   - $P(B) = 0{,}4$

   Voltooi die gebeurlikheidstabel hieronder.

	A	nie A	Totale
B			
nie B			
Totale			50

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26MS 2. 26MT 3. 26MV

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

10.6 Opsomming EME5Y

Sien aanbieding: 26MW op www.everythingmaths.co.za

- Terminologie:
  - **Uitkoms**: 'n enkele waarneming van 'n proefneming.
  - **Steekproefruimte** van 'n proefneming: die versameling van alle moontlike uitkomste van die proefneming.
  - **Gebeurtenis**: 'n versameling uitkomste van 'n proefneming.
  - **Waarskynlikheid** van 'n gebeurtenis: 'n reële getal tussen 0 en 1 wat beskryf hoe groot die kans is dat 'n gebeurtenis sal plaasvind.
  - **Relatiewe frekwensie** van 'n gebeurtenis: die aantal kere wat die gebeurtenis voorkom tydens proefnemings, gedeel deur die totale aantal proefnemings wat uitgevoer word.
  - **Vereniging** van gebeurtenisse: die versameling van alle uitkomste wat voorkom in ten minste een van die gebeurtenisse, geskryf as "A of B".
  - **Snyding** van gebeurtenisse: die versameling van alle uitkomste wat voorkom in al die gebeurtenisse, geskryf as "A en B".
  - **Onderling uitsluitende gebeurtenisse**: gebeurtenisse met geen gemeenskaplike uitkomste, dit is $(A \text{ en } B) = \emptyset$.
  - **Komplementêre gebeurtenisse**: twee wedersyds uitsluitende gebeurtenisse wat saam al die uitkomste in die steekproefruimte bevat. Ons skryf die komplement as "nie A".
  - **Onafhanklike gebeurtenisse**: twee gebeurtenisse, waar die uitkoms van die een nie die waarskynlikheid van die ander een beïnvloed nie. Gebeurtenisse is onafhanklik as en slegs as $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$.
- Identiteite:
  - Die **somreël**: $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$
  - Die **somreël vir 2 wedersyds uitsluitende gebeurtenisse**: $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$
  - Die **komplementreël** : $P(\text{nie } A) = 1 - P(A)$
- 'n **Venndiagram** is 'n visuele hulpmiddel om te wys hoe twee gebeurtenisse oorvleuel. Elke area in 'n Venndiagram verteenwoordig 'n gebeurtenis en kan die uitkomste in die gebeurtenis bevat, of die aantal uitkomste in die gebeurtenis of die waarskynlikheid van die gebeurtenis.
- 'n **Boomdiagram** is 'n visuele instrument wat help met die berekening van die waarskynlikhede vir afhanklike gebeurtenisse. Die uitkomste van elke gebeurtenis word getoon saam met die waarskynlikheid van elke uitkoms. Vir elke gebeurtenis wat afhanklik is van die vorige gebeurtenis, gaan ons een vlak dieper in die boom. Om die waarskynlikheid van 'n sekere kombinasie van uitkomste te bereken,
  - vind al die vertakkings wat die betrokke uitkoms bevat;
  - vermenigvuldig die waarskynlikhede langs elke vertakking;
  - tel die waarskynlikhede tussen die verskillende vertakkings op.

- ’n **Tweerigting gebeurlikheidstabel** is ’n hulpmiddel vir die organisering van data, veral wanneer ons wil bepaal of gebeurtenisse, elk met slegs met twee uitkomste, afhanklik of onafhanklik is van mekaar. Die tellings vir elke moontlike kombinasie van uitkomste word ingevul op die tabel, besame met die totale vir elke ry of kolom.

Oefening 10 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Jane het belê op die aandelemark. Die waarskynlikheid dat sy nie al haar geld sal verloor nie is $0{,}32$. Wat is die waarskynlikheid dat sy al haar geld sal verloor? Verduidelik.
2. As D en F wedersyds uitsluitende gebeurtenisse is, met $P(D') = 0{,}3$ en $P(D \text{ of } F) = 0{,}94$, vind $P(F)$.
3. ’n Motorhandelaar het pienk, lemmetjiegroen en pers modelle van motor A en pers, oranje en veelkleurige modelle van motor B. Een donker nag steel ’n dief ’n motor.
   a) Wat is die steekproef en die steekproefruimte?
   b) Wat is die waarskynlikheid dat ’n model van A of ’n model van B gesteel is?
   c) Wat is die waarskynlikheid dat beide ’n model van A en ’n model van B gesteel word?
4. Die waarskynlikheid van gebeurtenis X is $0{,}43$ en die waarskynlikheid van gebeurtenis Y is $0{,}24$. Die waarskynlikheid dat beide gelyktydig gebeur, is $0{,}10$. Wat is die waarskynlikheid dat X of Y sal gebeur?
5. $P(H) = 0{,}62$; $P(J) = 0{,}39$ en $P(H \text{ en } J) = 0{,}31$. Bereken:
   a) $P(H')$
   b) $P(H \text{ of } J)$
   c) $P(H' \text{ of } J')$
   d) $P(H' \text{ of } J)$
   e) $P((\text{nie } H) \text{ en } (\text{nie } J))$
6. Die laaste tien letters van die alfabet word in ’n hoed gesit en mense word gevra om een van hulle te trek. Gebeurtenis D is om ’n klinker te kies, gebeurtenis E ’n medeklinker en gebeurtenis F om een van die laaste vier letters te trek. Trek ’n Venndiagram om die die uitkomste in die steekproefruimte en die verskillende gebeurtenisse te toon. Bereken dan die volgende waarskynlikhede:
   a) $P(\text{nie } F)$
   b) $P(F \text{ of } D)$
   c) $P(\text{nie } E \text{ of } F)$ nie
   d) $P(D \text{ en } E)$
   e) $P(E \text{ en } F)$
   f) $P(E \text{ en nie } D)$

7. Thobeka vergelyk drie woonbuurte (ons noem hulle A, B en C) om te sien waar die beste plek is om te woon. Sy ondervra 80 mense en vra hulle of hulle van elk van die woonbuurte hou of nie.

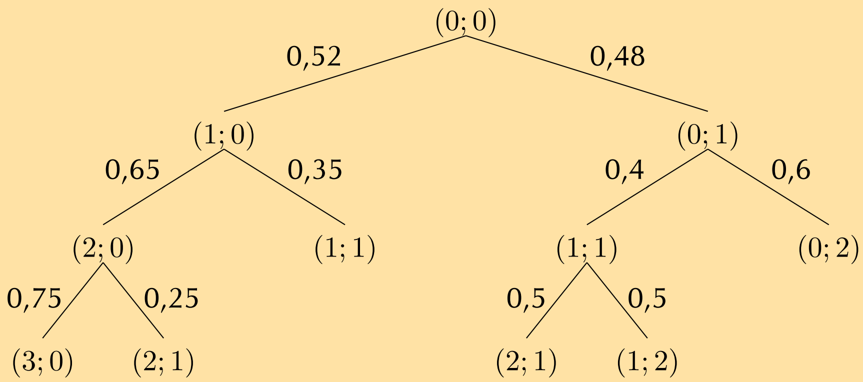
   - 40 mense hou van woonbuurt A.
   - 35 mense hou van woonbuurt B.
   - 40 mense hou van woonbuurt C.
   - 21 mense hou van beide woonbuurte A en C.
   - 18 mense hou van beide woonbuurte B en C.
   - 68 mense hou van ten minste een woonbuurt.
   - 7 mense hou van al drie woonbuurte.

   a) Gebruik die inligting om 'n Venndiagram te trek.
   b) Hoeveel mense hou van geeneen van die woonbuurte nie?
   c) Hoeveel mense hou van woonbuurte A en B, maar nie van C nie?
   d) Wat is die waarskynlikheid dat 'n willekeurig gekose persoon van die proefneming van ten minste een van die woonbuurte sal hou?

8. Laat G en H twee gebeurtenisse wees in 'n steekproefruimte. Veronderstel dat $P(G) = 0{,}4$; $P(H) = h$; en $P(G \text{ of } H) = 0{,}7$.

   a) Vir watter waarde van h is G en H wedersyds uitsluitend?
   b) Vir watter waarde van h is G en H onafhanklik?

9. Die volgende boomdiagram verteenwoordig punte aangeteken deur twee spanne in 'n sokkerwedstryd. By elke vlak in die boom word die punte getoon (punte vir Span 1; punte vir Span 2).



   Gebruik die diagram om die waarskynlikheid te bepaal dat:

   a) Span 1 sal wen
   b) Die wedstryd gelykop sal wees
   c) Die wedstryd sal eindig met 'n ewe getal totale punte

10. 'n Sak bevat 10 oranje balle en 7 blou balle. Jy trek 3 balle uit die sak **sonder terugplasing**. Wat is die waarskynlikheid dat jy sal eindig met presies 2 oranje balle? Stel hierdie proefneming voor met 'n boomdiagram.

11. Voltooi die volgende gebeurlikheidstabel en bepaal of die gebeurtenisse afhanklik of onafhanklik is.

	Durban	Bloemfontein	Totale
Bly lekker daar	130	30	
Bly nie lekker daar nie	140		340
Totale		230	500

12. Som die volgende inligting oor 'n mediese proefneming met 2 tipes multivitamine op in 'n gebeurlikheidstabel en bepaal of die gebeurtenisse afhanklik of onafhanklik is.

   - 960 mense het deelgeneem aan die mediese proefneming.
   - 540 mense het multivitamine A gebruik vir 'n maand en 400 van daardie mense het 'n verbetering in hulle gesondheid getoon.
   - 300 mense het 'n verbetering in gesondheid getoon tow hulle multivitamine B gebruik het vir 'n maand.

   As die gebeurtenisse onafhanklik is, beteken dit dat die twee multivitamines dieselfde uitwerking het op mense. As die gebeurtenisse afhanklik is, beteken dit dat een multivatimine beter is as die ander een. Watter multivitamine is die beste, of is hulle beide ewe effektief?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26MX	2. 26MY	3. 26MZ	4. 26N2	5. 26N3	6. 26N4
7. 26N5	8. 26N6	9. 26N7	10. 26N8	11. 26N9	12. 26NB

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

HOOFSTUK 11

Statistiek

11.1 Hersiening EME5Z

Maatstawe van sentrale neiging EME62

Die gemiddelde en die mediaan van die data, gee albei 'n aanduiding van die middelpunt van die data verspreiding. Die **gemiddelde**, of die rekenkundige gemiddelde, word bereken met

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

waar x_i die datapunt is en n die hoeveelheid datapunte. Ons lees $\overline{x}$ as "x streep".

Die **mediaan** is die middelste getal van die geordende datastel. Om die mediaan te bepaal, moet ons eers die data sorteer en dan die middelste getal van hierdie gesorteerde lys kies. In die geval waar die middelpunt van die datastel tussen twee getalle lê, is die mediaan die gemiddelde van daardie twee getalle.

Sien video: 26NC op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Bereken die maatstawe van sentrale neiging

VRAAG

Bereken die gemiddelde en die mediaan van die van die volgende datastel:

$$72{,}5 \ ; \ 92{,}6 \ ; \ 15{,}6 \ ; \ 53{,}0 \ ; \ 86{,}4 \ ; \ 89{,}9 \ ; \ 90{,}9 \ ; \ 21{,}7 \ ; \ 46{,}0 \ ; \ 4{,}1 \ ; \ 51{,}7 \ ; \ 2{,}2$$

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die gemiddelde

Deur die formule vir die gemiddelde te gebruik, bereken ons eers die som van die getalle en dan deel ons dit deur die aantal getalle.

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{626{,}6}{12} \\ &\approx 52{,}22 \end{aligned}$$

Stap 2: Bereken die mediaan

Om die mediaan te vind, sorteer ons eers die data:

$$2{,}2 \ ; \ 4{,}1 \ ; \ 15{,}6 \ ; \ 21{,}7 \ ; \ 46{,}0 \ ; \ 51{,}7 \ ; \ 53{,}0 \ ; \ 72{,}5 \ ; \ 86{,}4 \ ; \ 89{,}9 \ ; \ 90{,}9 \ ; \ 92{,}6$$

Omdat daar 'n ewe aantal getalle is, lê die mediaan in die middel van twee getalle. In hierdie geval, is die twee getalle in die middel van $51{,}7$ en $53{,}0$. Dus is die mediaan $52{,}35$.

Maatstawe van verspreiding sê vir ons hoe verspreid die data is. Wanneer die maatstaaf van verspreiding klein is, is die data gegroepeer in ’n klein gebied. Wanneer die maatstaaf van verspreiding groot is, is die data versprei oor ’n groot area.

Die **variasiewydte** (of reikwydte of omvang) is die verskil tussen die maksimum- en minimumwaardes van die datastel.

Die **inter-kwartielwydte** is die verskil tusssen die eerste en derde kwartiele van die datastel. Die kwartiele word op dieselfde wyse as die mediaan bereken. Die mediaan is halfpad in die geordende datastel en word soms die tweede kwartiel genoem. Die eerste kwartiel is een kwart binne die geordende datastel; die derde kwartiel is driekwart binne die die geordende datastel.

Sien video: 26ND op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 2: Variasiewydte en inter-kwartielwydte

VRAAG

Bepaal die reikwydte en die inter-kwartielwydte van die volgende datastel.

$$14\ ;\ 17\ ;\ 45\ ;\ 20\ ;\ 19\ ;\ 36\ ;\ 7\ ;\ 30\ ;\ 8$$

OPLOSSING

Stap 1: Orden die getalle in die datastel

Om die variasiewydte te bepaal moet ons die maksimum en minimum getalle in die datastel vind. Om die inter-kwartielwydte te bepaal, moet ons die eerste en derde kwartiele kry. Vir albei die vereistes, is dit makliker om eers die data te orden.

Die geordende datastel is

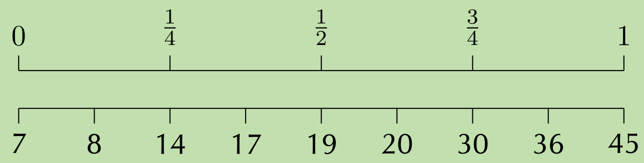
$$7\ ;\ 8\ ;\ 14\ ;\ 17\ ;\ 19\ ;\ 20\ ;\ 30\ ;\ 36\ ;\ 45$$

Stap 2: Vind die minimum, maksimum en die variasiewydte

Die minimum getal is die eerste getal van die geordende datastel, naamlik 7. Die maksimum is die laaste getal in die geordende datastel, naamlik 45. Die reikwydte is die verskil tussen die maksimum en die minimum: $45 - 7 = 38$.

Stap 3: Vind die kwartiele en die inter-kwartielwydte

Die diagram wys ons hoe om kwartiele te vind ’n kwart, ’n helfte en ’n driekwart van die gebied binne die geordende lys.



Van hierdie diagram kan ons sien die eerste kwartiel is by 14, die tweede kwartiel (mediaan) is by waarde 19 en die derde kwartiel is by waarde 30.

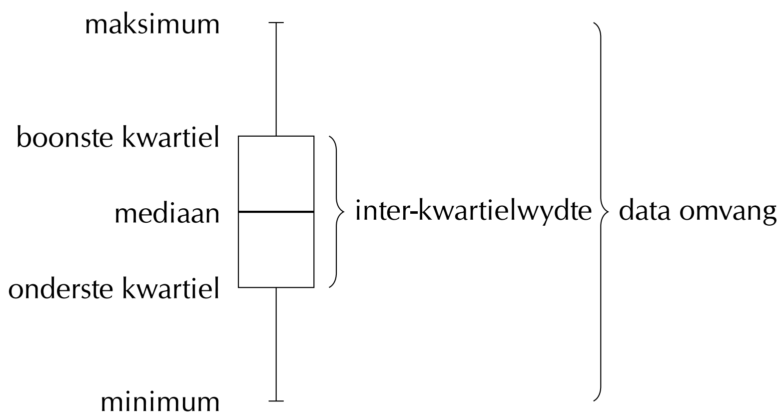
Die inter-kwartielwydte is die verskil tussen die eerste en derde kwartiele. Die eerste kwartiel is 14 en die derde kwartiel is 30. Dus is die inter-kwartielwydte $30-14 = 16$.

Vyf getal opsomming EME64

Die **vyf getal opsomming** kombineer die maatstaaf van sentrale neiging, naamlik die mediaan, met die maatstawe van dispersie, naamlik die reikwydte en die inter-kwartielwydte. Dit gee 'n goeie oorsig van die algehele vesrpreiding van die data. Meer presies, die vyf-getal opsomming word in die volgende volgorde geskryf:

- minimum
- eerste kwartiel
- mediaan
- derde kwartiel
- maksimum

Die vyf getal opsomming word gewoonlik visueel voorgestel deur gebruik te maak van 'n **mond-en-snor diagram** (of houerstipping). 'n Mond-en-snor diagram word getoon hieronder, met die posisies van die vyf relevante getalle aangedui. Let daarop dat die diagram vertikaal geteken is, maar dat dit ook horisontaal geteken kan word.



Sien video: 26NF op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 3: Vyf getal opsomming

VRAAG

Teken die mond-en-snor diagram vir die volgende datastel:

$$1{,}25\ ;\ 1{,}5\ ;\ 2{,}5\ ;\ 2{,}5\ ;\ 3{,}1\ ;\ 3{,}2\ ;\ 4{,}1\ ;\ 4{,}25\ ;\ 4{,}75\ ;\ 4{,}8\ ;\ 4{,}95\ ;\ 5{,}1$$

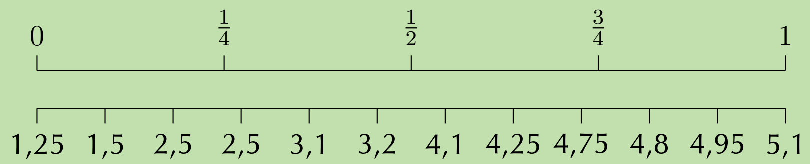
OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die minimum en maksimum

Aangesien die datastel alreeds georder is, lees ons die minimum waarde af as die eerste waarde ($1{,}25$) en die maksimum as die laaste waarde ($5{,}1$).

Stap 2: Bepaal die kwartiele

Daar is 12 getalle in die datastel.



Deur gebruik te maak van bostaande figuur, kan ons sien dat die mediaan tussen die sesde en sewende waardes lê, wat dit dan die volgende maak.

$$\frac{3{,}2 + 4{,}1}{2} = 3{,}65$$

Die eerste kwartiel lê tussen die derde en vierde getalle, wat dit dan die volgende maak

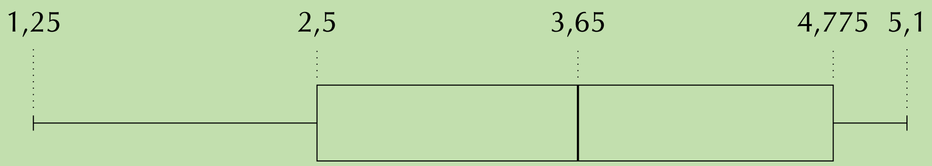
$$Q_1 = \frac{2{,}5 + 2{,}5}{2} = 2{,}5$$

Die derde kwartiel lê tussen die neënde en tiende getalle, wat dit dan die volgende maak

$$Q_3 = \frac{4{,}75 + 4{,}8}{2} = 4{,}775$$

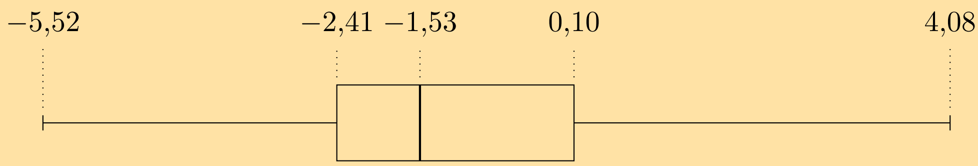
Stap 3: Teken die mond-en-snor diagram

Ons het nou die vyf getal opsomming as ($1{,}25$; $2{,}5$; $3{,}65$; $4{,}775$; $5{,}1$). Die mond-en-snor diagram verteenwoordig die vyf getal opsomming hieronder getoon.



Oefening 11 – 1: Hersiening

1. Vir elk van die volgende datastelle, bereken die gemiddelde en al die kwartiele. Rond jou antwoorde af tot een desimale plek.
   a) $-3{,}4\ ;\ -3{,}1\ ;\ -6{,}1\ ;\ -1{,}5\ ;\ -7{,}8\ ;\ -3{,}4\ ;\ -2{,}7\ ;\ -6{,}2$
   b) $-6\ ;\ -99\ ;\ 90\ ;\ 81\ ;\ 13\ ;\ -85\ ;\ -60\ ;\ 65\ ;\ -49$
   c) $7\ ;\ 45\ ;\ 11\ ;\ 3\ ;\ 9\ ;\ 35\ ;\ 31\ ;\ 7\ ;\ 16\ ;\ 40\ ;\ 12\ ;\ 6$
2. Gebruik die onderstaande mond-en-snor diagram om die reikwydte en die interkwartielwydte van die datastel te bepaal.



3. Teken die mond-en-snor diagram van die volgende data.

$$0{,}2\ ;\ -0{,}2\ ;\ -2{,}7\ ;\ 2{,}9\ ;\ -0{,}2\ ;\ -4{,}2\ ;\ -1{,}8\ ;\ 0{,}4\ ;\ -1{,}7\ ;\ -2{,}5\ ;\ 2{,}7\ ;\ 0{,}8\ ;\ -0{,}5$$

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26NG 1b. 26NH 1c. 26NJ 2. 26NK 3. 26NM

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

11.2 Histogramme EME65

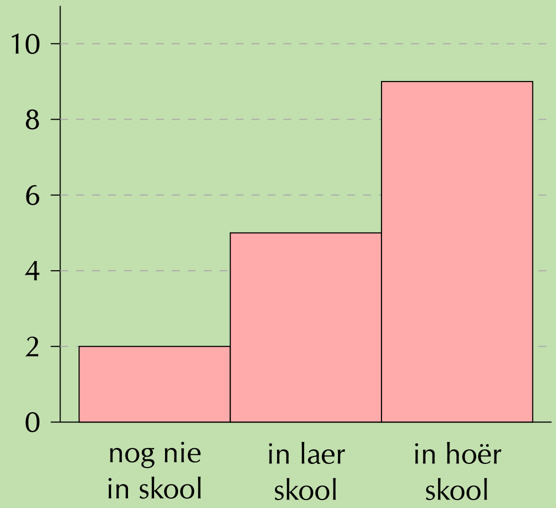
'n Histogram is 'n grafiese voorstelling van hoeveel verskillende, onderling uitsluitende gebeurtenisse waargeneem word in 'n eksperiment. Om 'n histogram te interpreteer, vind ons die saamgegroepeerde gebeurtenisse op die x-as en die hoeveelheid op die y-as. By elke gebeurtenis is 'n reghoek wat die hoeveelheid (frekwensie) aandui.

Sien video: 26NN op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 4: Die lees van histogramme

VRAAG

Gebruik onderstaande histogram om die gebeurtenisse en die relatiewe frekwensie te bepaal. Som jou antwoord in tabelvorm op.



OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die gebeurtenisse

Die gebeurtenisse getoon op die x-as.

Stap 2: Lees die aantal van elke gebeurtenis

Die aantal word getoon op die y-as en die hoogte van elke reghoek toon die frekwensie van elke gebeurtenis aan.

- nog nie in die skool nie: 2
- in laerskool: 5
- in hoërskool: 9

Stap 3: Bereken die relatiewe frekwensie

Die relatiewe frekwensie van 'n gebeurtenis tydens 'n eksperiment is die aantal kere wat die gebeurtenis plaasgevind het, met betrekking tot die aantal kere wat die eksperiment uitgevoer was. In hierdie voorbeeld tel ons al die frekwensies van al die gebeurtenisse bymekaar om 'n totale aantal gebeurtenisse van 16 te verkry. Daarom is die relatiewe frekwensies:

- nog nie in die skool nie: $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$
- in die laerskool: $\frac{5}{16}$
- in die hoërskool: $\frac{9}{16}$

Stap 4: Maak opsomming

Gebeurtenis	Frekwensie	Relatiewe frekwensie
nog nie in die skool nie	2	$\frac{1}{8}$
in die laerskool	5	$\frac{5}{16}$
in die hoërskool	9	$\frac{9}{16}$

Om die histogram te trek van 'n datastel met getalle, moet die getalle eers gegroepeer word. Elke groep word gedefiniëer deur 'n interval. Ons kan tel hoeveel keer getalle van elke groep in die datastel voorkom en 'n histogram trek deur hierdie tellings te gebruik.

Uitgewerkte voorbeeld 5: Trek 'n histogram

VRAAG

Die volgende data verteenwoordig die lengtes van 16 volwassenes in sentimeters.

$$162\ ;\ 168\ ;\ 177\ ;\ 147\ ;\ 189\ ;\ 171\ ;\ 173\ ;\ 168$$
$$178\ ;\ 184\ ;\ 165\ ;\ 173\ ;\ 179\ ;\ 166\ ;\ 168\ ;\ 165$$

Verdeel die data in 5 gelyke intervalle tussen 140 cm en 190 cm en teken 'n histogram.

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die intervalle

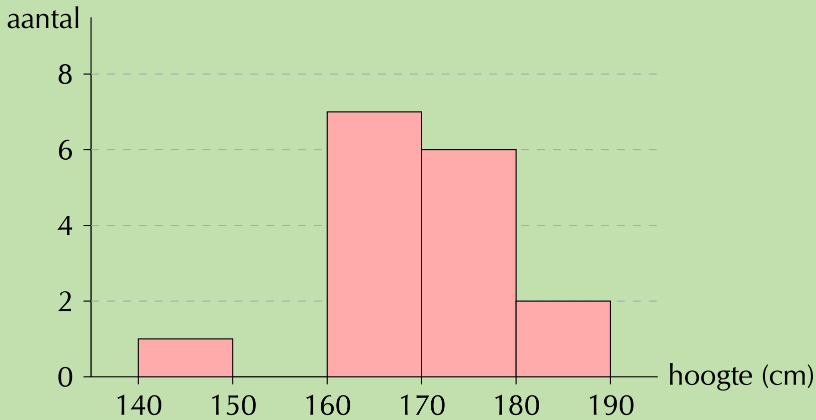
Om 5 intervalle van dieselfde lengte te hê tussen 140 en 190, het ons intervalle van 10 nodig. Die intervalle is dus $(140; 150]$; $(150; 160]$; $(160; 170]$; $(170; 180]$; en $(180; 190]$.

Stap 2: Tel die data

Die volgende tabel som die getelde data op vir elk van die intervalle.

Interval	$(140; 150]$	$(150; 160]$	$(160; 170]$	$(170; 180]$	$(180; 190]$
Aantal	1	0	7	6	2

Stap 3: Trek die histogram



'n Frekwensieveelhoek (of frekwensiepoligon) word soms gebruik om dieselfde inligting te vertoon as 'n histogram. 'n Frekwensieveelhoek word getrek deur lynsegmente vanaf die middel van die bopunt van elke staaf in die histogram te verbind met die middelpunt van die bopunt van die volgende staaf. Dit beteken dat die frekwensieveelhoek die koördinate van die middelpunt van elke interval en die aantal gebeurtenisse per interval met mekaar verbind.

Uitgewerkte voorbeeld 6: Trek die frekwensieveelhoek

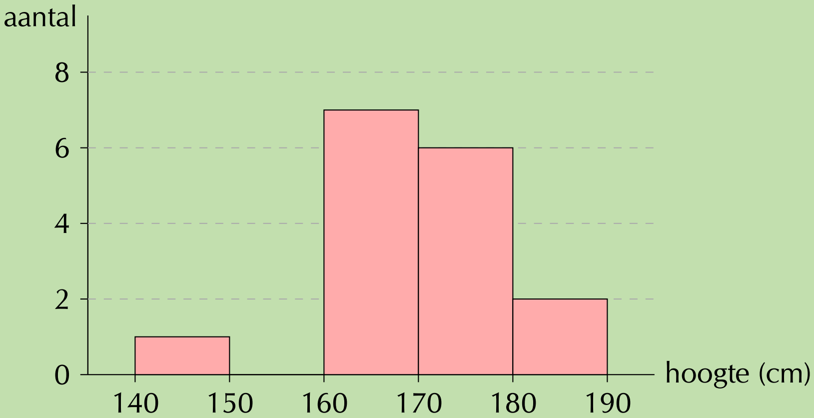
VRAAG

Gebruik die histogram van die vorige voorbeeld om die frekwensieveelhoek van dieselfde data te trek.

OPLOSSING

Stap 1: Trek die histogram

Ons weet reeds dat die histogram só lyk:

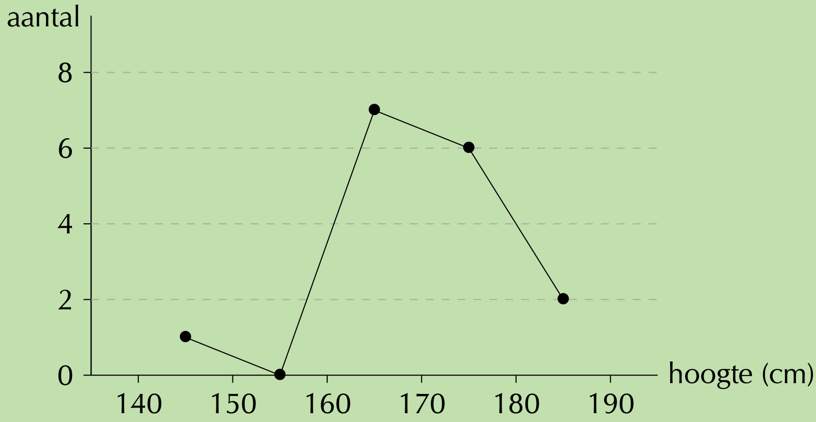


Stap 2: Verbind die bopunte van die reghoeke

Wanneer ons die lynsegmente tussen die bopunte van die reghoeke in die histogram trek, kry ons die volgende prentjie:

Stap 3: Trek die finale frekwensieveelhoek

Verwyder nou die histogram om die finale frekwensieveelhoek te toon.



Frekwensieveelhoeke is veral nuttig om twee stelle data te vergelyk. Wanneer twee histogramme vergelyk word, is dit moeilik omdat ons dan die twee reghoeke van die twee stelle data bo-oor mekaar mekaar moet teken. Omdat frekwensieveelhoeke slegs lyne is, veroorsaak hulle nie dieselfde probleem nie.

Uitgewerkte voorbeeld 7: Trek frekwensieveelhoeke

VRAAG

Hier is nog 'n stel data van lengtes, hierdie keer van Graad 11 leerders.

$$132\ ;\ 132\ ;\ 156\ ;\ 147\ ;\ 162\ ;\ 168\ ;\ 152\ ;\ 174$$
$$141\ ;\ 136\ ;\ 161\ ;\ 148\ ;\ 140\ ;\ 174\ ;\ 174\ ;\ 162$$

Trek die frekwensieveelhoek van hierdie datastel deur dieselfde intervallengtes te gebruik as in die vorige voorbeeld. Vergelyk dan die twee frekwensieveelhoeke op een grafiek om die verskil tussen die verspreidings te sien.

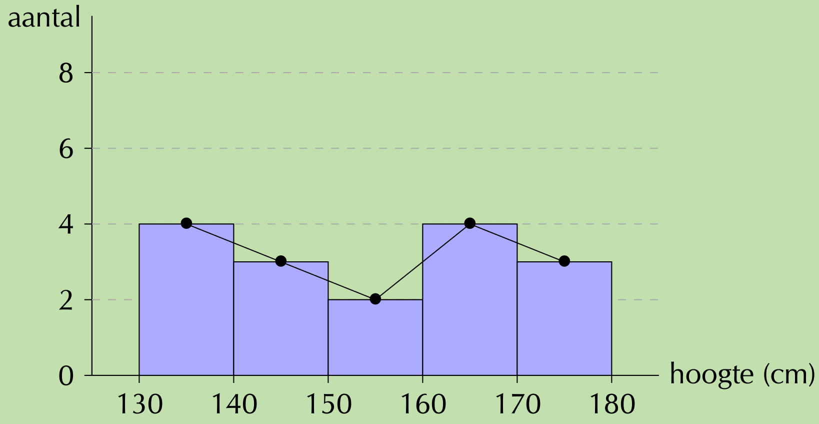
OPLOSSING

Stap 1: Frekwensietabel

Ons skep eers die getalletabel vir die nuwe stel data.

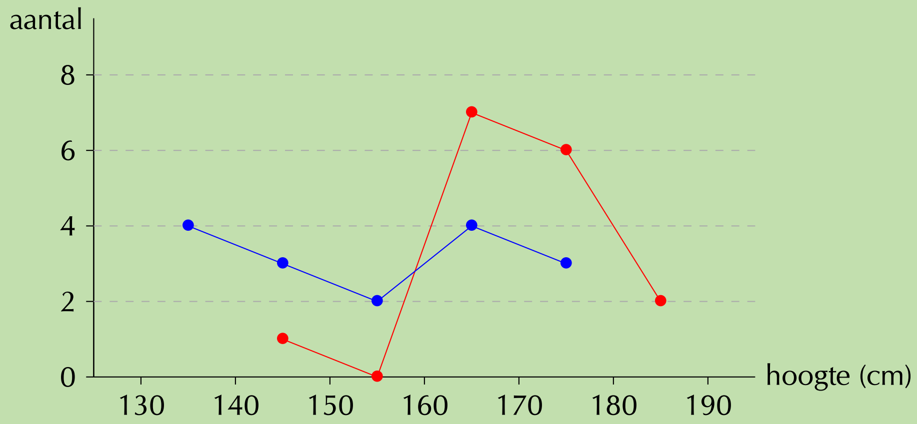
Interval	$(130; 140]$	$(140; 150]$	$(150; 160]$	$(160; 170]$	$(170; 180]$
Aantal	4	3	2	4	3

Stap 2: Trek histogram en frekwensieveelhoek



Stap 3: Vergelyk frekwensieveelhoeke

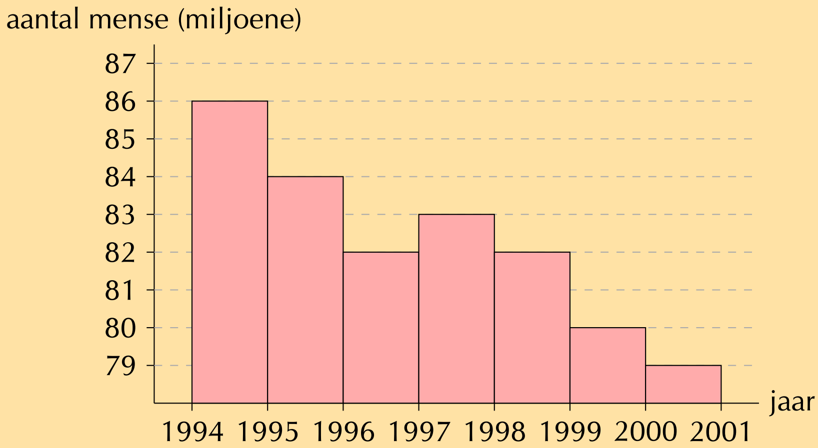
Ons trek die twee frekwensieveelhoeke op dieselfde assestelsel. Die rooi lyn toon die verspreiding van lengtes vir volwassenes en die blou lyn vir Graad 11 leerders.



Van hierdie grafiek af kan ons maklik sien dat die lengtes van Graad 11 leerders meer na links (korter) versprei is as die lengtes van volwassenes. Die leerders se lengtes is ook meer eweredig versprei tussen 130 en 180 cm, terwyl die volwassenes se lengtes hoofsaaklik tussen 160 en 180 cm lê.

Oefening 11 – 2: Histogramme

1. Gebruik onderstaande histogram om die volgende vrae te antwoord. Die histogram toon die aantal mense wat elke jaar wêreldwyd gebore word. Die punte op die x-as toon die begin van elke jaar.



   a) Hoeveel mense is gebore tussen die begin van 1994 en die begin van 1996?
   b) Neem die aantal mense in die wêreld toe of neem dit af?
   c) Hoeveel meer mense is in 1994 gebore as in 1997?

2. In 'n verkeersopname is 'n ewekansige steekproef van 50 motoriste gevra watter afstand (d) hulle elke dag na hulle werk toe ry. Die resultate van die opname word in die tabel hieronder getoon. Trek 'n histogram om die data te verteenwoordig.

d	$0 < d \leq 10$	$10 < d \leq 20$	$20 < d \leq 30$	$30 < d \leq 40$	$40 < d \leq 50$
f	9	19	15	5	4

3. Hieronder is die data vir die voorkoms van MIV in Suid-Afrika. MIV-voorkoms verwys na die persentasie mense tussen die ouderdomme van 15 en 49 wat MIV-positief is.

jaar	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
voorkoms (%)	17,7	18,0	18,1	18,1	18,1	18,0	17,9	17,9

   Trek 'n frekwensieveelhoek van hierdie datastel.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26NP 2. 26NQ 3. 26NR

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

11.3 Ogiewe

EME67

Kumulatiewe histogramme, ook bekend as ogiewe, is grafieke wat gebruik kan word om te bepaal hoeveel datawaardes onder of bo 'n spesifieke waarde in die datastel val. Die kumulatiewe frekwensie word bereken van die frekwensietabel af deur elke frekwensiewaarde by die totaal van die voorafgaande frekwensiewaardes in die datastel te tel. Die laaste waarde van die kumulatiewe frekwensie sal altyd gelyk wees aan die totaal van al die waardes, omdat al die waardes reeds bymekaargetel was in die vorige totale.

'n Ogief word geteken deur:

- die begin van die eerste interval te stip op 'n y-waarde van nul;
- die einde van elke interval te stip op die y-waarde gelyk aan die kumulatiewe totaal vir daardie interval; en
- die punte op die grafiek te verbind met reguit lyne.

Op hierdie manier sal die eindwaarde van die finale interval altyd die totaal van al die datawaardes wees aangesien ons alles opgetel het oor al die intervalle.

Uitgewerkte voorbeeld 8: Kumulatiewe frekwensies en ogiewe

VRAAG

Bepaal die kumulatiewe frekwensies van die volgende gegroepeerde datastel en voltooi onderstaande tabel. Gebruik die tabel om 'n ogief van die data te trek.

Interval	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie
$10 < n \leq 20$	5	
$20 < n \leq 30$	7	
$30 < n \leq 40$	12	
$40 < n \leq 50$	10	
$50 < n \leq 60$	6	

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die kumulatiewe frekwensie

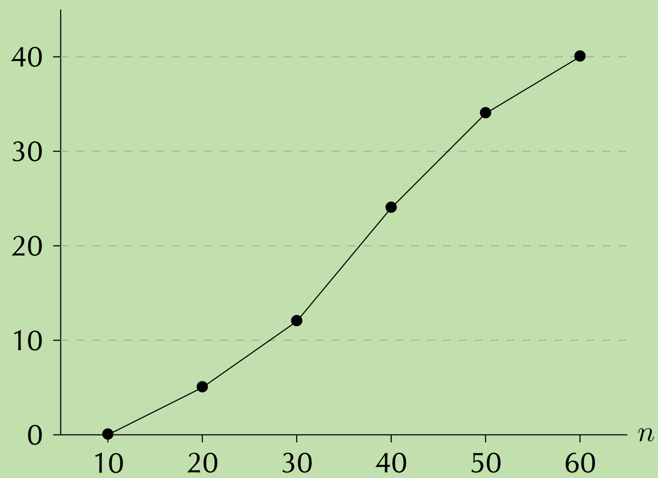
Om die kumulatiewe frekwensie te bepaal, tel ons al die frekwensies bymekaar soos ons in die tabel afgaan. Die eerste kumulatiewe frekwensie is dieselfde as die betrokke frekwensie, want ons tel dit by nul. Die finale kumulatiewe frekwensie is altyd gelyk aan die som van al die frekwensies. Dit lewer die volgende tabel:

Interval	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie
$10 < n \leq 20$	5	5
$20 < n \leq 30$	7	12
$30 < n \leq 40$	12	24
$40 < n \leq 50$	10	34
$50 < n \leq 60$	6	40

Stap 2: Stip die ogief

Die eerste koördinaat in die stipping begin altyd by 'n y-waarde van 0 omdat ons altyd begin by nul. Dus, die eerste koördinaat is by $(10; 0)$ - die begin van die eerste interval. Die tweede koördinaat is aan die einde van die eerste interval (wat ook die begin is van die tweede interval) en by die eerste kumulatiewe antwoord, dus by $(20; 5)$. Die derde koördinaat is aan die einde van die tweede interval en by die tweede kumulatiewe antwoord, naamlik by $(30; 12)$, ensovoorts.

Die berekening van al die koördinate en verbinding met reguitlyne gee die volgende ogief.



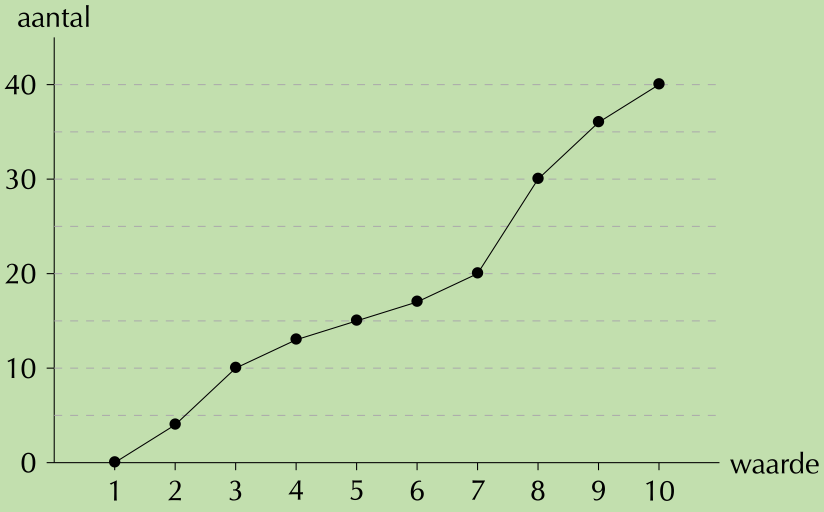
Ogiewe lyk soos frekwensiepoligone, wat ons vroeër getrek het. Die belangrikste verskil tussen hulle is dat 'n ogief **kumulatiewe** waardes aandui, terwyl 'n frekwensiepoligoon 'n stipping is van die datawaardes self. So, om 'n frekwensiepoligoon na 'n ogief te gaan, tel ons die tellings bymekaar soos ons van links na regs in die grafiek deurbeweeg.

Ogiewe is waardevol vir die bepaling van die mediaan, persentiele en vyf-getal opsomming van die data. 'n Kwartiel is eenvoudig kwartpad vanaf die begin van 'n geordende datastel. Met 'n ogief weet ons reeds hoeveel datawaardes bo of onder 'n sekere punt is, dus is dit maklik om die middel of kwart van die datastel te vind.

Uitgewerkte voorbeeld 9: Ogiewe en die vyf-getal opsomming

VRAAG

Gebruik die volgende ogief om die vyf-getal opsomming van die data te bereken. Onthou dat die vyf-getal opsomming betaan uit die minimum, al die kwartiele (insluitend die mediaan) en die maksimum.



OPLOSSING

Stap 1: Vind die minimum en die maksimum

Die minimumwaarde in die datastel is 1 omdat dit is waar die ogief begin op die horisontale as. Die maksimumwaarde in die datastel is 10 omdat dit is waar die ogief eindig op die horisontale as.

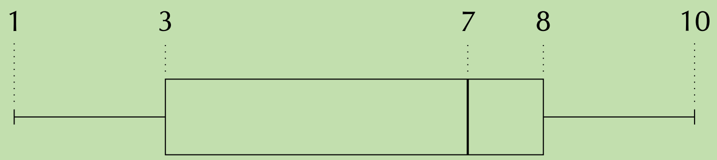
Stap 2: Vind die kwartiele

Die kwartiele is die waardes wat $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{3}{4}$ van die pad in die geordende datastel is. Hier gaan die tellings op na 40, so ons kan die kwartiele vind deur te kyk na die ooreenstemmende tellings van 10, 20 en 30. Op die ogief sien ons 'n telling van

- 10 stem ooreen met die waarde van 3 (eerste kwartiel);
- 20 stem ooreen met die waarde van 7 (tweede kwartiel);
- 30 stem ooreen met die waarde van 8 (derde kwartiel).

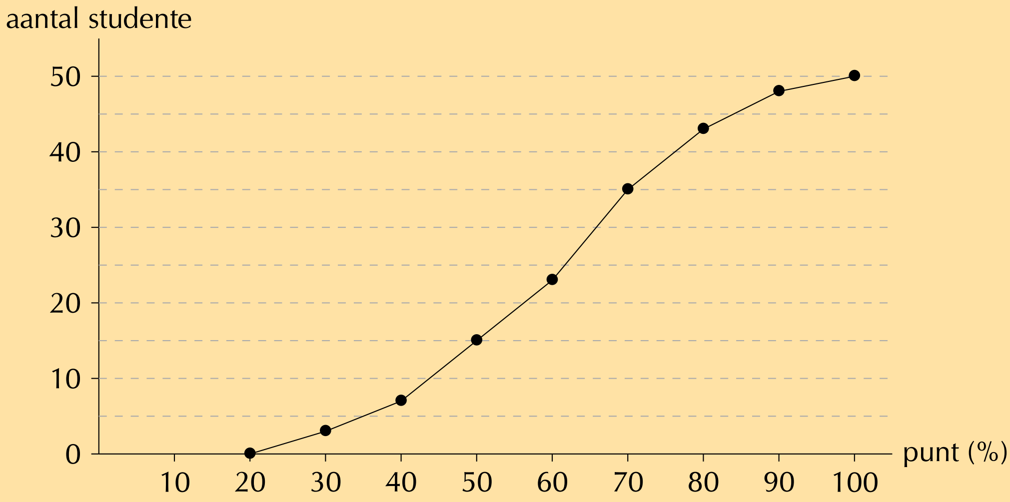
Stap 3: Skryf die vyf-getal opsomming neer

Die vyf-getal opsomming $(1; 3; 7; 8; 10)$. Die mond-en-snor diagram van die datastel is hieronder gegee.



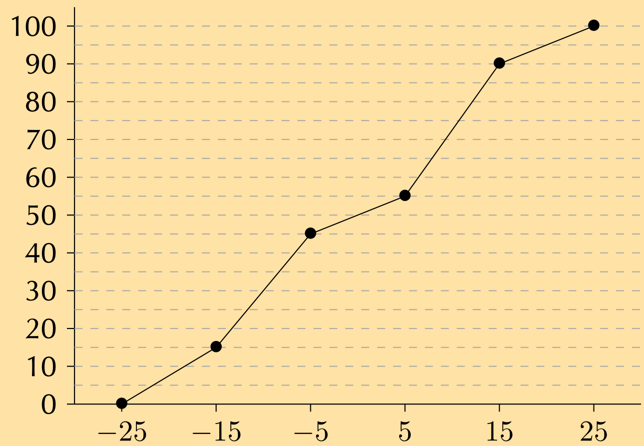
Oefening 11 – 3: Ogiewe

1. Gebruik die ogief om onderstaande vrae te beantwoord.



   a) Hoeveel studente het tussen 50% en 70% gekry?
   b) Hoeveel studente het ten minste 70% gekry?
   c) Bereken die gemiddeld van die klaspunt, rond af tot die naaste heelgetal.

2. Teken die histogram wat ooreenstem met die ogief.



3. Die volgende datastelle lys die ouderdomme van 24 mense:

   $2; 5; 1; 76; 34; 23; 65; 22; 63; 45; 53; 38$

   $4; 28; 5; 73; 79; 17; 15; 5; 34; 37; 45; 56$

   Gebruik die data om die volgende vrae te beantwoord.

   a) Deur 'n intervalwydte van 8 te gebruik, konstrueer 'n kumulatiewe grafiek.
   b) Hoeveel is jonger as 30?
   c) Hoeveel is jonger as 60?
   d) Gee 'n verduideliking onder watter waarde die onderste 50% van die ouderdomme val.
   e) Onder watter waarde val die onderste 40%?
   f) Konstrueer 'n frekwensieveelhoek.

4. Die gewig van sandsakke in gram word hieronder gegee (afgerond tot die naaste tiende):

$50{,}1$; $40{,}4$; $48{,}5$; $29{,}4$; $50{,}2$; $55{,}3$; $58{,}1$; $35{,}3$; $54{,}2$; $43{,}5$

$60{,}1$; $43{,}9$; $45{,}3$; $49{,}2$; $36{,}6$; $31{,}5$; $63{,}1$; $49{,}3$; $43{,}4$; $54{,}1$

a) Besluit op 'n intervalwydte en verklaar wat jy waargeneem het oor jou keuse.
b) Gee jou laagste interval.
c) Gee jou hoogste interval.
d) Konstrueer 'n kumulatiewe frekwensie grafiek en 'n frekwensie veelhoek.
e) Onder watter waarde val 53% van die gevalle?
f) Onder watter waarde val 60% van die gevalle?

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26NS 2. 26NT 3. 26NV 4. 26NW

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

11.4 Variansie en standaardafwyking EME68

Maatstawe van die sentrale neiging (gemiddelde, mediaan en modus) voorsien inligting oor die datawaardes by die middelpunt van die datastel. Metings van verspreiding (kwartiele, persentiele, reikwydtes) voorsien inligting oor die verspreiding van die data om die middel. In die afdeling gaan ons ook kyk na nog twee maatstawe van verspreiding naamlik **variansie** en **standaardafwyking**.

Sien video: 26NX op www.everythingmaths.co.za

Variansie EME69

DEFINISIE: *Variansie*

Laat 'n bevolking bestaan uit n elemente, $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$. Skryf die gemiddelde van die data neer as $\overline{x}$.
Die variansie van die data is die gemiddelde gekwadreerde afstand tussen die gemiddelde en elke datawaarde.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

NOTA:
Die variansie word geskryf as σ^2. Dit lyk dalk vreemd dat dit in kwadraatvorm geskryf is, maar jy sal binnekort sien hoekom dit so is wanneer ons die standaardafwyking bespreek.

Die variansie het die volgende eienskappe.

- Dit is nooit negatief nie, want elke term in die variansiesom word gekwadreer en is dus of positief of nul.
- Dit het gekwadreerde eenhede. Byvoorbeeld, die variansie van 'n stel hoogtes gemeet in sentimeter sal gegee word in sentimeters kwadraat. Omdat die populasievariansie gekwadreer is, is dit nie direk vergelykbaar met die gemiddelde of die data self nie. In die volgende afdeling sal ons die verskillende maatstawe van verspreiding verduidelik en die standaardafwyking, wat dieselfde eenhede het as die data.

Uitgewerkte voorbeeld 10: Variansie

VRAAG

Jy gooi 'n muntstuk 100 keer en dit land 44 keer op kop. Jy kan dieselfe muntstuk gebruik en dit nog 100 keer gooi. Die keer land dit 49 keer op kop. Jy herhaal die eksperiment 'n totaal van 10 keer en kry die volgende resultate vir aantal koppe.

$$\{44; 49; 52; 62; 53; 48; 54; 49; 46; 51\}$$

Bereken die gemiddelde en variansie van die datastel.

OPLOSSING

Stap 1: Bereken die gemiddelde

Die formule vir die gemiddelde is

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

In hierdie geval, tel ons die datawaardes bymekaar en deel dit deur 10 om $\overline{x} = 50{,}8$ te kry.

Stap 2: Bereken die variansie

Die formule vir die variansie is

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n}$$

Ons moet eers die gemiddelde aftrek van elke datawaarde en dan die resultaat kwadreer.

x_i	44	49	52	62	53	48	54	49	46	51
$x_i - \overline{x}$	$-6{,}8$	$-1{,}8$	$1{,}2$	$11{,}2$	$2{,}2$	$-2{,}8$	$3{,}2$	$-1{,}8$	$-4{,}8$	$0{,}2$
$(x_i - \overline{x})^2$	$46{,}24$	$3{,}24$	$1{,}44$	$125{,}44$	$4{,}84$	$7{,}84$	$10{,}24$	$3{,}24$	$23{,}04$	$0{,}04$

Die variansie is die som van die waardes in die laaste ry in die tabel gedeel deur 10, so $\sigma^2 = 22{,}56$.

Omdat die variansie 'n gekwadreerde getal is, kan dit nie direk vergelyk word met die datawaarde of die gemiddelde van die datastel nie. Dit is daarom meer nuttig om 'n getal te hê wat die vierkantswortel is van die variansie. Die getal staan bekend as die standaardafwyking.

DEFINISIE: *Standaardafwyking*

Laat 'n populasie bestaan uit n elemente, $\{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, met 'n gemiddelde van $\overline{x}$. Die standaardafwyking van die data is

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

In statistiek, is die standaardafwyking 'n baie algemene maatstaf van verspreiding. Die standaardafwyking meet hoe uitgesprei die waardes in die datastel om die gemiddelde is. Meer spesifiek, dit is 'n meting van die gemiddelde afstand tussen die waardes van die data in die stel en die gemiddelde. As die datawaardes almal soortgelyk is, dan is die standaardafwyking laag (nader aan nul). As die datawaardes hoogs veranderlik is, dan is die standaardafwyking hoog (verder van nul).

Die standaardafwyking is altyd 'n positiewe getal en is altyd gemeet in dieselfde eenhede as die oorspronklike data. Byvoorbeeld, as die data afstandmetings is, gemeet in kilometers, dan is die standaardafwyking ook gemeet in kilometers.

Die gemiddelde en die standaardafwyking van 'n datastel word gewoonlik saam gegee. In 'n sekere mate is die standaardafwyking 'n natuurlike maatstaf van verspreiding as die middelpunt van die data geneem word as die gemiddelde.

Ondersoek: Tabulering van resultate

Dit is dikwels nuttig om jou data in 'n tabel voor te stel sodat jy die formulae maklik kan toepas. Voltooi die tabel hieronder om die standaardafwyking te bereken van $\{57; 53; 58; 65; 48; 50; 66; 51\}$.

- Eerstens, onthou om die gemiddelde te bereken, $\overline{x}$.
- Voltooi die volgende tabel.

indeks: i	datum: x_i	afwyking: $x_i - \overline{x}$	afwyking gekwadreer: $(x_i - \overline{x})^2$
1	57		
2	53		
3	58		
4	65		
5	48		
6	50		
7	66		
8	51		
	$\sum x_i = \ldots$	$\sum(x_i - \overline{x}) = \ldots$	$\sum(x_i - \overline{x})^2 = \ldots$

- Die som van die afwykings is altyd nul. Hoekom is dit so? Vind uit.
- Bereken die variansie deur gebruik te maak van die voltooide tabel.
- Bereken dan die standaardafwyking.

Uitgewerkte voorbeeld 11: Variansie en standaardafwyking

VRAAG

Wat is die variansie en standaardafwyking van die moontlike uitkomste geassosiëer met 'n ewekansige dobbelsteen gooi?

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal alle moontlike uitkomste

Waneer 'n ewekansige dobbelsteen gegooi word, bevat die steekproefruimte 6 uitkomste. Die datastel is dus $x = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ en $n = 6$.

Stap 2: Bereken die gemiddelde

Die gemiddelde is:

$$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)\\ &= 3{,}5\end{aligned}$$

Stap 3: Bereken die variansie

Die variansie is:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n}\\ &= \frac{1}{6}(6{,}25+2{,}25+0{,}25+0{,}25+2{,}25+6{,}25)\\ &= 2{,}917\end{aligned}$$

Stap 4: Bereken die standaardafwyking

Die standaardafwyking is:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{2{,}917}\\ &= 1{,}708\end{aligned}$$

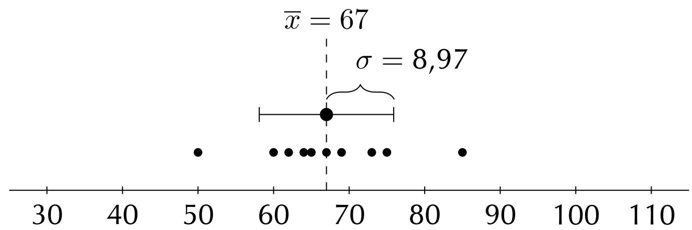
Sien video: 26NY op www.everythingmaths.co.za

’n Groot standaardafwyking dui aan dat die data waardes ver van die gemiddeld is, en ’n klein standaardafwyking dui aan dat die data waardes naby aan die gemiddeld gegroepeer is.

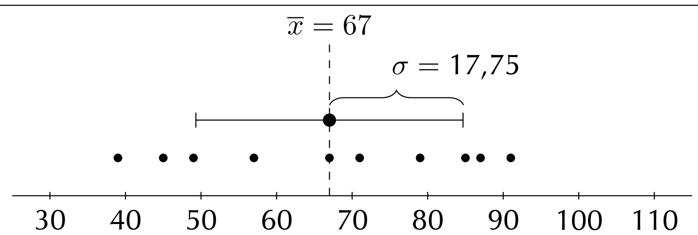
Byvoorbeeld, beskou die volgende drie datastelle:

$$\{65; 75; 73; 50; 60; 64; 69; 62; 67; 85\}$$
$$\{85; 79; 57; 39; 45; 71; 67; 87; 91; 49\}$$
$$\{43; 51; 53; 110; 50; 48; 87; 69; 68; 91\}$$

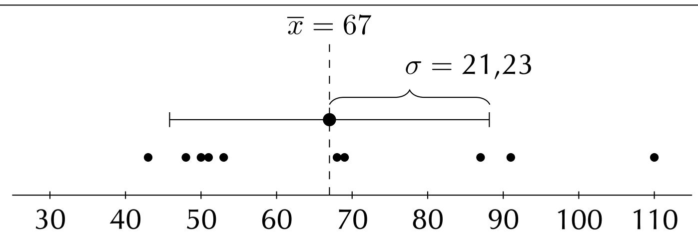
Elk van die datastelle het dieselfde gemiddelde, naamlik 67. Hulle het egter verskillende standaardafwykings, naamlik $8{,}97$, $17{,}75$ en $21{,}23$. Die volgende diagramme toon stipping van datastelle met die gemiddelde en standaardafwyking aangedui op elkeen. Jy kan sien dat die standaardafwyking groter is waneer die data meer verspreid is.



data: $\{x_i\} = \{65; 75; 73; 50; 60; 64; 69; 62; 67; 85\}$
gemiddeld: $\overline{x} = 67$
standaardafwyking: $\sigma \approx 8{,}97$



data: $\{x_i\} = \{85; 79; 57; 39; 45; 71; 67; 87; 91; 49\}$
gemiddeld: $\overline{x} = 67$
standaardafwyking: $\sigma \approx 17{,}75$



data: $\{x_i\} = \{43; 51; 53; 110; 50; 48; 87; 69; 68; 91\}$
gemiddeld: $\overline{x} = 67$
standaardafwyking: $\sigma \approx 21{,}23$

Die standaardafwyking kan ook gesien word as ’n maatstaf van onsekerheid. In fisiese wetenskappe byvoorbeeld, verteenwoordig die gegewe standaardafwyking van 'n groep van herhaalde eksperimente die akkuraatheid van daardie metings. Wanneer daar besluit word of die metings ooreenstem met 'n teoretiese voorspelling, is die standaardafwyking van daardie metings baie belangrik. Indien die gemiddeld van die metings te ver weg is van die voorspelling (met die afstand gemeet in hoeveelheid standaardafwykings), dan weerspreek die metings die voorspelling. Dit maak sin, aangesien hulle buite die strekking val van waardes wat aanvaarbaar sou wees indien die voorspelling korrek was.

Oefening 11 – 4: Variansie en standaardafwyking

1. Bridget het 'n opname gemaak van die prys van petrol by vulstasies in Kaapstad en Durban. Die data, wat in rand per liter gemeet word, word hieronder gegee.

Kaapstad	$3{,}96$	$3{,}76$	$4{,}00$	$3{,}91$	$3{,}69$	$3{,}72$
Durban	$3{,}97$	$3{,}81$	$3{,}52$	$4{,}08$	$3{,}88$	$3{,}68$

   a) Bepaal die gemiddelde prys in elke stad en stel dan vas watter stad die laagste gemiddeld het.
   b) Bepaal die standaardafwyking vir elk van die stede se prys.
   c) Watter stad het 'n meer konsekwente prys vir petrol? Gee redes vir jou antwoord.

2. Bereken die gemiddelde en variansie van die volgende stel waardes.

   $150 \ ; 300 \ ; 250 \ ; 270 \ ; 130 \ ; 80 \ ; 700 \ ; 500 \ ; 200 \ ; 220 \ ; 110 \ ; 320 \ ; 420 \ ; 140$

3. Bereken die gemiddelde en variansie van die volgende stel waardes.

   $-6{,}9 \ ; -17{,}3 \ ; 18{,}1 \ ; 1{,}5 \ ; 8{,}1 \ ; 9{,}6 \ ; -13{,}1 \ ; -14{,}0 \ ; 10{,}5 \ ; -14{,}8 \ ; -6{,}5 \ ; 1{,}4$

4. Die tye vir 8 atlete wat 'n 100 m naelloop op dieselfde baan gehardloop het, word hieronder weergegee. Al die tye is in sekondes.

   $10{,}2 \ ; 10{,}8 \ ; 10{,}9 \ ; 10{,}3 \ ; 10{,}2 \ ; 10{,}4 \ ; 10{,}1 \ ; 10{,}4$

   a) Bereken die gemiddelde tyd.
   b) Bereken die standaardafwyking vir die data.
   c) Hoeveel van die atlete se tye is meer as een standaardafwyking weg vanaf die gemiddeld?

5. Die volgende datastel het 'n gemiddeld van $14{,}7$ en 'n variansie van $10{,}01$.

$$18 \ ; \ 11 \ ; \ 12 \ ; \ a \ ; \ 16 \ ; \ 11 \ ; \ 19 \ ; \ 14 \ ; \ b \ ; \ 13$$

   Bereken die waardes van a en b.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26NZ 2. 26P2 3. 26P3 4. 26P4 5. 26P5

www.everythingmaths.co.za **m.everythingmaths.co.za**

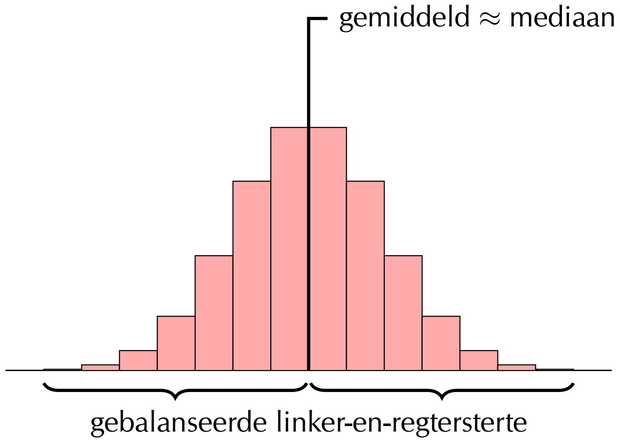
11.5 Simmetriese en skewe data EME6D

Ons klassifiseer datastelle in 3 kategorieë wat die vorm van die dataverspreiding beskryf: simmetries, skeef na links, skeef na regs. Ons kan hierdie klassifikasie gebruik vir enige datastel, maar hier sal ons slegs kyk na verspreidings met een piek. Meeste van die data verspreidings wat jy tot dus ver gesien het, het slegs een piek, dus sal die grafiek in hierdie afdeling bekend lyk.

Verspreidings met een piek word **eentoppige verspreidings** genoem. Eentoppig beteken letterlik een top of piek (onthou,'n piek is 'n maksimum in die verspreiding).

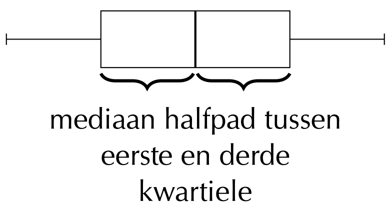
Simmetriese verspreidings EME6F

'n Simmetriese verspreiding is een waar die linkerkant en regterkant van die verspreiding rofweg gelyk gebalanseer is rondom die gemiddeld. Die histogram hieronder wys 'n tipiese simmetriese verspreiding.



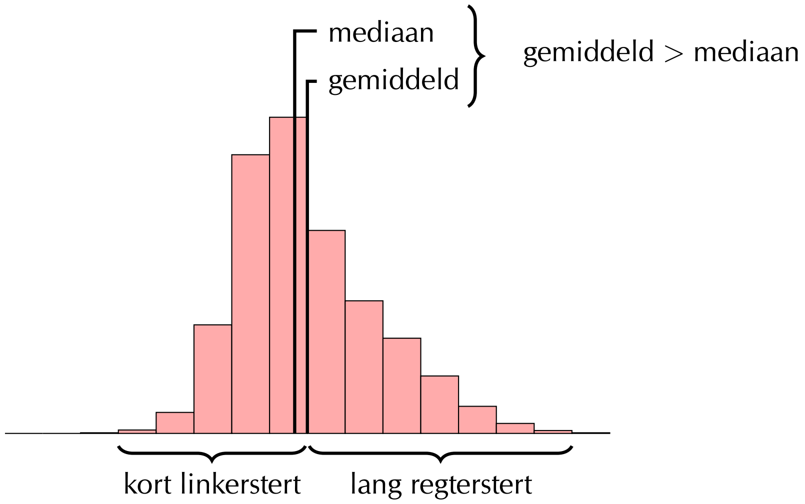
Vir simmetriese verspreidings is die gemiddeld ongeveer gelyk aan die mediaan. Die **sterte** van die verspreiding is die dele van die linkerkant en regterkant, weg van die gemiddeld. Die stert is die deel waar die hoeveelhede in die histogram minder word. Vir 'n simmetriese verspreiding, is die linker en regtersterte ongeveer gebalanseerd, wat beteken hulle het ongeveer dieselfde lengte.

Die figuur hieronder wys die mond-en-snor diagram vir 'n tipiese simmetriese datastel.

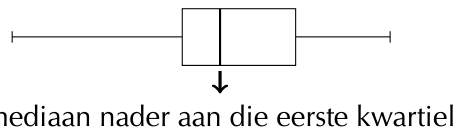


'n Ander eienskap van 'n simmetriese verspreiding is dat die mediaan (tweede kwartiel) in die middel van die eerste en derde kwartiele lê. Let op dat die snor van die grafiek (die minimum en maksimum) nie ewe ver van die mediaan hoef te wees nie. In die volgende afdeling wat handel oor uitskieters, sal jy sien dat die minimum en maksimumwaardes nie noodwendig die res van die dataverspreiding weerspieël nie.

'n Verspreiding wat **skeef na regs** is (ook bekend as **positief skeef**) word hier onder aangedui.



Nou is die verspreiding nie meer simmetries rondom die gemiddeld nie. Vir 'n verspreiding wat skeef na regs is, is die gemiddeld gewoonlik groter as die mediaan. Let ook op dat die stert van die verspreiding aan die regterkant (positiewe kant) langer is as die linkerkant.

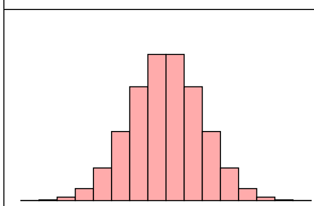
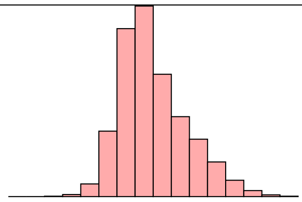
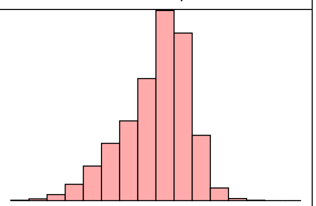
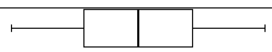
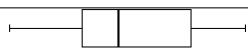
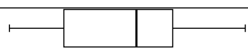


Van die mond-en-snor diagramme kan ons ook sien dat die mediaan nader is aan die eerste kwartiel as aan die derde kwartiel. Die regterkantse stert is dan ook langer as die linkerkant s'n.

'n Verspreiding wat skeef na links is, het presies die teenoorgestelde eienskappe as een wat skeef na regs is:

- die gemiddeld is gewoonlik minder as die mediaan.
- die stert van die verspreiding is langer aan die linkerkant as aan die regterkant;
- die mediaan is nader aan die derde kwartiel as aan die eerste kwartiel.

Die tabel hieronder som die verskillende kategorieë visueel op.

Simmetries	Skeef na regs (positief skeef)	Skeef na links (negatief skeef)
		
		

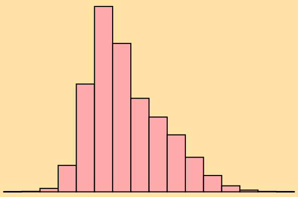
Oefening 11 – 5: Simmetriese en skewe data

1. Is die volgende datastel simmetries, skeef na regs, of skeef na links? Motiveer jou antwoord.

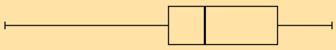
   $27 ; 28 ; 30 ; 32 ; 34 ; 38 ; 41 ; 42 ; 43 ; 44 ; 46 ; 53 ; 56 ; 62$

2. Stel of elk van die volgende datastelle simmetries, skeef na links, of skeef na regs is.

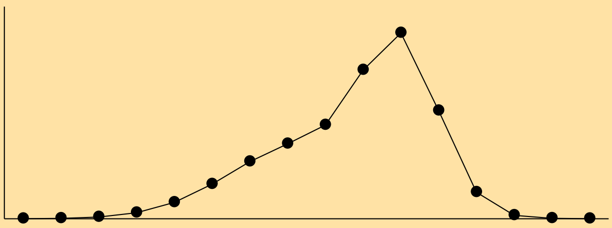
   a) 'n Datastel met 'n histogram:

   b) 'n Datastel met hierdie mond-en-snor grafiek.

   c) 'n Datastel met hierdie frekwensie veelhoek:

   d) Die volgende datastel:
   $11{,}2 ; 5 ; 9{,}4 ; 14{,}9 ; 4{,}4 ; 18{,}8 ; -0{,}4 ; 10{,}5 ; 8{,}3 ; 17{,}8$

3. Twee datastelle het dieselfde reikwydte en inter-kwartiel variasiewydte, maar die een is skeef na regs en die ander is skeef na links. Teken die mond-en-snor grafiek vir elk van die datastelle. Dink daarna data uit (6 punte in elke datastel) wat inpas by die beskrywing van die twee datastelle.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1\. 26P6 2a. 26P7 2b. 26P8 2c. 26P9 2d. 26PB 3. 26PC

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

11.6 Identifisering van uitskieters EME6H

'n Uitskieter in 'n datastel is 'n waarde wat ver weg is van die res van die waardes in die versameling. In 'n mond-en-snor diagram, is die uitskieters gewoonlik naby aan die snorpunte. Dit is omdat die middel van die diagram die data tussen die eerste en derde kwartiele voorstel. Hierdie data is waar 50% van die data lê. Die snorpunte verteenwoordig die uiterstes — die minimum en maksimum — van die data.

Uitgewerkte voorbeeld 12: Identifisering van uitskieters

VRAAG

Vind die uitskieters in die volgende datastel deur 'n mond-en-snor diagram te teken, en die datawaardes op die diagram aan te dui.

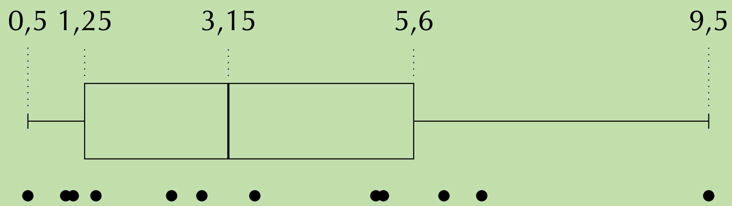
$0{,}5 \,;\, 1 \,;\, 1{,}1 \,;\, 1{,}4 \,;\, 2{,}4 \,;\, 2{,}8 \,;\, 3{,}5 \,;\, 5{,}1 \,;\, 5{,}2 \,;\, 6 \,;\, 6{,}5 \,;\, 9{,}5$

OPLOSSING

Stap 1: Bepaal die vyf-getal opsomming

Die minimum van die datastel is $0{,}5$. Die maksimum van die datastel is $9{,}5$. Aangesien daar 12 waardes in die datastel is, lê die mediaan tussen die sesde en sewende waardes, wat dit gelyk maak aan $\frac{2{,}8+3{,}5}{2} = 3{,}15$. Die eerste kwartiel le tussen die derde en vierde waardes, wat dit gelyk maak aan $\frac{1{,}1+1{,}4}{2} = 1{,}25$. Die derde kwartiel le tussen die neënde en tiende waardes, wat dit gelyk maak aan $\frac{5{,}2+6}{2} = 5{,}6$.

Stap 2: Teken die mond-en-snor diagram



In die figuur hierbo word elke waarde in die datastel met 'n swart kol aangedui

Stap 3: Bepaal die uitskieters

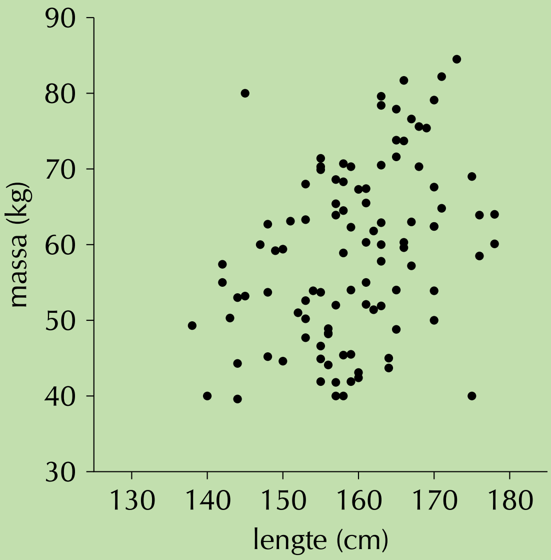
Vanaf die diagram kan ons sien dat die meeste waardes tussen 1 en 6 lê. Die enigste getal wat baie ver van hierdie reeks is, is die maksimum by $9{,}5$. Derhalwe is $9{,}5$ die enigste uitskieter in die datastel.

Jy moet ook die uitskieters in stippings van twee veranderlikes kan uitken. 'n **Strooiingsdiagram** is 'n grafiek wat die verhouding tussen twee toevalsveranderlikes wys. Ons noem hierdie data **bivariaat** (of tweeveranderlike data) en ons stip die data vir twee verskillende veranderlikes op 'n enkele assestelsel. Die volgende voorbeeld wys hoe 'n tipiese strooiingsdiagram lyk. In Graad 11 hoef jy nie te leer hoe om hierdie tweedimensionele strooiingsdiagramme te teken nie, maar jy moet die uitskieters daaruit kan identifiseer. Soos voorheen is 'n uitskieter 'n waarde wat ver verwyderd is van die hoofverspreiding van data.

Uitgewerkte voorbeeld 13: Strooiingsdiagram

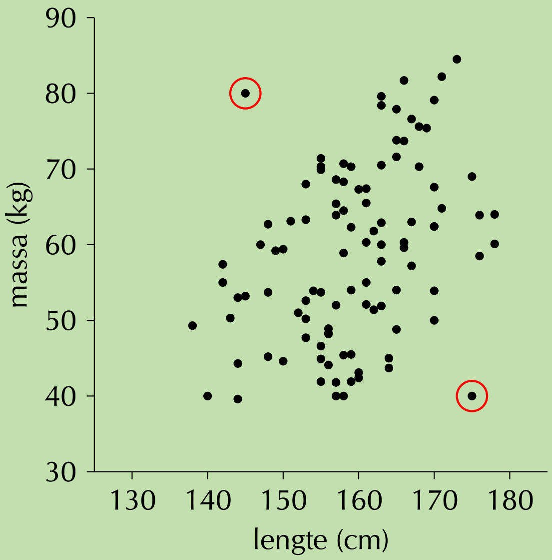
VRAAG

Ons het 'n datastel wat die verband tussen lengte en massa van 'n aantal mense weergee. Die lengte is die waarde wat langs die horisontale as gestip word. Die massa is die tweede veranderlike en sy waarde word langs die vertikale as gestip. Die waardes word gewys op die stipping hieronder. Identifiseer enige uitskieters op die strooiingsdiagram.



OPLOSSING

Wanneer ons die stipping visueel ondersoek, sien ons dat daar twee punte is wat ver weg van die hoofverspreiding lê. Hierdie twee punte word omkring in die stipping hieronder.



Oefening 11 – 6: Uitskieters

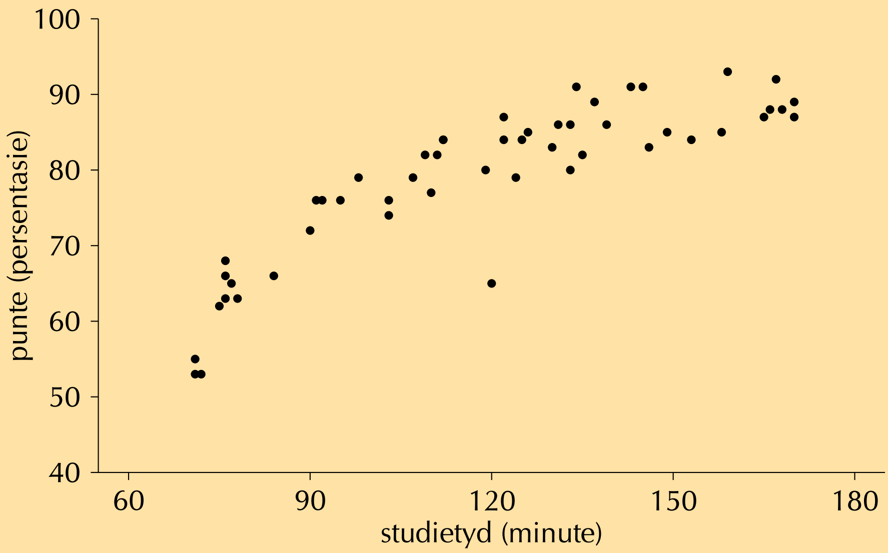
1. Vir elk van die volgende datastelle, teken 'n mond-en-snor diagram en bepaal of daar enige uitskieters in die data is.

   a) $30\ ;\ 21{,}4\ ;\ 39{,}4\ ;\ 33{,}4\ ;\ 21{,}1\ ;\ 29{,}3\ ;\ 32{,}8\ ;\ 31{,}6\ ;\ 36\ ;$ $27{,}9\ ;\ 27{,}3\ ;\ 29{,}4\ ;\ 29{,}1\ ;\ 38{,}6\ ;\ 33{,}8\ ;\ 29{,}1\ ;\ 37{,}1$

   b) $198\ ;\ 166\ ;\ 175\ ;\ 147\ ;\ 125\ ;\ 194\ ;\ 119\ ;\ 170\ ;\ 142\ ;\ 148$

   c) $7{,}1\ ;\ 9{,}6\ ;\ 6{,}3\ ;\ -5{,}9\ ;\ 0{,}7\ ;\ -0{,}1\ ;\ 4{,}4\ ;\ -11{,}7\ ;\ 10\ ;\ 2{,}3\ ;\ -3{,}7\ ;\ 5{,}8\ ;\ -1{,}4\ ;$ $1{,}7\ ;\ -0{,}7$

2. Die punte wat 'n klas in 'n toets verwerf het, is tesame met die hoeveelheid voorbereidingstyd aangeteken. Die resultate word hieronder weergegee. Identifiseer enige uitskieters in die data.



Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1a. 26PD 1b. 26PF 1c. 26PG 2. 26PH

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

11.7 Opsomming EME6J

Sien aanbieding: 26PJ op www.everythingmaths.co.za

- Histogramme gee 'n visuele voorstelling van hoeveel keer verskillende gebeure voorkom. Elke reghoekie in 'n histogram verteenwoordig een gebeurtenis en die hoogte van die reghoek is eweredig aan die aantal kere wat die gebeurtenis voorgekom het.
- Frekwensieveelhoeke stel dieselfde informasie as histogramme voor, maar maak gebruik van lyne en punte eerder as reghoeke. 'n Frekwensieveelhoek verbind die middelpunte van die boonste randte van elke reghoek in 'n histogram.
- Ogiewe (ook spitsboog of kumulatiewe histogram genoem) wys die totale aantal kere wat 'n waarde of enigiets minder as daardie waarde voorkom in 'n datastel. Om 'n ogief te teken moet jy al die waardes in 'n histogram van links na regs optel.
  - Die eerste waarde in 'n ogief is altyd nul
  - Die laaste waarde in 'n ogief is altyd dieselfde as die som van al die waardes in die datastel
- Sê, met redes, in welke geval die datastelle simmetries of skeef is (positief of negatief)
  - Die standaardafwyking is die vierkantswortel van die variansie
  - Variansie: $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$
  - Standaardafwyking: $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$
  - Die standaardafwyking word in dieselfde eenhede as die gemiddeld en data gemeet, maar nie die variansie nie. Die variansie word in die kwadraat van die data-eenhede gemeet
- In 'n simmetriese verspreiding
  - is die gemiddeld ongeveer gelyk aan die mediaan
  - is die sterte (eindpunte) van die verspreiding gebalanseer.
- In 'n regs of positief skeef verspreiding is
  - die gemiddeld groter as die mediaan
  - die stert aan die regterkant langer as die stert aan die linkerkant
  - die mediaan nader aan die eerste kwartiel aan derde kwartiel
- In 'n links of negatief skeef verspreiding is
  - die gemiddeld minder as die mediaan
  - die stert aan die linkerkant langer as die stert aan die regterkant
  - die mediaan nader aan die derde kwartiel as die eerste kwartiel
- 'n Uitskieter is 'n waarde wat ver weg lê van die res van die data.

Oefening 11 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Teken 'n histogram, frekwensiepoligoon en ogief van die volgende datastel. Om die data te tel, gebruik intervalle met 'n wydte van 1, beginnende by 0.

   $0{,}4$; $3{,}1$; $1{,}1$; $2{,}8$; $1{,}5$; $1{,}3$; $2{,}8$; $3{,}1$; $1{,}8$; $1{,}3$;

   $2{,}6$; $3{,}7$; $3{,}3$; $5{,}7$; $3{,}7$; $7{,}4$; $4{,}6$; $2{,}4$; $3{,}5$; $5{,}3$

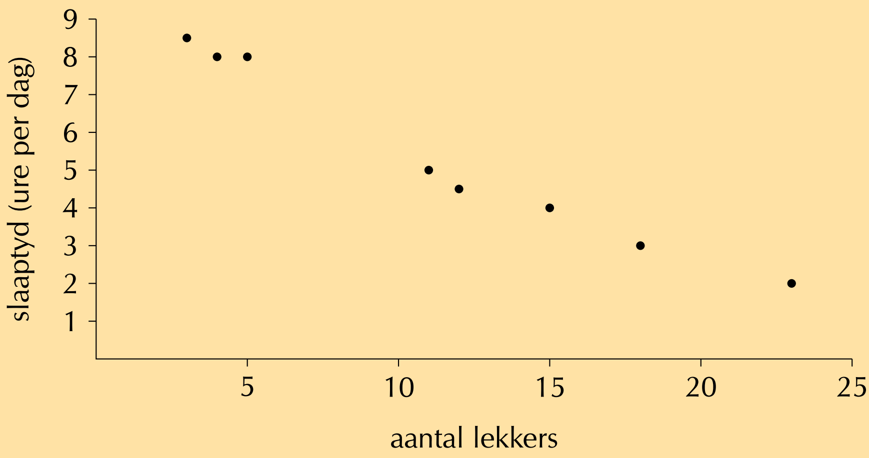
2. Teken 'n mond-en-snor diagram van die volgende datastel en verduidelik hoekom dit simmetries, positief skeef of negatief skeef is.

   $-4{,}1$; $-1{,}1$; -1 ; $-1{,}2$; $-1{,}5$; $-3{,}2$; -4 ; $-1{,}9$; -4 ;

   $-0{,}8$; $-3{,}3$; $-4{,}5$; $-2{,}5$; $-4{,}4$; $-4{,}6$; $-4{,}4$; $-3{,}3$

3. Agt kinders se lekkergoed konsumpsie en slaapgewoontes is opgeteken. Die data word gegee in die volgende tabel en strooiingsdiagram.

Aantal lekkers per week	15	12	5	3	18	23	11	4
Gemiddelde slaaptyd (ure per dag)	4	4,5	8	8,5	3	2	5	8



   a) Wat is die gemiddeld en standaardafwyking van die aantal lekkers wat per dag geëet word?
   b) Wat is die gemiddeld en standaardafwyking van die aantal ure wat per dag geslaap word?
   c) Maak 'n lys van al die uitskieters in die datastel.

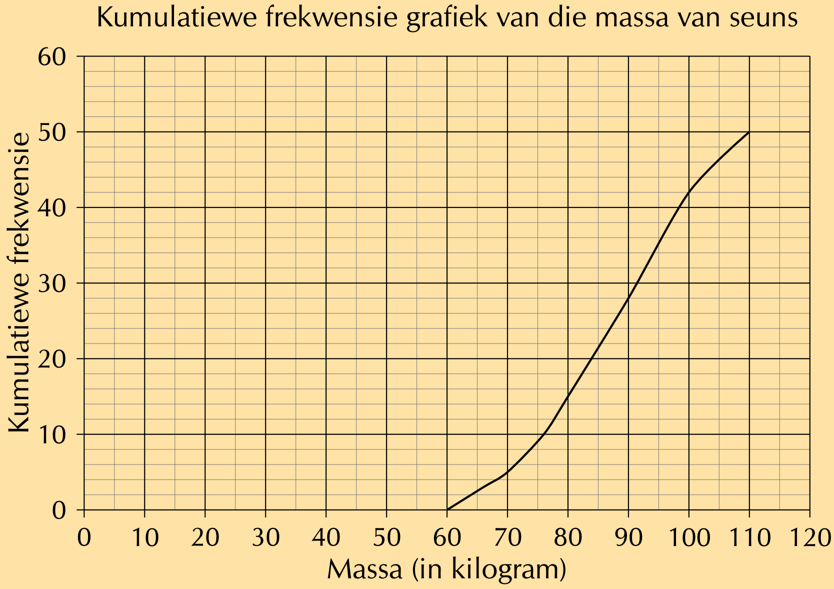
4. Die maandelikse inkomste van agt onderwysers is as volg:

   R 10 050; R 14 300; R 9800; R 15 000; R 12 140; R 13 800; R 11 990; R 12 900.

   a) Wat is die gemiddelde en standaardafwyking van hulle inkomstes?
   b) Hoeveel van die salarisse is minder as een standaardafwyking weg van die gemiddeld?
   c) Indien daar 'n bonus van R 500 by elke onderwyser se salaris gevoeg word, wat is die nuwe gemiddeld en standaardafwyking?
   d) Indien elke onderwyser 'n bonus van 10% op hul salaris kry, wat is die nuwe gemiddeld en standaardafwyking?
   e) Bepaal vir elk van die gevalle hierbo hoeveel salarisse minder as een standaardafwyking weg van die gemiddelde af is.

f) Deur van die bostaande informasie gebruik te maak, bereken watter bonus finansieel gesproke meer voordelig vir die onderwysers is.

5. Die massa van 'n ewekansige steekproef van seuns in Graad 11 is aangeteken. Die kumulatiewe frekwensiegrafiek (ogief) verteenwoordig hierdie massa.



a) Hoeveel seuns het tussen 90 en 100 kilograms geweeg?

b) Skat die mediaanmassa van die seuns.

c) Gestel daar was 250 seuns in Graad 11, skat die aantal seuns wat minder as 80 kilogram weeg.

6. Drie stelle van 12 leerders elk se toetspunte is aangeteken. Die toets het uit 50 getel. Gebruik die gegewe data om die volgende vrae te beantwoord.

Stel A	Stel B	Stel C
25	32	43
47	34	47
15	35	16
17	32	43
16	25	38
26	16	44
24	38	42
27	47	50
22	43	50
24	29	44
12	18	43
31	25	42

a) Vir elke stel, bereken die gemiddeld en die vyf-getal opsomming.

b) Teken mond-en-snor diagramme van die drie datastelle op dieselfde assestel.

c) Sê, met redes, vir elkeen van die drie datastelle of dit simmetries, positief skeef of negatief skeef is.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26PK 2. 26PM 3. 26PN 4. 26PP 5. 26PQ 6. 26PR

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

HOOFSTUK 12

Lineêre programering

12.1 Inleiding

EME6K

In die alledaagse lewe stel mense baie daarin belang om uit te vind wat die mees doeltreffende manier is om ’n taak te doen, of ’n doel te bereik. ’n Boer wil byvoorbeeld weet hoeveel hektaar gedurende die seisoen geplant moet word om sy opbrengs (produksie) te maksimiseer, ’n aandelemakelaar wil weet hoeveel om in aandele te belê om winste te maksimiseer, en ’n entrepreneur wil weet hoeveel mense om in diens te neem om uitgawes te minimeer. Hierdie is almal optimiseringsprobleme; ons wil óf die maksimum óf die minimum in ’n spesifieke situasie bepaal.

Om hierdie probleem wiskunding te beskryf, kies ons veranderlikes om die verskillende faktore wat die situasie beïnvloed, voor te stel. Optimisering beteken om die kombinasie van veranderlikes te vind wat die beste resultaat lewer.

Sien video: 26PS op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 1: Mountees en Roadees

VRAAG

Ondersoek die volgende situasie en gebruik jou kennis van wiskunde om die probleem op te los:

Mnr. Hunter vervaardig fietse. Hy maak twee verskillende modelle fietse; sterk bergfietse wat Mountees genoem word, en vinnige padfietse wat Roadees genoem word. Hy kan nie meer as 5 Mountees op ’n dag vervaardig nie, en hy kan ’n maksimum van 3 Roadees per dag vervaardig. Hy benodig 1 tegnikus om ’n Mountee aanmekaar te sit, en 2 tegnici om ’n Roadee aanmekaar te sit. Die maatskappy het 8 tegnici in die monteringsafdeling. Die wins op ’n Mountee is R 800, en dit is R 2400 op ’n Roadee. Die aanvraag is sodanig dat hy al die fietse wat hy vervaardig, kan verkoop.

Bepaal die aantal van elk van die twee fietsmodelle wat vervaardig moet word ten einde die maksimum wins te maak.

OPLOSSING

Stap 1: Ken veranderlikes toe

In hierdie geval is daar twee veranderlikes wat ons moet oorweeg: laat die aantal Mountees wat vervaardig word M wees, en laat die aantal Roadees wat vervaardig word R wees.

Stap 2: Organiseer die gegewe inligting

Skryf ’n opsomming van die inligting wat in die probleem gegee is neer, sodat ons al die verskillende komponente van hierdie situasie kan oorweeg.

$$\begin{aligned}
\text{maksimum aantal vir } M &= 5\\
\text{maksimum aantal vir } R &= 3\\
\text{aantal tegnici nodig vir } M &= 1\\
\text{aantal tegnici nodig vir } R &= 2\\
\text{totale aantal tegnici} &= 8\\
\text{wins per } M &= 800\\
\text{wins per } R &= 2400
\end{aligned}$$

Stap 3: Stel 'n tabel op

Gebruik die opsomming om 'n tabel van al die moontlike kombinasies van die aantal Mountees en Roadees wat per dag vervaardig kan word, op te stel:

M	R			
	0	1	2	3
0	$(0;0)$	$(0;1)$	$(0;2)$	$(0;3)$
1	$(1;0)$	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$
2	$(2;0)$	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$
3	$(3;0)$	$(3;1)$	$(3;2)$	$(3;3)$
4	$(4;0)$	$(4;1)$	$(4;2)$	$(4;3)$
5	$(5;0)$	$(5;1)$	$(5;2)$	$(5;3)$

Let op dat daar 24 moontlike kombinasies is.

Stap 4: Oorweeg die beperking op die aantal tegnici

Dit neem 1 tegnikus om 'n Mountee aanmekaar te sit, en 2 tegnici om 'n Roadee aanmekaar te sit. Daar is 'n totaal van 8 tegnici in the monteringsafdeling, dus kan ons skryf dat $1(M) + 2(R) \leq 8$.

Met hierdie beperking kan ons sommige van die kombinasies in die tabel elimineer waar $M + 2R > 8$:

M	R			
	0	1	2	3
0	$(0;0)$	$(0;1)$	$(0;2)$	$(0;3)$
1	$(1;0)$	$(1;1)$	$(1;2)$	$(1;3)$
2	$(2;0)$	$(2;1)$	$(2;2)$	$(2;3)$
3	$(3;0)$	$(3;1)$	$(3;2)$	$\cancel{(3;3)}$
4	$(4;0)$	$(4;1)$	$(4;2)$	$\cancel{(4;3)}$
5	$(5;0)$	$(5;1)$	$\cancel{(5;2)}$	$\cancel{(5;3)}$

Hierdie kombinasies is uitgesluit as moontlike antwoorde. Byvoorbeeld, $(5;3)$ gee $5 + 2(3) = 11$ tegnici.

Stap 5: Oorweeg die wins op die fietse

Ons kan die wins (P) per dag uitdruk as: $P = 800(M) + 2400(R)$. Let daarop dat 'n hoër wins op 'n Roadee gemaak word.

Deur die verskillende kombinasies in M en R in te vervang, kan ons die waardes wat die maksimum wins gee, vind:

$$\begin{aligned} \text{Vir } (5;0) \quad P &= 800(5) + 2400(0) \\ &= \text{R } 4000 \\ \text{Vir } (3;1) \quad P &= 800(3) + 2400(1) \\ &= \text{R } 4800 \end{aligned}$$

M	R			
	0	1	2	3
0	$(0;0) \Rightarrow$ R 0	$(0;1) \Rightarrow$ R 2400	$(0;2) \Rightarrow$ R 4800	$(0;3) \Rightarrow$ R 7200
1	$(1;0) \Rightarrow$ R 800	$(1;1) \Rightarrow$ R 3200	$(1;2) \Rightarrow$ R 5600	$(1;3) \Rightarrow$ R 8000
2	$(2;0) \Rightarrow$ R 1600	$(2;1) \Rightarrow$ R 4000	$(2;2) \Rightarrow$ R 6400	$(2;3) \Rightarrow$ R 8800
3	$(3;0) \Rightarrow$ R 2400	$(3;1) \Rightarrow$ R 4800	$(3;2) \Rightarrow$ R 7200	$\cancel{(3;3)}$
4	$(4;0) \Rightarrow$ R 3200	$(4;1) \Rightarrow$ R 5600	$(4;2) \Rightarrow$ R 8000	$\cancel{(4;3)}$
5	$(5;0) \Rightarrow$ R 4000	$(5;1) \Rightarrow$ R 6400	$\cancel{(5;2)}$	$\cancel{(5;3)}$

Stap 6: Skryf die finale antwoord

Dus word die maksimum wins van R 8800 verkry as 2 Mountees en 3 Roadees per dag vervaardig word.

Oefening 12 – 1: Optimering

1. Meubelwinkel spesiale openingsaanbod:

   As deel van hulle spesiale openingsaanbod, het 'n meubelwinkel belowe om ten minste 40 pryse weg te gee, met 'n totale waarde van ten minste R 4000. Hulle is van voornemens om ketels en broodroosters weg te gee. Hulle besluit dat daar ten minste 10 eenhede van elke prys sal wees. 'n Ketel kos die maatskappy R 120 en 'n broodrooster kos R 100.

   Bepaal hoeveel van elke prys die goedkoopste opsie vir die maatskappy sal wees. Bereken hoeveel dié kombinasie van ketels en broodroosters sal kos.

   Gebruik 'n gepaste strategie om die inligting te organiseer en die probleem op te los.

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26PT

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Optimering met behulp van grafieke

'n Meer doeltreffende manier om optimeringsprobleme op te los is deur die gebruik van grafieke.

Ons skryf die beperkings in die situasie as ongelykhede neer. Sommige beperkings kan as 'n vergelyking, wat gemaksimiseer of geminimeer moet word, uitgedruk word. Ons skets die ongelykhede en dui die gebied bo of onder die lyn aan wat oorweeg moet word om die oplossing te bepaal. Hierdie metode vir die oplos van optimeringsprobleme word lineêre programering genoem.

Sien video: 26PV op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 2: Optimering met behulp van grafieke

VRAAG

Oorweeg weer die voorbeeld van Mnr. Hunter, wat Mountees en Roadees vervaardig.

Mnr. Hunter vervaardig fietse. Hy vervaardig twee verskillende modelle fietse; sterk bergfietse wat Mountees genoem word, en vinnige padfietse wat Roadees genoem word. Hy kan nie meer as 5 Mountees op 'n dag vervaardig nie, en hy kan 'n maksimum van 3 Roadees per dag vervaardig. Hy benodig 1 tegnikus om 'n Mountee aanmekaar te sit, en 2 tegnici om 'n Roadee aanmekaar te sit. Die maatskappy het 8 tegnici in die monteringsafdeling. Die wins op 'n Mountee is R 800, en dit is R 2400 op 'n Roadee. Die aanvraag is sodanig dat hy al die fietse wat hy vervaardig kan verkoop.

Bepaal die aantal van elke fietsmodel wat vervaardig moet word om die maksimum wins te maak.

OPLOSSING

Stap 1: Ken veranderlikes toe

In hierdie geval is daar twee veranderlikes wat ons moet oorweeg: laat die aantal Mountees wat vervaardig word M wees, en laat die aantal Roadees wat vervaardig word R wees.

Let op dat die waardes van M en R tot positiewe heelgetalle beperk is; Mnr. Hunter kan nie 'n negatiewe aantal fietse verkoop nie, en hy kan ook nie 'n gedeelte van 'n fiets verkoop nie.

Stap 2: Organiseer die inligting

Ons kan hierdie beperkings as ongelykhede skryf:

$$\text{aantal van Mountees: } 0 \leq M \leq 5$$

$$\text{aantal van Roadees: } 0 \leq R \leq 3$$

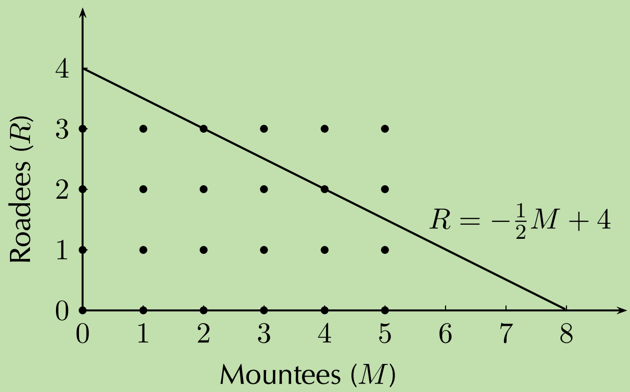
$$\text{aantal tegnici: } M + 2R \leq 8$$

Ons weet ook dat $P = 800M + 2400R$. Hierdie word die doelfunksie (soms ook die soekfunksie) genoem, omdat die doel is om die maksimum waarde van P te bepaal.

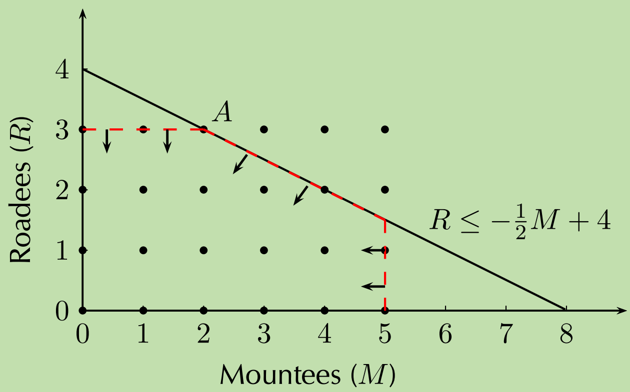
Stap 3: Oplossing deur grafieke te gebruik

Ons stel die aantal Mountees wat daagliks vervaardig word op die horisontale as voor, en die aantal Roadees wat daagliks vervaardig word op die vertikale as. Aangesien M en R positiewe heelgetalle is, gebruik ons slegs die eerste kwadrant van die Cartesiese vlak. Let op dat die grafiek slegs die heelgetalwaardes van M tussen 0 en 5 en R tussen 0 en 3 toon.

Vir die aantal tegnici in die monteringsafdeling $M + 2R \leq 8$. As ons R (voorgestel op die y-as) die onderwerp van die ongelykheid maak, kry ons $R \leq -\frac{1}{2}M + 4$.



Die pyle dui die gebied aan waarin die oplossing sal lê, waar $R \leq -\frac{1}{2}M + 4$. Hierdie gebied word die gangbare of toelaatbare gebied genoem.



Ons vervang die moontlike kombinasies in die winsvergelyking $P = 800M + 2400R$ en vind die kombinasie wat die maksimum wins gee.

$$\begin{aligned}\text{By } A(2;3): \quad P &= 800(2) + 2400(3) \\ &= \text{R } 8800\end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Dus word die maksimum wins verkry wanneer 2 Mountees en 3 Roadees per dag vervaardig word.

Sien video: 26PW op www.everythingmaths.co.za

Uitgewerkte voorbeeld 3: Optimering met behulp van grafieke

VRAAG

Los die "meubelwinkel spesiale openingsaanbod" probleem op deur van grafieke gebruik te maak:

As deel van hulle spesiale openingsaanbod het 'n meubelwinkel belowe om ten minste 40 pryse weg te gee. Hulle is van voornemens om ketels en broodroosters weg te gee. Hulle besluit dat daar ten minste 10 eenhede van elkeen van die pryse sal wees. 'n Ketel kos die maatskappy R 120 en 'n broodrooster kos R 100.

Bepaal hoeveel van elke prys die goedkoopste opsie vir die maatskappy sal wees. Bereken hoeveel dié kombinasie van ketels en broodroosters sal kos.

OPLOSSING

Stap 1: Ken veranderlikes toe

In hierdie situasie is daar twee veranderlikes wat ons moet oorweeg: laat die aantal ketels k wees, en die aantal broodroosters t wees, met $k, t \in \mathbb{Z}$.

Stap 2: Organiseer die inligting

Ons kan die gegewe inligting as ongelykhede skryf:

$$\text{aantal ketels: } k \geq 10$$

$$\text{aantal broodroosters: } t \geq 10$$

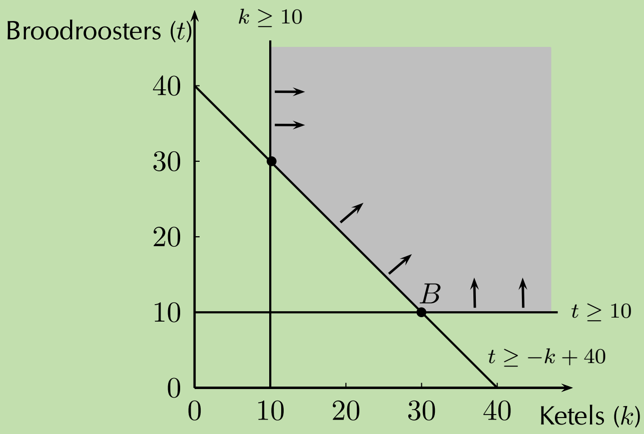
$$\text{aantal pryse: } k + t \geq 40$$

Ons maak t die onderwerp van die ongelykheid:

$$t \geq -k + 40$$

Stap 3: Oplossing deur grafieke te gebruik

Stel die beperkinge voor op 'n asse-stelsel:



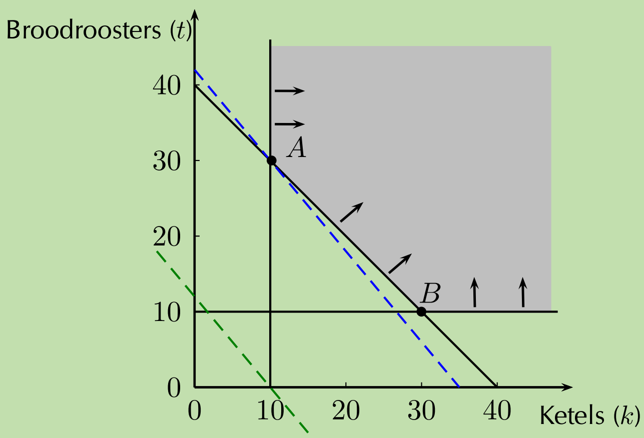
Ons kleur die gangbare gebied in soos in die diagram getoon. Onthou dat in hierdie situasie slegs die punte met heelgetal koördinate binne of op die grens van die gangbare gebied moontlike oplossings is. Die kombinasie wat die minimumkoste gee sal naby, of op die onderste grens van die gangbare gebied lê, wat ons baie punte gee om te oorweeg. Om die optimum waarde van C te vind, gebruik ons die grafiek van die doelfunksie.

$$C = 120k + 100t$$

Om die lyn te teken, maak ons t die onderwerp van die formule

$$t = -\frac{6}{5}k + \frac{C}{100}$$

Ons sien dat die gradiënt van die doelfunksie $-\frac{6}{5}$ is, maar ons weet nie wat die presiese waarde van die t-afsnit ($\frac{C}{100}$) is nie. Om die minimumwaarde van C te vind, het ons nodig om die posisie van die doelfunksie te bepaal wat die gangbare gebied raak en ook die laagste t-afsnit gee.



Ons dui die gradiënt van die doelfunksie op die grafiek aan (die groen soeklyn). Terwyl ons die gradiënt dieselfde hou, "skuif" ons die doelfunksie in die rigting van die onderste grens van die gangbare gebied, en vind dat dit die gangbare gebied eerste raak by punt $A(10;30)$. Hierdie optimum posisie van die doelfunksie word op die grafiek aangedui met die stippellyn wat deur punt A gaan.

Ons vervang die koördinate van A in die kostevergelyking $C = 120k + 100t$:

$$\begin{aligned} \text{By } A(10;30): \quad C &= 120(10) + 100(30) \\ &= \text{R } 4200 \end{aligned}$$

Die minimum koste kan ook grafies bepaal word deur die koördinate van die t-afsnit van die doelfunksie in die optimum posisie af te lees.

$$\begin{aligned} t_{\text{afsnit}} &= 42 \\ \therefore \frac{C}{100} &= 42 \\ \therefore C &= \text{R } 4200 \end{aligned}$$

Stap 4: Skryf die finale antwoord

Dus is die minimum koste aan die maatskappy R 4200 vir 10 ketels en 30 broodroosters.

Oefening 12 – 2: Optimering

1. 'n Toets wat uit twee afdelings bestaan word aan jou gegee. Die eerste afdeling handel oor algebra en die tweede afdeling oor meetkunde. Jy word nie toegelaat om meer as 10 vrae in enige afdeling te beantwoord nie, maar jy moet ten minste 4 algebra vrae beantwoord. Die tyd toegelaat is nie meer as 30 minute nie. 'n Algebra probleem sal 2 minute en 'n meetkunde probleem sal 3 minute neem om op te los.

   Gebruik x algebra vrae en y meetkunde vare in jou antwoord.

   a) Formuleer die vergelykings en ongelykhede wat die bostaande beperkinge bevredig.
   b) Die algebra vrae tel 5 elk en die meetkunde vrae tel 10 punte elk. As T die totale punte voorstel, skryf 'n uitdrukking neer vir T.

2. 'n Plaaslike kliniek wil 'n handleiding vir 'n gesonde leefstyl produseer. Hulle wil die gids in twee formate vervaardig: 'n kort video en 'n gedrukte boek. Die kliniek wil weet hoeveel van elke formaat hulle moet vervaardig om te verkoop. Skattings dui aan dat nie meer as $10\ 000$ van albei formate gesamentlik verkoop sal kan word nie. Ten minste 4000 kopieë van die video en ten minste 2000 kopieë van die boek kan verkoop word maar daar word verwag dat nie meer as 4000 boeke verkoop sal word nie. Laat x die aantal videos wees wat verkoop word en y die aantal boeke.

   a) Skryf die beperkingsongelykhede neer wat uit die gegewe inligting afgelei kan word.
   b) Stel hierdie ongelykhede grafies voor en dui die gangbare gebied duidelik aan.

c) Die kliniek wil die maksimum inkomste, I, verdien uit die verkope van die twee produkte. Elke video word verkoop vir R 50 en elke boek vir R 30. Skryf die doelfunksie vir die inkomste neer.

d) Wat is die maksimum inkomste gegenereer deur die twee gidse?

3. 'n Sekere motorfietsvervaardiger produseer twee basiese modelle, die Super X en die Super Y. Hierdie motorfietse word aan handelaars verkoop teen 'n wins van R 20 000 per Super X en R 10 000 per Super Y. 'n Super X neem 150 ure om te monteer, 50 ure om te verf en af te werk, en 10 ure vir kwaliteitsbeheer en toetsing. Die Super Y neem 60 ure om te monteer, 40 ure om te verf en af te werk, en 20 ure vir kwaliteitsbeheer en toetsing. Die totale aantal ure wat elke maand beskikbaar is, is $30\ 000$ in die monteringsafdeling, $13\ 000$ in die verf- en afwerkingsafdeling en 5000 in die kwaliteitsbeheer en toetsingsafdeling.

   Die bostaande inligting word deur die volgende tabel opgesom:

Afdeling	Ure vir Super X	Ure vir Super Y	Ure per maand beskikbaar
Montering	150	60	30 000
Verf en afwerking	50	40	13 000
Kwaliteitsbeheer en toetsing	10	20	5000

   Laat die aantal Super X modelle x en die aantal Super Y, wat per maand vervaardig word, y wees.

   a) Skryf die stel van beperkingsongelykhede neer.

   b) Gebruik grafiekpapier om die stel beperkingsongelykhede voor te stel.

   c) Kleur die gangbare gebied op die grafiekpapier in.

   d) Skryf die wins wat gemaak word neer in terme van x en y.

   e) Hoeveel motorfietse van elke model moet vervaardig word ten einde die maandelikse wins te maksimiseer?

   f) Wat is die maksimum maandelikse wins?

4. 'n Groep studente beplan om x hamburgers en y hoenderburgers by 'n rugbywedstryd te verkoop. Hulle het vleis vir op die meeste 300 hamburgers en op die meeste 400 hoenderburgers. Elke burger, van beide soorte, word in 'n sakkie verkoop. Daar is 500 sakkies beskikbaar. Die aanvraag is waarskynlik sodanig dat daar ten minste die helfte soveel hoenderburgers as hamburgers verkoop sal word.

   a) Skryf die beperkings-ongelykhede neer, en teken 'n grafiek van die gangbare gebied.

   b) 'n Wins van R 3 word gemaak op elke hamburger wat verkoop word en R 2 op elke hoenderburger. Skryf 'n vergelyking neer wat die totale wins P in terme van x en y voorstel.

   c) Die doel is om die wins te maksimiseer. Hoeveel van elke tipe hamburger moet verkoop word?

5. Fashion-Cards is 'n klein maatskappy wat twee tipes kaartjies maak: tipe X en tipe Y. Mat die beskikbare arbeid en materiaal kan die maatskappy op die meeste

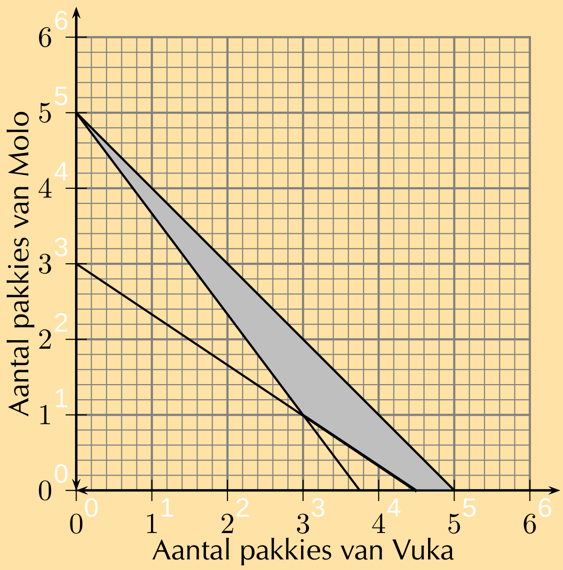
150 kaartjies van tipe X en op die meeste 120 kaartjies van tipe Y per week maak. Gesamentlik kan hulle nie meer as 200 kaartjies per week maak nie.

Daar is 'n bestelling vir ten minste 40 tipe X kaartjies en 10 tipe Y kaartjies per week. Fashion-Cards maak 'n wins van R 5 vir elke tipe X kaartjie wat verkoop, en R 10 vir elke tipe Y kaartjie.

Laat die aantal tipe X kaartjies wat per week vervaardig word x wees en die aantal tipe Y kaartjies, y.

a) Een van die beperkingsongelykhede wat die beperkings hierbo voorstel, is $0 \leq x \leq 150$. Skryf die ander beperkingsongelykhede neer.
b) Stel die beperkings grafies voor en kleur die gangbare gebied in.
c) Skryf die vergelyking neer wat die wins P (die doelfunksie), in terme van x en y.
d) Bereken die maksimum weeklikse wins.

6. Om te voldoen aan die vereistes vir 'n gespesialiseerde dieet, word 'n maaltyd berei deur twee tipes graankos, Vuka en Molo, te meng. Die mengsel bevat x pakkies van Vuka graankos en y pakkies van Molo. Die maaltyd vereis ten minste 15 g proteine en 72 g koolhidrate. Elke pakkie Vuka bevat 4 g proteine en 16 g koolhidrate. Elke pakkie Molo bevat 3 g proteine en 24 g koolhidrate. Daar is op die meeste 5 pakkies graankos beskikbaar. Die gangbare gebied is gearseer op die gepaardgaande grafiek.



a) Skryf die beperkingsongelykhede neer.
b) As Vuka ontbytgraan R 6 per pakkie kos en Molo ontbytgraan ook R 6 per pakkie kos, gebruik die grafiek om te bepaal hoeveel pakkies van elke ontbytgraan gebruik moet word sodat die totale koste van die mengsel 'n minimum is.
c) Gebruik die grafiek om te bepaal hoeveel van elke ontbytgraan gebruik moet word sodat die totale koste van die mengsel 'n maksimum is (gee alle moontlikhede).

Dink jy jy het dit? Kry oplossings en meer oefening op ons Intelligent Practice Service

1. 26PX 2. 26PY 3. 26PZ 4. 26Q2 5. 26Q3 6. 26Q4

www.everythingmaths.co.za m.everythingmaths.co.za

Oplossings vir oefeninge

1 Eksponente en wortels

Oefening 1 – 1: Die getallestelsel

1. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}'$
2. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$
4. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$
5. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}; \mathbb{Z}; \mathbb{N}_0$
6. $\mathbb{R}'\mathbb{Q}'$
7. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$
8. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}'$
9. $\mathbb{R}'$
10. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}'$
11. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$
12. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}; \mathbb{Z}$
13. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$
14. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}'$
15. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$
16. $\mathbb{R}; \mathbb{Q}; \mathbb{Z}$

Oefening 1 – 2: Eksponentwette

1. 4^{3a+3}
2. 72
3. $9p^{10}$
4. k^{2x-2}
5. $5^{2z-2} + 5^z$
6. 1
7. x^{10}
8. $\frac{b^2}{a^2}$
9. $\frac{1}{m+n}$
10. $2p^{ts}$
11. $\frac{1}{a}$
12. k
13. 2^{a+1}
14. h^4
15. $\frac{a^4b^6}{c^6d^2}$
16. 4
17. $\frac{m^2n^2}{2}$
18. 400
19. $\frac{1}{y^7}$
20. 8
21. 2^{6a+2}
22. $2pt$
23. $81q^{2s}y^{8a+2}$

Oefening 1 – 3: Rasionale eksponente en wortels

1. a) 7
   b) $\frac{1}{6}$
   c) $\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$
   d) $-\frac{4}{3}$
   e) $8x^3$
2. a) $s^{\frac{1}{6}}$
   b) $16m^4$
   c) $\frac{3}{2}m^2$
   d) 8
3. $x^{\frac{31}{16}}$

Oefening 1 – 4: Vereenvoudiging van wortelvorme

1. a) 4
   b) ab^4c^2
   c) 2
   d) xy^4

2. a) $\frac{ab}{b-a}$
   b) $-\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)$

Oefening 1 – 5: Rasionalisering van die noemer

1. $2\sqrt{5}$
2. $\frac{\sqrt{6}}{2}$
3. $\sqrt{6}$
4. $\dfrac{3\sqrt{5}+3}{4}$
5. $\dfrac{x\sqrt{y}}{y}$
6. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2}$
7. $\dfrac{3p-4\sqrt{p}}{p}$
8. $\sqrt{t}-2$
9. $\frac{1-\sqrt{m}}{1-m}$
10. $\sqrt{ab}$

Oefening 1 – 6: Oplos van wortelvormvergelykings

1. $x = 4$
2. $p = 3$
3. $y = 1$
4. $t = 3$
5. $z = 9$ of $z = \frac{1}{4}$
6. $x = 8$ of $x = -27$
7. $n = -\frac{1}{4}$
8. $d = 3$ of $d = -5$
9. $y = 1$ of $y = 81$
10. $f = 5$

Oefening 1 – 7: Toepassings van eksponentuitdrukkings

1. 9,7%
2. 4 254 691
3. 7
4. 26 893

Oefening 1 – 8: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. a) $\frac{1}{4}$
   b) $4\frac{1}{4}$
2. a) x^4
   b) s
   c) $m^{\frac{25}{3}}$
   d) $m^{\frac{8}{3}}$
   e) $-m^{\frac{8}{3}}$
   f) $81y^{\frac{16}{3}}$
3. a) $\dfrac{3b^{\frac{45}{2}}}{(a^{12}c^{\frac{5}{2}}}$
   b) $3a^3b^2$
   c) $a^{24}b^{12}$
   d) $x^{\frac{7}{2}}$
   e) $x^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}}$
4. $\dfrac{1}{x^{\frac{1}{16}}}$
5. $x-2$
6. $\dfrac{10\sqrt{x}+10}{x-1}$
7. $\dfrac{3\sqrt{x}+2x\sqrt{x}}{2x}$
8. a) $6\sqrt{2}$
   b) $7\sqrt{5}$
   c) 2
   d) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$
   e) 2
   f) $\dfrac{16\sqrt{15}}{5}$
9. a) $6+4\sqrt{2}$
   b) $6+5\sqrt{2}$
   c) $4+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$
10. a) 55
    b) 1
11. $15\sqrt{2}x^3$
12. a) $1+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$
    b) $\dfrac{2y+y\sqrt{y}-4\sqrt{y}-8}{y-4}$
    c) $2\sqrt{x}+2\sqrt{10}$
13. $\frac{3}{2}$
15. 3
16. $-\sqrt{288}$
17. a) 4
    b) $-\frac{1}{3}$
    c) 3
    d) Geen oplossing
    e) $x=\frac{1}{8}$ of $x=-8$
18. b) $x=1$

2 Vergelykings en ongelykhede

Oefening 2 – 1: Oplossing deur faktorisering

1. $t=0$ of $t=-2$
2. $y=-1$
3. $s=\pm 5$
4. $y=3$ of $y=2$
5. $y=4$ of $y=-9$
6. $p=-2$
7. $y=-3$ of $y=-8$
8. $y=6$ of $y=7$
9. $x=-7$ of $x=-2$
10. $y=4k$ of $y=k$
11. $y=9$ of $y=-9$
12. $y=\pm\sqrt{5}$
13. $h=\pm 6$
14. $y=\pm\sqrt{14}$
15. $p=-2$
16. $y=\pm 6\sqrt{2}$
17. $f=\frac{5}{2}$ of $f=-3$
18. $x=\frac{1}{4}$
19. $y=\frac{1}{7}$
20. $x\in\mathbb{R}$, $x\neq\pm 3$
21. $y=-13$ of $y=-1$
22. $t=\frac{3}{2}$ of $t=-2$
23. $m=-6$
24. $t=0$ of $t=3$

Oefening 2 – 2: Oplossing deur kwadraatsvoltooiing

1. a) $x=-5-3\sqrt{3}$ of $x=-5+3\sqrt{3}$
   b) $x=-1$ of $x=-3$
   c) $p=-4\pm\sqrt{21}$
   d) $x=-3\pm\sqrt{7}$
   e) Geen reële oplossings
   f) $t=-8\pm 3\sqrt{6}$
   g) $x=-1\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$
   h) $z=-4\pm\sqrt{22}$
   i) $z=\frac{11}{2}$ of $z=0$
   j) $z=5$ of $z=-1$
2. $k=-3\pm\sqrt{9-a}$
3. $y=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4pr}}{2p}$

Oefening 2 – 3: Oplossing met kwadratiese formule

1. $t = 1$ of $t = \frac{-4}{3}$
2. $x = \frac{5+\sqrt{37}}{2}$ of $t = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$
3. Geen reële oplossings
4. $p = \frac{1}{2}$ of $p = -1$
5. Geen reële oplossings
6. $t = \frac{-3+\sqrt{69}}{10}$ of $t = \frac{-3-\sqrt{69}}{10}$
7. $t = 2 \pm \sqrt{2}$
8. $k = \frac{7+\sqrt{373}}{18}$ of $k = \frac{7-\sqrt{373}}{18}$
9. $f = \frac{1}{2}$ of $f = -2$
10. Geen reële oplossings

Oefening 2 – 4:

1. $x = -1$, $x = -4$, $x = -2$ en $x = -3$
2. $x = 1$, $x = 4$ en $x = -2$
3. $x = -7$, $x = 4$, $x = -1$ en $x = -2$
4. $x = -4$, $x = 3$, $x = -3$ en $x = 2$
5. $x = \frac{8\pm\sqrt{40}}{4}$
6. $x = -5$, $x = 3$, $x = -1 + \sqrt{10}$ en $x = -1 - \sqrt{10}$

Oefening 2 – 5: Vind die vergelyking

1. $x^2 - x - 6 = 0$
2. $x^2 - 16 = 0$
3. $2x^2 - 5x - 3 = 0$
4. $k = 3$ en $x = \frac{3}{4}$
5. $p = 5$ en $x = -1$

Oefening 2 – 6: Gemengde oefeninge

1. $y = \frac{1}{8}$ of $y = -\frac{8}{3}$
2. $x = \frac{3}{2}$ of $x = -\frac{7}{2}$
3. $t = \frac{2}{3}$ of $t = 2$
4. $y = 1$ of $y = -1$
5. $m = 1$ of $m = 4$
6. $y = \pm\frac{5}{7}$
7. $w = \frac{3}{2}$ of $w = 4$
8. $y = \frac{6}{5}$ of $y = \frac{1}{4}$
9. $n = \frac{8}{3}$ of $n = -\frac{9}{8}$
10. $y = -\frac{8}{3}$ of $y = \frac{3}{2}$
11. $x = -\frac{1}{2}$ of $x = 3$
12. $y = -\frac{5}{2}$ of $y = -\frac{5}{9}$
13. $y = \frac{4}{5}$ of $y = \frac{1}{5}$
14. $g = -\frac{1}{4}$ of $g = 1$
15. $y = 2$ of $y = -\frac{5}{9}$
16. $p = \frac{3}{7}$ of $p = -\frac{1}{5}$
17. $y = -\frac{2}{9}$ of $y = -1$
18. $y = \frac{9}{2}$ of $y = \frac{9}{7}$

Oefening 2 – 7: Uit vorige vraestelle

1. a) Reëel, ongelyk en rasioneel
   b) Reëel en gelyk
   c) Reëel, ongelyk en irrasioneel
   d) Reëel, ongelyk en rasioneel
   e) Reëel, ongelyk en irrasioneel
   f) Nie-reëel
   g) Reëel, ongelyk en rasioneel
   h) Reëel, ongelyk en irrasioneel
   i) Nie-reëel
   j) Reëel en gelyk
2. b) Reëel en ongelyk
   c) $k = -6 \pm 2\sqrt{6}$
4. a) $k = 6$
   b) $k = \frac{1}{3}$
5. a) $k = 4$ of $k = 1$
   b) $k = 0$ of $k = 5$
6. a) Alle reële waardes van a, b en p
   b) $a = b$ en $p = 0$

Oefening 2 – 8: Oplos van kwadratiese ongelykhede

1. a) $-3 < x < 4$
   b) $x < -\frac{4}{3}$ of wanneer $x > 1$
   c) Geen reële oplossings
   d) $-1 < t < 3$
   e) Alle reële waardes van s.
   f) Alle reële waardes van x.
   g) $x \leq -\frac{1}{4}$ of $x \geq 0$
   i) $x < 3$ of $x > 6$ met $x \neq 3$
   j) $-2 \leq x \leq 2$ en $x > 7$ met $x \neq 7$
   k) $x > 0$ met $x \neq 0$
2. a) $x < -3$ of $x > 3$
   b) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$
   c) Geen oplossing
   d) Alle reële waardes van x

Oefening 2 – 9: Oplos van gelyktydige vergelykings

1. a) $(0; 5)$ en $(2; 3)$
   b) $x = 3 \pm \sqrt{2}$ en $y = 2 \pm \sqrt{2}$
   c) $(-1; 0)$ en $(\frac{1}{4}; \frac{5}{8})$
   d) $b = \dfrac{2 \pm \sqrt{88}}{6}$ en $a = \dfrac{11 \pm \sqrt{88}}{6}$
   e) $(-3; -20)$ en $(2; 0)$
   f) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{264}}{2}$ en $y = \dfrac{70 \pm \sqrt{264}}{2}$
2. a) $(-3; 8)$ en $(2; 3)$
   b) $(-4; 14)$ en $(3; 7)$
   c) $(3; 4)$ en $(4; 3)$

Oefening 2 – 10:

1. $b = 2$ m, $l = 4$ m
2. 187
3. $t = 10{,}5$ s
4. $t = 5d$; 105 minute; 1,4 km
5. 24 A; 70 W; 12 A

Oefening 2 – 11: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. $x = 1{,}62$ of $x = -0{,}62$
2. $x = \pm 4$ of $x = -1$
3. $y = 0$ of $y = \pm 1$
4. $x = \pm 2$
5. a) $x = 7$ of $x = 2$
   b) $x = 2{,}3$ of $x = -1{,}3$
   c) $x = 1{,}65$ of $x = -3{,}65$
   d) $x = 0$ of $x = -3$
6. $x = \frac{\sqrt{16+p^2}-2}{2}$
7. $a = 3$; $b = 10$ en $c = -8$
8. $p = \pm 16$
9. $x^2 + 2x - 15$
10. Ongedefiniëer: $b = -2$. Nul: $b = 2$ of $b = 3$.

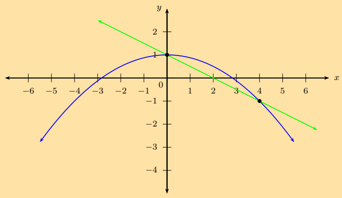
13. $a \geq 4$

14. $x = -\frac{3}{2}$ of $x = 1$

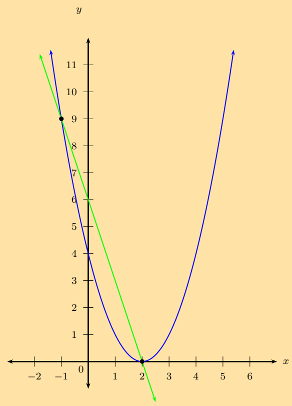
15. a) $x < 3$ of $x \geq 7$:
    b) $x < 1$ of $x > 5$:
    c) $3 < x < 7$:
    d) $x < -1$ of $x > 3$
    e) $0{,}5 < x < 2{,}5$
    f) $x \leq -3$ of $0 < x \leq \frac{5}{2}$
    g) $x < \frac{2}{3}$
    h) $-1 \leq x < 0$ of $x \geq 3$
    i) $-4 \leq x \leq 1$
    j) $2\frac{1}{2} \leq x < 3$

16. a) $x = \pm\sqrt{3}$ en $y = \pm 2\sqrt{3}$
    b) $a = -3$ en $b = -1$ of $a = 12$ en $b = 4$
    c) $x = -5$ en $y = 0$ of $x = 2$ en $y = 14$
    d) $p = \frac{5}{3}$ en $q = \frac{2}{9}$ of $p = -1$ en $q = \frac{-2}{3}$
    e) $b = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ en $a = \frac{7\pm 3\sqrt{5}}{2}$
    f) $b = \frac{-10\pm\sqrt{140}}{4}$ en $a = \frac{-12\pm\sqrt{140}}{2}$
    g) $x = 3{,}4$ en $y = 5{,}4$ of $x = 3$ en $y = 5$
    h) $b = -1{,}4$ en $a = 23{,}6$ of $b = 3$ en $a = 6$

17. a)



b)



18. 35 m

20. a) $y = -\frac{5}{4}$ of $y = -9$
    b) $x = -\frac{9}{4}$ of $x = 1$
    c) $p = -\frac{8}{7}$ of $p = -\frac{4}{3}$
    d) $y = -\frac{1}{4}$ of $y = \frac{1}{2}$
    e) $y = -\frac{2}{9}$ of $y = -1$
    f) $y = \frac{7}{3}$ of $y = -\frac{1}{2}$
    g) $y = \frac{9}{4}$ of $y = -\frac{9}{4}$
    h) $y = \frac{8}{3}$ of $y = -6$
    i) $y = \frac{9}{5}$ of $y = -7$
    j) $x = \pm 4$
    k) $y = \pm 7$

21. $k = 76$ en $\frac{4}{9}$

22. $x = 3$ of $x = -2$ en $y = \frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}$

23. $x = 4$ of $x = -1$

24. $y = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ en $p = \frac{9}{2}$, $p = \frac{7}{2}$

25. $\frac{69}{4}$

26. 7

27. $\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}$

28. $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ of $t = \frac{3\pm\sqrt{33}}{4}$

Oefening 3 – 1: Lineêre rye

1. $-19; -35; -51$
2. a) -19
   b) $T_2 = 15; T_4 = 33$
3. a) $T_n = 10 + 3n; T_{10} = 40; T_{15} = 55; T_{30} = 100$
   b) $T_n = 12 + 6n; T_{10} = 72; T_{15} = 102; T_{30} = 192$
   c) $T_n = -5 - 5n; T_{10} = -55; T_{15} = -80; T_{30} = -155$
4. $T_9 = 36$
5. a) $44; 66; 121$

Oefening 3 – 2: Kwadratiese rye

1. a) 10
   b) 2
   c) 2
   d) -2
   e) 2
   f) -4
   g) 4
   h) -2
   i) $6a$
   j) 6
   k) $2t$
2. a) $T_4 = 53$
   b) $T_2 = 30$
   c) $T_1 = 17$
   d) $T_2 = -3$
   e) $T_4 = 63$
   f) $T_1 = 2$
3. a) $3; 9; 17; 27$
   b) $-6; -9; -14; -21$
   c) $1; 8; 21; 40$
   d) $0; -5; -14; -27$

Oefening 3 – 3: Kwadratiese rye

1. a) 1
   b) 2
   c) 4
   d) 8
   e) -2
2. $12; 30; 58; 96; 144$
3. $T_9 = 379$
4. $n = 4$
5. a) $T_5 = 84; T_6 = 111$
   b) $T_n = 2n^2 + 5n + 9$

Oefening 3 – 4: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. $-4; 9; 16; 25; 36$
2. a) Kwadratiese ry
   b) Kwadratiese ry
   c) Kwadratiese ry
   d) Kwadratiese ry
   e) Kwadratiese ry
   f) Kwadratiese ry
   g) Lineêre ry
   h) Lineêre ry
   i) Kwadratiese ry
   j) Kwadratiese ry
   k) Kwadratiese ry
   l) Lineêre ry
   m) Kwadratiese ry
3. $x = 31$
4. $n = 11$
5. $T_1 1 = 363$
6. $n = 9$
7. $T_5 = 114$
8. $n = 8$
9. a) $T_5 = 19$; $T_n = 4n - 1$; $T_{10} = 39$
   b) $T_5 = -3$; $T_n = 22 - 5n$; $T_{10} = -28$
   c) $T_5 = 2\frac{1}{2}$; $T_n = \frac{1}{2}n$; $T_{10} = 5$
   d) $T_5 = a + 4b$; $T_n = a - b + bn$; $T_{10} = a + 9b$
   e) $T_5 = -7$; $T_n = 3 - 2n$; $T_{10} = -17$
10. a) $T_n = n^2 + 3$; $T_{100} = 10\ 003$
    b) $T_n = 6n - 4$; $T_{100} = 596$
    c) $T_n = 2n^2 + 5$; $T_{100} = 20\ 005$
    d) $T_n = 3n^2 + 2$; $T_{100} = 30\ 002$
11. a) $2; 5; 8; 11; 14$
    b) Konstante verskil, $d = 3$
    c) Ja
12. a) $T_n = 4n - 19$
    b) $n = 48$
13. a) Verkeerd
    b) Reg
14. c) Lineêr
15. b) Lineêr
    d) Kwadraties
    e) $T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$
    f) $T_{21} = 253$
    g) 31 cm
16. a) -1
    b) 7
17. b) 2
    c) $T_n = n^2 - n$
    d) 210
    e) 25
18. $4; 14; 34; 64; 104; 154$

4 Analitiese meetkunde

Oefening 4 – 1: Hersiening

1. a) $2\sqrt{26}$ eenhede
   b) 7 eenhede
   c) $x + 1$ eenhede
2. $p = 6$ of $p = 2$
3. a) $-\frac{1}{2}$
   b) 3
5. 2
6. a) $(1; 2)$
   b) $\left(\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right)$
7. $B(4; 2)$
8. a) $y = -4x + 3$ en $y = -4x + 19$
   c) $AD = \sqrt{17}$ eenhede en $BC = \sqrt{17}$ eenhede
   d) $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$
   e) Parallelogram (teenoorstaande sye gelyk en parallel)
9. $N(0; 3)$
10. a) $PQ = \sqrt{20}$ en $SR = \sqrt{20}$
    b) $M(\frac{3}{2}; 1)$
    d) PS: $y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$ en SR: $y = \frac{1}{2}x - 2$
    e) Nee
    f) Parallelogram

Oefening 4 – 2: Die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking

1. $y = \frac{2}{3}x + 5$
2. $y = -3x + \frac{1}{4}$
3. $y = x + 3$
4. $y = 2x - 1$
5. $y = -5$
6. $y = \frac{3}{4}x + 3$
7. $y = -x + (s + t)$
8. $y = 5x + 2$
9. $y = \frac{q}{p}x - q$

Oefening 4 – 3: Gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking

1. $y = \frac{2}{3}x + 4$
2. $y = -x - 2$
3. $y = -\frac{1}{3}x$
4. $y = 11$
5. $y = -2x + 7$
6. $x = -\frac{3}{2}$
7. $y = -\frac{4}{5}x + 1$
8. $x = 4$
9. $y = 3ax + b$

Oefening 4 – 4: Die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking

1. $y = 2x + 3$
2. $y = 4x - 4$
3. $y = -x - 1$
4. $y = -\frac{3}{7}x$
5. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}$
6. $y = 2x - 2$
7. $y = -\frac{3}{2}$
8. $y = 3x + 4$
9. $y = -5x$

Oefening 4 – 5: Inklinasiehoek

1. a) $1{,}7$
   b) -1
   c) 0
   d) $1{,}4$
   e) Ongedefiniëer
   f) 1
   g) $-0{,}8$
   h) 0
   i) $3{,}7$
2. a) $36{,}8°$
   b) $26{,}6°$
   c) $45°$
   d) Horisontale lyn
   e) $18{,}4°$
   f) Vertikale lyn
   g) $71{,}6°$
   h) $30°$

Oefening 4 – 6: Inklinasie van 'n reguitlyn

1. a) $38{,}7°$
   b) $135°$
   c) $80°$
   d) $80°$
   e) $102{,}5°$
   f) $45°$
   g) $56{,}3°$
   h) $63{,}4°$
   i) $161{,}6°$
   j) Gradiënt ongedefiniëerd
2. $85{,}2°$
3. $90°$
4. $81{,}8°$

Oefening 4 – 7: Ewewydige lyne

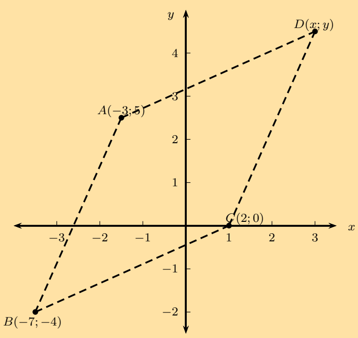
1. a) Ewewydig
   b) Ewewydig
   c) Ewewydig
   d) Nie-ewewydig
   e) Ewewydig
   f) Ewewydig
2. $y = -2x - 3$
3. $y = 3x$
4. $y = \frac{3}{2}x + 1$
5. $y = -\frac{7}{10}x - 1$

Oefening 4 – 8: Loodregte lyne

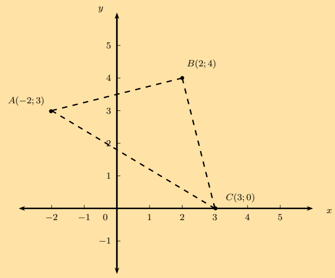
1. a) Loodreg
   b) Nie-loodreg
   c) Loodreg
   d) Loodreg
   e) Loodreg
   f) Nie-loodreg
   g) Nie-loodreg
2. $y = \frac{1}{2}x - 3$
3. $y = -5x + 3$
4. $y = -x + 2$
5. $x = -2$

Oefening 4 – 9: Einde van die hoofstuk oefeninge

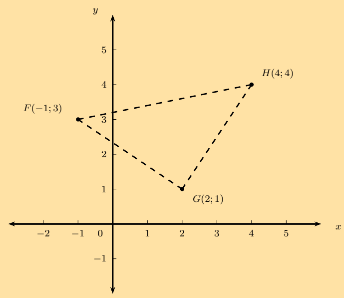
1. a) $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
   b) $y = -x + 4$
   c) $y = \frac{1}{2}x + 4$
   d) $y = 2x + 4$
   e) $y = 3x$
2. a) $\theta = 63{,}4°$
   b) $\theta = 18{,}4°$
   c) $\theta = 36{,}9°$
   d) $\theta = 146{,}3°$
   e) $\theta = 161{,}6°$
3. a) $y = -2x + 7$
   b) $\left(\frac{7}{2}; 0\right)$
   c) $\theta = 116{,}6°$
   d) $m = \frac{1}{2}$
   e) $Q\hat{P}R = 90°$
   f) $y = -2x$
   g) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$
   h) $y = -2x - \frac{1}{2}$
4. a)



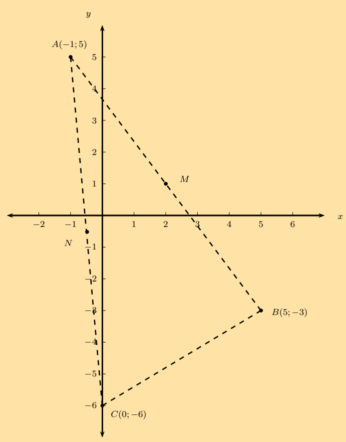
   b) $D\,(6; 9)$
5. a) $(-1; -2)$
   b) $(8; 3)$
   c) $x = -1$
   d) $MN = 5$ eenhede
   e) $M\hat{N}P = 21{,}8°$
   f) $y = \frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$
6. a)



   c) $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$
   d) $D(-1; -1)$
   e) $E\left(\frac{5}{2}; 2\right)$
7. a) $y = \frac{3}{2}x + 2$
   b) $T\hat{S}V = 49{,}6°$
8. a)

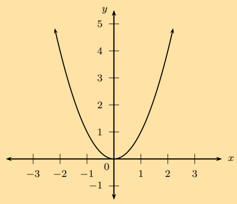


   c) $y = -5x + 11$
   d) Yes
   e) $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$
9. a)

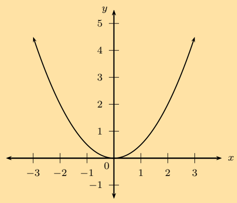


Oefening 5 – 1: Hersiening

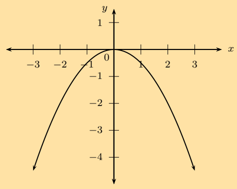
1. a)



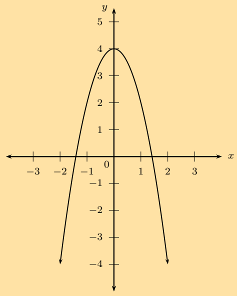
b)



c)



d)



Oefening 5 – 2: Gebied en terrein

1. $\{x : x \in \mathbb{R}\}; \{y : y \geq -1, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\{x : x \in \mathbb{R}\}; \{y : y \leq 4, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\{x : x \in \mathbb{R}\}; \{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$
4. $\{x : x \in \mathbb{R}\}; \{y : y \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\{x : x \in \mathbb{R}\}; \{y : y \leq 2, y \in \mathbb{R}\}$

Oefening 5 – 3: Afsnitte

1. $(0; 15)$ en $(-5; 0)$; $(-3; 0)$
2. $(0; 16)$ en $(4; 0)$
3. $(0; -3)$ en $(1; 0)$; $(3; 0)$
4. $(0; 35)$ en $(-\frac{7}{2}; 0)$; $(-\frac{5}{2}; 0)$
5. $(0; 37)$ en geen x-afsnitte
6. $(0; -4)$ en $(-0{,}85; 0)$; $(-2{,}35; 0)$

Oefening 5 – 4: Draaipunte

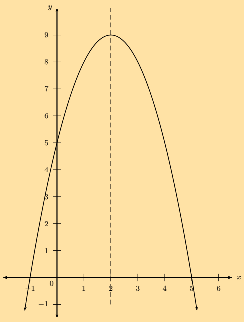
1. $(3; -1)$
2. $(2; 1)$
3. $(-2; -1)$
4. $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$
5. $(1; 21)$
6. $(-1; -6)$

Oefening 5 – 5: As van simmetrie

1. a) As van simmetrie: $x = \frac{5}{4}$
   b) As van simmetrie: $x = 2$
   c) As van simmetrie: $x = 2$
2. $y = ax^2 + q$

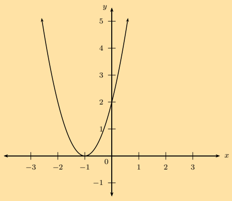
Oefening 5 – 6: Skets parabole

1. a)



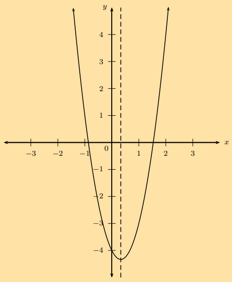
Afsnitte: $(-1; 0), (5; 0), (0; 5)$
Draaipunt: $(2; 9)$
As van simmetrie: $x = 2$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \leq 9, y \in \mathbb{R}\}$

b)



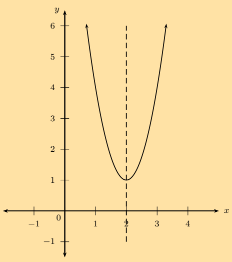
Afsnitte: $(-1; 0), (0; 2)$
Draaipunt: $(-1; 0)$
As van simmetrie: $x = -1$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

c)



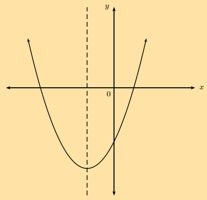
Afsnitte: $(-0{,}87; 0), (1{,}54; 0), (0; -4)$
Draaipunt: $(0{,}33; -4{,}33)$
As van simmetrie: $x = -0{,}33$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \geq 4{,}33, y \in \mathbb{R}\}$

d)

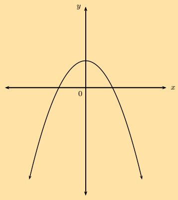


Afsnitte: $(0; 13)$ Draaipunt: $(2; 1)$
As van simmetrie: $x = 2$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \geq 1, y \in \mathbb{R}\}$

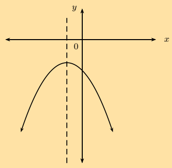
3. a)



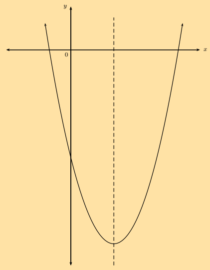
b)



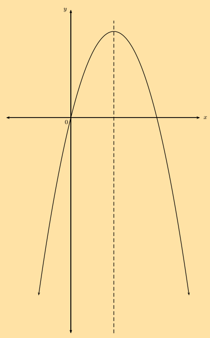
c)



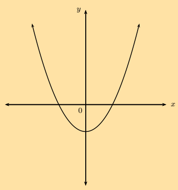
d)



e)



f)



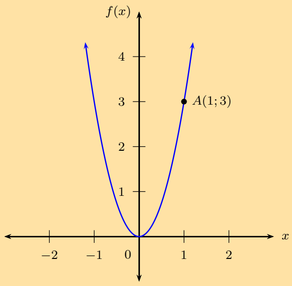
4. a) $y_{\text{geskuif}} = 2x^2 + 16x + 32$
b) $y_{\text{geskuif}} = -x^2 - 2x$
c) $y_{\text{geskuif}} = 3x^2 - 16x + 22$

Oefening 5 – 7: Vind die vergelyking

1. $y = -3(x+1)^2 + 6$ of $y = -3x^2 - 6x + 3$
2. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x$
3. $y = \frac{2}{3}(x+2)^2$
4. $y = -x^2 + 3x + 4$

Oefening 5 – 8:

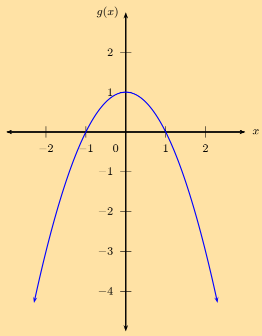
1. a) 11
2. a)



b) 6

c) $y = 6x - 3$

3. a)



b) 1

c) 4

d) 0

Oefening 5 – 10: Gebied en terrein

1. $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$; $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 1\}$
2. $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 8\}$; $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 4\}$
3. $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$; $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq -3\}$
4. $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 5\}$; $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 3\}$
5. $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -2\}$; $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$

Oefening 5 – 11: Afsnitte

1. $(0; -1\frac{3}{4})$ en $\left(-3\frac{1}{2}; 0\right)$
2. $\left(\frac{5}{2}; 0\right)$
3. $(0; 1)$ en $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$
4. $(0; \frac{3}{2})$ en $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$
5. $(0; 2)$ en $(8; 0)$

Oefening 5 – 12: Asimptote

1. $y = -2$ en $x = -4$
2. $y = 0$ en $x = 0$
3. $y = 1$ en $x = 2$
4. $y = -8$ en $x = 0$
5. $y = 0$ en $x = 2$

Oefening 5 – 13: As van simmetrie

1. a) Vir $f(x)$: $(0;0)$; $y_1 = x$ en $y_2 = -x$
   Vir $g(x)$: $(0;1)$; $y_1 = x + 1$ en $y_2 = -x + 1$
   b) Vir $f(x)$: $(0;0)$; $y_1 = x$ en $y_2 = -x$
   Vir $g(x)$: $(-1;0)$; $y_1 = x + 1$ en $y_2 = -x - 1$
   c) Vir $f(x)$: $(0;0)$; $y_1 = x$ en $y_2 = -x$
   Vir $g(x)$: $(1;-1)$; $y_1 = x - 2$ en $y_2 = -x$
2. $k(x) = \frac{5}{x+1} + 2$

Oefening 5 – 14: Skets grafieke

1. a) Asimptote: $x = 0$; $y = 2$
   Afsnitte: $\left(-\frac{1}{2};0\right)$
   As van simmetrie: $y = x + 2$ en $y = -x + 2$
   Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$
   Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$
   b) Asimptote: $x = -4$; $y = -2$
   Afsnitte: $\left(-3\frac{1}{2};0\right)$ en $\left(0;-1\frac{3}{4}\right)$
   As van simmetrie: $y = x + 2$ en $y = -x - 6$
   Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -4\}$
   Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq -2\}$
   c) Asimptote: $x = -1$; $y = 3$
   Afsnitte: $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ en $(0;2)$
   As van simmetrie: $y = x + 4$ en $y = -x + 2$
   Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$
   Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 3\}$
   d) Asimptote: $x = -2\frac{1}{2}$; $y = -2$
   Afsnitte: $(0;0)$
   As van simmetrie: $y = x - 4\frac{1}{2}$ en $y = -x + \frac{1}{2}$
   Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -4\}$
   Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq -2\}$
   e) Asimptote: $x = 8$; $y = 4$
   Afsnitte: $(6;0)$ en $(0;3)$
   As van simmetrie: $y = x - 4$ en $y = -x + 12$
   Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 8\}$
   Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 4\}$
2. $y = \frac{1}{x+2} - 1$
3. $y = -\frac{4}{x} + 2$
4. a)
   b) Gemiddelde gradiënt $= 1$
   c) Gemiddelde gradiënt $= 12$

Oefening 5 – 16: Gebied en terrein

1. $\{x : x \in \mathbb{R}\}$; $\{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\}$
2. $\{x : x \in \mathbb{R}\}$; $\{y : y < 1, y \in \mathbb{R}\}$
3. $\{x : x \in \mathbb{R}\}$; $\{y : y > -3, y \in \mathbb{R}\}$
4. $\{x : x \in \mathbb{R}\}$; $\{y : y > n, y \in \mathbb{R}\}$
5. $\{x : x \in \mathbb{R}\}$; $\{y : y > 2, y \in \mathbb{R}\}$

Oefening 5 – 17: Afsnitte

1. $(0;-6)$ en $(2;0)$
2. $(0;-17\frac{1}{3})$ en $(3;0)$
3. $(0;-20)$ en $(-1;0)$
4. $(0;\frac{15}{16})$ en $(-2;0)$

Oefening 5 – 18: Asimptoot

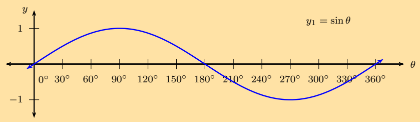
1. $y = 0$
2. $y = 1$
3. $y = -\frac{2}{3}$
4. $y = -2$
5. $y = -2$

Oefening 5 – 19: Gemengde oefeninge

1. b) i. $y = \frac{3}{x} + 3$
   ii. $y = \frac{3}{x-3}$
   iii. $y = -\frac{3}{x}$
   iv. $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{4}$
   v. $y = \frac{3}{x} + 4$
   vi. $y = \frac{3}{x+2} - 1$
2. a) $M(-2; 2)$
   b) $g(x) = \frac{-4}{x}$
   c) $f(x) = 2(x+1)^2$
   d) $-2 < x < 0$
   e) Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$
3. a) Vir $k(x)$:
   Afsnitte: $(-2; 0), (1; 0)$ en $(0; -4)$
   Draaipunt: $\left(-\frac{1}{2}; -4\frac{1}{2}\right)$
   Asimptoot: geen
   Vir $h(x)$:
   Afsnitte: $(1{,}41; 0)$
   Draaipunt: geen
   Asimptoot: $y = 0$
6. a) $f(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^2 + 3$;
   As van simmetrie: $x = 2$;
   Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$;
   Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \leq 3\}$
   b) $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$;
   As van simmetrie: $x = 0$;
   Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$;
   Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq -2\}$; $h(x) = \frac{2}{x}$;
   As van simmetrie: $y = x$
   Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x < 0\}$;
   Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y < 0\}$;
   c) $k(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2}$; Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$;
   Terrein: $\left\{y : y \in \mathbb{R}, y > \frac{1}{2}\right\}$
7. b) $p = 9$
   c) Gemiddelde gradiënt $= -2\frac{8}{9}$
   d) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 2$
8. a) $f(x) = 2^x - \frac{3}{2}$ en $g(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$
   b) $h(x) = -\frac{3}{x+2} + 1$
9. a) $AO = 2$ eenhede $OB = 5$ eenhede
   $OC = 10$ eenhede
   $DE = 12{,}25$ eenhede
   b) $DE = 12\frac{1}{4}$
   c) $h(x) = -2x + 10$
   d) $\{x : x \in \mathbb{R}, x < -2$ en $x > 5\}$
   e) $\{x : x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 5\}$
   f) 5,25 eenhede

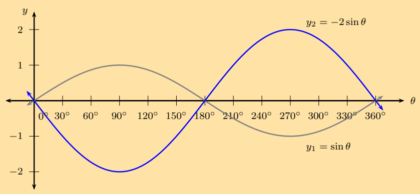
Oefening 5 – 20: Hersiening

1.



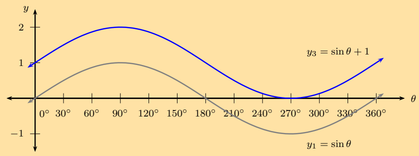
Periode: $360°$
Amplitude: 1
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-1; 1]$
x-afsnitte: $(0°; 0)$; $(180°; 0)$; $(360°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Maks. draaipunt: $(90°; 1)$
Min. draaipunt: $(270°; -1)$

2.



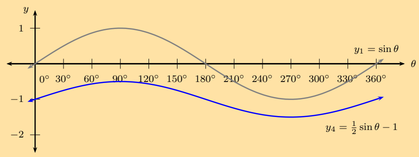
Periode: $360°$
Amplitude: 2
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-2; 2]$
x-afsnitte: $(0°; 0)$; $(180°; 0)$; $(360°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Maks. draaipunt: $(270°; 2)$
Min. draaipunt: $(90°; -2)$

3.



Periode: $360°$
Amplitude: 1
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[0; 2]$
x-afsnitte: $(270°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 1)$
Maks. draaipunt: $(90°; 2)$
Min. draaipunt: $(270°; 0)$

4.



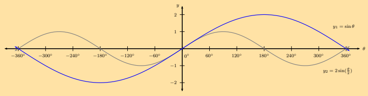
Periode: $360°$
Amplitude: $\frac{1}{2}$
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}]$
x-afsnitte: none
y-afsnitte: $(0°; -\frac{1}{2})$
Maks. draaipunt: $(90°; \frac{1}{2})$
Min. draaipunt: $(270°; -\frac{3}{2})$

Oefening 5 – 21: Sinusfunksies van die vorm $y = \sin k\theta$

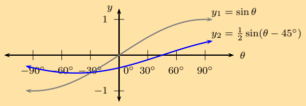
2. a) $k = 2$ b) $k = -\frac{3}{4}$

Oefening 5 – 23: Die sinusfunksie

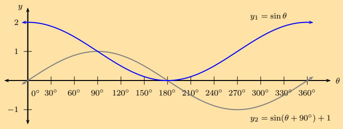
1. a)



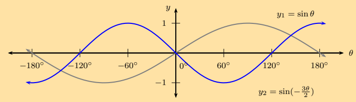
b)



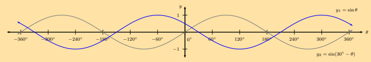
c)



d)



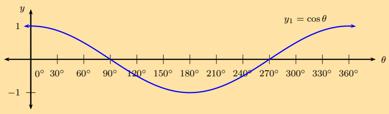
e)



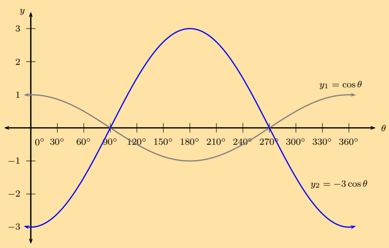
2. $a = 2$; $p = 90°$ $\therefore y = 2\sin(\theta + 90°)$ en $y = 2\cos\theta$

Oefening 5 – 24: Hersiening

1.

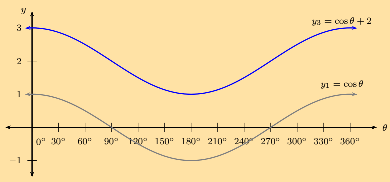


2.



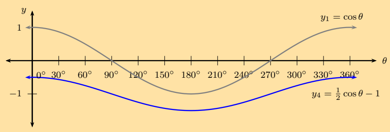
Periode: $360°$
Amplitude: 1
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-3; 3]$
x-afsnitte: geen
y-afsnitte: $(0°; 3)$
Maks. draaipunt: $(0°; 3)$; $(360°; 3)$
Min. draaipunt: $(180°; -3)$

3.



Periode: $360°$
Amplitude: 1
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[1; 3]$
x-afsnitte: geen
y-afsnitte: $(0°; 3)$
Maks. draaipunt: $(0°; 3)$; $(360°; 3)$
Min. draaipunt: $(180°; 1)$

4.



Periode: $360°$
Amplitude: $\frac{1}{2}$
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}]$
x-afsnitte: geen
y-afsnitte: $(0°; -\frac{1}{2})$
Maks. draaipunt: $(0°; -\frac{1}{2})$; $(360°; -\frac{1}{2})$
Min. draaipunt: $(180°; -\frac{3}{2})$

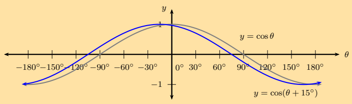
Oefening 5 – 25: Kosinusfunksies van die vorm $y = \cos k\theta$

2. a) $k = \frac{3}{2}$

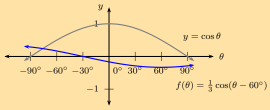
b) $k = \frac{2}{3}$

Oefening 5 – 27: Die kosinusfunksie

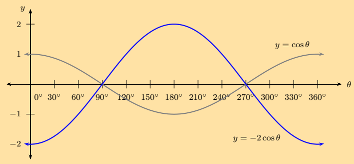
1. a)



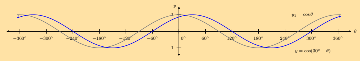
b)



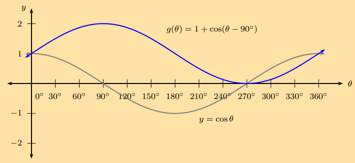
c)



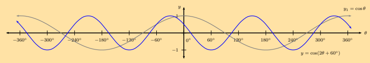
d)



e)



f)



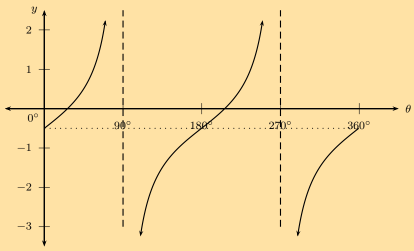
2. a) $a = -1$

b) $p = -180°$

c) $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$

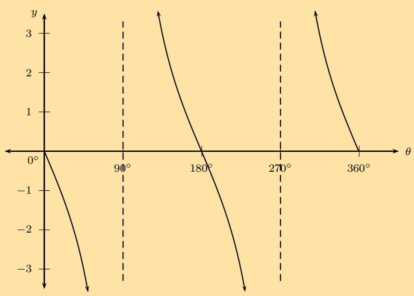
Oefening 5 – 28: Hersiening

1.



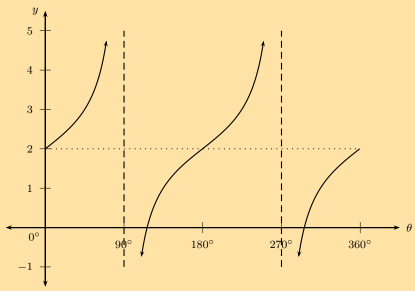
Periode: $180°$
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(26{,}6°; 0); (206{,}6°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; -\frac{1}{2})$
Asimptote: $90°; 270°$

2.



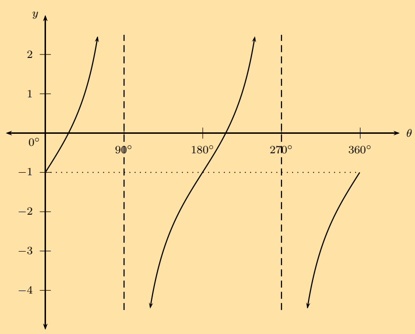
Periode: $180°$
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(0°; 0); (180°; 0); (360°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Asimptote: $90°; 270°$

3.



Periode: $180°$
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(116{,}6°; 0); (296{,}6°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 2)$
Asimptote: $90°; 270°$

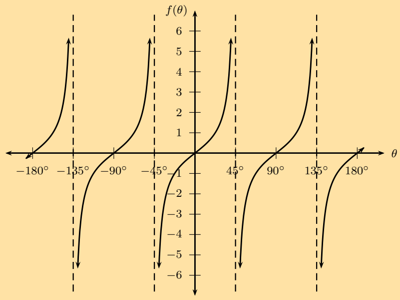
4.



Periode: $180°$
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(26{,}6°; 0); (206{,}6°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; -1)$
Asimptote: $90°; 270°$

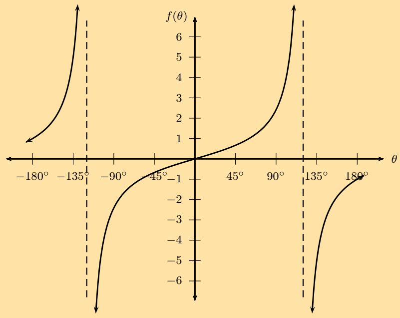
Oefening 5 – 29: Tangensfunksies van die vorm $y = \tan k\theta$

1.



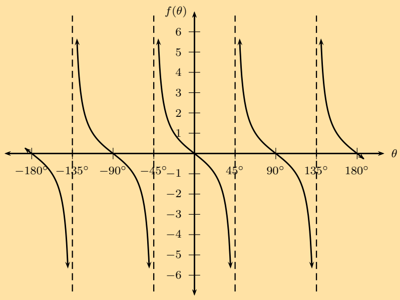
Periode: $90°$
Gebied: $[-180°; 180°]$ Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-180°; 0)$; $(-90°; 0)$; $(0°; 0)$; $(90°; 0)$; $(180°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Asimptote: $-135°$; $-45°$; $45°$; $135°$

2.



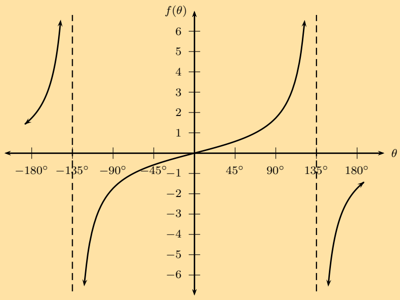
Periode: $240°$
Gebied: $[-180°; 180°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(0°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Asimptote: $-120°$; $120°$

3.



Periode: $90°$
Gebied: $[-180°; 180°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-180°; 0)$; $(-90°; 0)$; $(0°; 0)$; $(90°; 0)$; $(180°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Asimptote: $-135°$; $-45°$; $45°$; $135°$

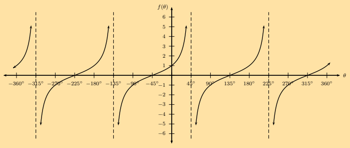
4.



Periode: $270°$
Gebied: $[-180°; 180°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(0°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Asimptote: $-135°$; $135°$

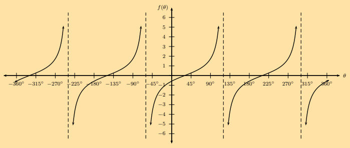
Oefening 5 – 30: Tangensfunksies van die vorm $y = \tan(\theta + p)$

1.



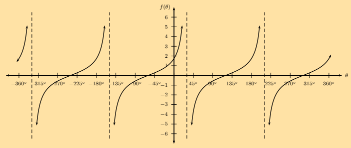
Periode: 180°
Gebied: $[-360°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-225°; 0)$; $(-45°; 0)$; $(135°; 0)$; $(315°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Asimptote: $-315°$; $-135°$; $45°$; $225°$

2.



Periode: 180°
Gebied: $[-360°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-330°; 0)$; $(-150°; 0)$; $(30°; 0)$; $(210°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; -0{,}58)$
Asimptote: $-315°$; $-135°$; $45°$; $225°$

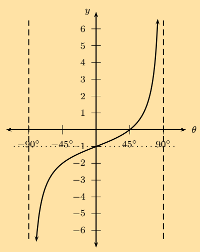
3.



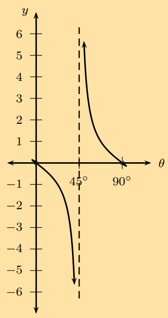
Periode: 180°
Gebied: $[-360°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-240°; 0)$; $(-60°; 0)$; $(120°; 0)$; $(300°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 1.73)$
Asimptote: $-330°$; $-150°$; $30°$; $210°$

Oefening 5 – 31: Die tangensfunksie

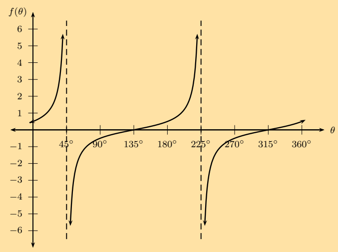
1. a)



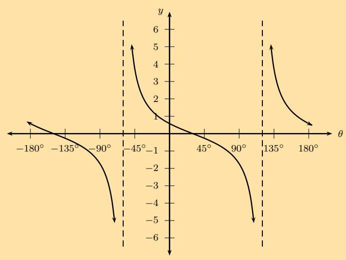
b)



c)



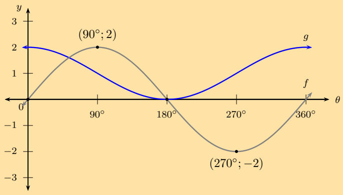
d)



2. $a = -1$; $k = \frac{1}{2}$

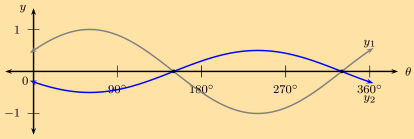
Oefening 5 – 32: Gemengde oefeninge

1. a) $f(\theta) = \frac{3}{2}\sin 2\theta$ en $g(\theta) = -\frac{3}{2}\tan\theta$
   b) $f(\theta) = -2\sin\theta$ en $g(\theta) = 2\cos(\theta + 360°$
   c) $y = 3\tan\frac{\theta}{2}$
   d) $y = y = 2\cos\theta + 2$
2. a)



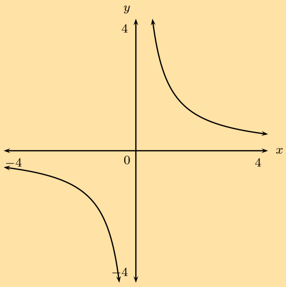
   b) 360°

   c) 1
   d) By $\theta = 180°$
3. a) $a = 2$, $b = -1$ en $c = 240°$
   b) 180°
   c) $\theta = 60°; 300°$
   d) $y = -\tan(\theta - 45°)$
4.

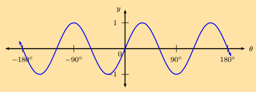


Oefening 5 – 33: Einde van die hoofstuk oefeninge

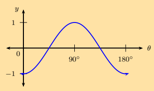
2. $a = -2$; $k = -1$
4. a) $y = x + 2^2 + 2$
   b) $y = x - 1^2 + 5$
5. $(-1; 0)$
6.



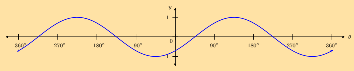
   $y = \frac{2}{x-3} - 1$
7. $y = \frac{1}{(x-1)} + 2$
9. a) $a = -1$
   b) $f(-15) = 0{,}99997$
   c) $x = -1$
   d) $h(x) = -2^{(x-2)} + 1$
10. a) $a = 256$
    b) $f(x) = 256\left(\frac{3}{4}\right)^x$
    c) $f(13) = 6{,}08$
11. a)



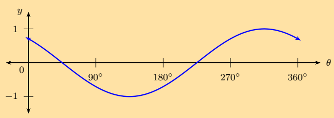
    b)



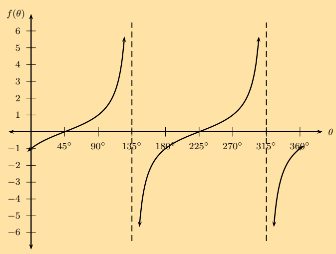
    d)



    e)



    f)



Oefening 6 – 1: Hersiening

1. a) Waar
   b) Waar
   c) Vals
   d) Waar
2. a) $50{,}2^\circ$
   b) $40{,}5^\circ$
   c) $26{,}6^\circ$
   d) $109{,}8^\circ$
   e) Geen oplossing
   f) $17{,}7^\circ$
   g) $69{,}4^\circ$
3. a) 17,3 cm
   b) 10 cm
   c) $64{,}8^\circ$
4. a) 10 cm
   b) 5,2 cm en 19,3 cm
   c) 50 cm^2
5. a) 2
   b) 0
   c) $-1\frac{1}{2}$
   d) 1
   e) 1
6. a) 60°
   b) $\frac{1}{2}$
   c) 1
7. Nee

Oefening 6 – 2: Trigonometriese identiteite

1. a) $\cos\alpha$
   b) $\tan^2\theta$
   c) $\cos^2\theta$
   d) 0

Oefening 6 – 3: Reduksieformules vir funksiewaardes van $180^\circ \pm \theta$

1. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
   b) $\frac{1}{8}$
   c) 1
2. a) $\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}$
   b) -1
3. a) $2t$
   b) $-\frac{1}{t}$

Oefening 6 – 4: Gebruik reduksieformules

1. a) $-\tan\theta$
   b) 1
   c) 1
2. $-\cos\beta$
3. a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
   b) 2
   c) 2
   d) $-\frac{3}{2}$
   e) $-\frac{4\sqrt{3}}{5}$
5. a) $-t$
   b) $1-t^2$
   c) $\pm\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

Oefening 6 – 5: Ko-funksies

1. a) $\cos\theta$
   b) $\frac{3}{2}$
2. a) p
   b) $\sqrt{1-p^2}$
   c) $-\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}$
   d) p

Oefening 6 – 6: Reduksieformules

1. a) $\sin^2\theta$
   b) $\cos^2\theta$
   c) i. 1
      ii. $\tan^2\theta$
2. a) $\sin 17°$
   b) $\cos 33°$
   c) $\tan 68°$
   d) $-\cos 33°$
3. a) $\sqrt{3}$
   b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
   c) $\frac{1}{4}$
   d) 1

Oefening 6 – 7: Oplos van trigonometriese vergelykings

1. a) $\alpha = 60°; 300°$
   b) $\alpha = 220{,}5°; 319{,}5°$
   c) $\alpha = 79{,}2°; 259{,}2°$
   d) $\alpha = 200{,}1°; 339{,}9°$
   e) $\alpha = 36{,}9°; 143{,}1°$
   f) $\alpha = 109{,}7°; 289{,}7°$
2. a) $\theta = -323{,}1°; -216{,}9°; 36{,}9°; 143{,}1°$
   b) $\theta = -221{,}4°; -138{,}6°; 138{,}6°; 221{,}4°$
   c) $\theta = -278{,}5°; -98{,}5°; 81{,}5°; 261{,}5°$
   d) $\theta = -90°; 270°$
   e) $\theta = -293{,}6°; -66{,}4°; 66{,}4°; 293{,}6°$

Oefening 6 – 8: Algemene oplossing

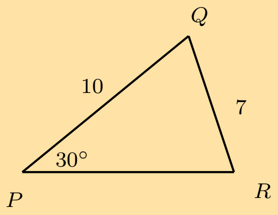
1. a) $\theta = -128{,}36°; -101{,}64°; 51{,}64°$
   b) $\theta = -80{,}45°; -9{,}54°; 99{,}55°; 170{,}46°$
   c) $\theta = -53{,}27°; 126{,}73°$
   d) $\alpha = 0°$
   e) $\theta = -180°; 0°; 180°$
   f) $\theta = -180°; 180°$
   g) $\theta = 84°$
   h) $\theta = -120°; 120°$
   i) $\theta = -60°; -30°; 120°; 150°$
2. a) $\theta = -20° + n\ .\ 360°$
   b) $\alpha = 30° + n\ .\ 120°$
   c) $\beta = 10{,}25° + n\ .\ 45°$ of
      $\beta = 55{,}25° + n\ .\ 45°$
   d) $\alpha = 70° + n\ .\ 360°$ of
      $\alpha = 340° + n\ .\ 360°$
   e) $\theta = 140° + n\ .\ 240°$ of
      $\theta = 220° + n\ .\ 240°$
   f) $\beta = 15° + n\ .\ 180°$

Oefening 6 – 9: Oplos van trigonometriese vergelykings

1. a) $\theta = 45° + k\ .\ 180°$ of
      $\theta = 135° + k\ .\ 180°$
   b) $\alpha = 50° + k\ .\ 360°$ of
      $\alpha = 110° + k\ .\ 360°$
   c) $\theta = 60° + k\ .\ 720°$ of
      $\theta = 660° + k\ .\ 720°$
   d) $\beta = 146{,}6° + k\ .\ 180°$
   e) $\theta = 110{,}27° + k\ .\ 360°$ of
      $\theta = 249{,}73° + k\ .\ 360°$
   f) $\alpha = 210° + k\ .\ 360°$ of
      $\alpha = 330° + k\ .\ 360°$
   g) $\beta = 23{,}3° + k\ .\ 120°$
   h) $\theta = 122° + k\ .\ 180°$
   i) $\alpha = 21° + k\ .\ 180°$ of
      $\alpha = 39{,}5° + k\ .\ 90°$
   j) $\beta = 22{,}5° + k\ .\ 90°$
2. $\theta = 0°, 180°, 210°, 330°$ or $360°$
3. a) $\theta = 120° + k\ .\ 360°$ of
      $\theta = 240° + k\ .\ 360°$
   b) $\theta = 0° + k\ .\ 180°$ of
      $\theta = 146{,}3° + k\ .\ 180°$
   c) $\alpha = 36{,}9° + k\ .\ 360°$ of
      $\alpha = 143{,}1° + k\ .\ 360°$ of
      $\alpha = 216{,}9° + k\ .\ 360°$ of
      $\alpha = 323{,}1° + k\ .\ 360°$
   d) $\beta = 15° + k\ .\ 120°$ of
      $\beta = 75° + k\ .\ 120°$
   e) $\alpha = 48{,}4° + k\ .\ 180°$
   f) $\theta = 63{,}4° + k\ .\ 180°$ of
      $\theta = 116{,}6° + k\ .\ 180°$
   g) $\theta = 54{,}8° + k\ .\ 180°$ of
      $\theta = 95{,}25° + k\ .\ 180°$
4. $\beta = -70{,}5°$ of $\beta = 109{,}5°$

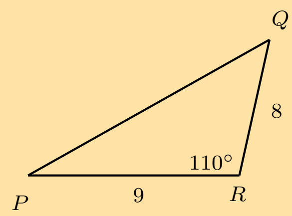
Oefening 6 – 10: Die areareël

1. a)



Area $\triangle PQR = 17{,}5$ vierkante eenhede

b)



Area $\triangle PQR = 33{,}8$ vierkante eenhede

2. Area $\triangle XYZ = 645{,}6$ vierkante eenhede
3. Area $= 106{,}5$ vierkante eenhede
4. $\hat{C} = 72{,}2°$ of $\hat{C} = 107{,}8°$

Oefening 6 – 11: Sinusreël

1. a) $\hat{P} = 92°, q = 6{,}6, p = 7{,}4$
   b) $\hat{L} = 87°, l = 1{,}3, k = 0{,}89$
   c) $\hat{B} = 76{,}8°, b = 94{,}3, c = 91{,}3$
   d) $\hat{Y} = 84°, y = 60, z = 38{,}8$
2. $\hat{B} = 32°, AB = 23, BC = 39$
3. $ST = 78{,}1$ km
4. $m = 26{,}2$
5. $BC = 3{,}2$

Oefening 6 – 12: Die kosinusreël

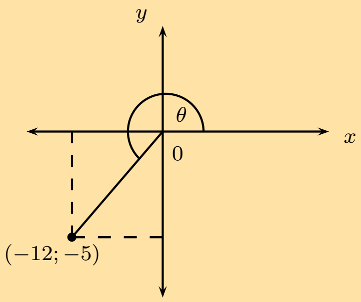
1. a) $a = 8{,}5, \hat{C} = 83{,}9°, \hat{B} = 26{,}1°$
   b) $\hat{R} = 120°, \hat{S} = 32{,}2°, \hat{T} = 27{,}8°$
   c) $\hat{M} = 27{,}7°, \hat{L} = 40{,}5°, \hat{K} = 111{,}8°$
   d) $h = 19{,}1, \hat{J} = 18{,}2°, \hat{K} = 31{,}8°$
   e) $\hat{D} = 34°, \hat{E} = 44{,}4°, \hat{F} = 101{,}6°$
2. a) $x = 4{,}4$ km
   b) $y = 63{,}5$ cm
3. a) $\hat{K} = 117{,}3°$
   b) $\hat{Q} = 78{,}5°$

Oefening 6 – 13: Area-, sinus- en kosinusreël

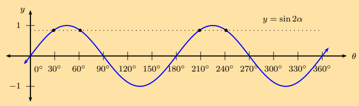
1. a) 7,78 km
   b) 6 km
2. $XZ = 1{,}73$ km, $XY = 0{,}87$ km
3. a) 1053 km
   b) 4,42°
4. $DC = \frac{x \sin a \sin(b+c)}{\sin(a+c) \sin b}$
5. b) 438,5 km
6. 9,38 m^2
7. $DC = \frac{x \sin \alpha}{\sin \beta}$

Oefening 6 – 14: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. $\sin^2 A$
2. $1\frac{1}{4}$
3. $\cos\alpha$
4. 3
7. a) -1
   b) $\theta = 135°$ of $\theta = 315°$
8. a)



   b) $-\frac{5}{13}$ en $\frac{12}{13}$
   c) $\theta = 202{,}62°$
9. a) $a = 1$ en $b = -\sqrt{3}$
   b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
10. a) $x = 50{,}9°$ of $x = 309{,}1°$
    b) $x = 127{,}3°$ of $x = 307{,}3°$
    c) $x = 26{,}6°; 153{,}4° 206{,}6°$ of $333{,}4°$
11. a) $x = 55° + k\ .\ 360°$ of
    $x = 175° + k\ .\ 360°$
    b) $x = 180° + k\ .\ 360°$
12. a) $x = 28{,}6° + k\ .\ 180°$ of
    $x = 61{,}4° + k\ .\ 180°$
    b)



    c) $28{,}6°; 61{,}4°; 208{,}6°; 241{,}4°$
13. a) $A\hat{G}N = \alpha - \beta$
    b) $\hat{A} = 90° - \alpha$
    d) $H = 5$ m
14. a) $AC = 9{,}43$ m
    b) $AD = 6{,}2$ m
    c) Area $= 49{,}25$ m^2
    d) Area $= 49{,}23$ m^2

7 Meting

Oefening 7 – 1: Area van 'n poligoon

1. b) 240 cm
   c) $0{,}6$ m^2
   e) Hout: $233{,}2$ cm en papier: $0{,}6$ m^2
2. a) 25π eenhede^2
   b) 20π eenhede^2
3. a) $1{,}2$ m^2
   b) Perimeter: $414{,}8$ cm; Area $11\ 700$ cm^2
   c) 108×108cm^2

Oefening 7 – 2: Berekening van buite-oppervlakte

1. 273 cm^2
2. Ja

Oefening 7 – 3: Bereken volume

1. a) $67{,}5$ m^2
   b) $3{,}39\ \ell$
2. b) $13{,}86$ cm
   c) $554{,}24$ m^3

Oefening 7 – 4: Vind buite-oppervlakte en volume

1. a) 120 cm^2
   b) 124 cm^3
   c) 40
   d) i. 120 mm
      ii. 165 mm
      iii. 589 mm

Oefening 7 – 5: Die effek van k

1. a) halveer
   b) Ongeveer 50 keer groter
2. a) $0{,}5W^3$
   b) $0{,}93 \times W$

Oefening 7 – 6: Einde van die hoofstuk oefeninge

2. a en d
3. a) Driehoekige prisma
   b) Driehoekige piramide
   c) Rombiese prisma
4. a) i. 856 cm^2
      ii. Reghoekige prisma
      iii. 960 cm^3
   b) 600 cm^2
5. $\sqrt{5}x^2$
6. a) 72 000 cm^3
   b) $H = 54$ cm en $h = 60{,}2$ cm
   c) 12 732 cm^2
7. Nee
8. a) 10 cm × 10 cm × 10 cm
   b) 12,6 cm
9. a) Volume verdrievoudig
   b) Buite-oppervlakte ×9
   c) Volume ×27

8 Euklidiese meetkunde

Oefening 8 – 1: Loodregte lyn van die middelpunt halveer die koord

1. $x = \sqrt{41}$
2. $x = \sqrt{84}$
3. $x = 10$ eenhede
4. $TU = 2{,}66$ eenhede
5. $x = 3{,}6$ eenhede

Oefening 8 – 2: Hoek by die middelpunt van die sirkel is tweemaal die hoek by die omtrek

1. $b = 90°$
2. $c = 22{,}5°$
3. $d = 200°$
4. $e = 55°$
5. $f = 120°$

Oefening 8 – 3: Onderspande hoeke in die sirkelsegment

1. a) $a = 21°$
   b) $c = 24°$ $d = 78°$
   c) $d = 28°$
2. a) $e = 85°$
3. $f = 35°$

Oefening 8 – 4: Koordevierhoeke

1. a) $a = 93°, b = 74°$
   b) $a = 114°$
   c) $a = 29°$

Oefening 8 – 5: Raaklyne aan 'n sirkel

1. $d = 9{,}4$ cm
2. $e = 2{,}5$ cm
3. $f = 3$ cm

Oefening 8 – 6: Raaklyn-koord stelling

1. a) $a = 33°, b = 33°$
   b) $c = 72°, d = 54°$
   c) $f = 38°, g = 47°$
   d) $l = 48°$
   e) $i = 40°, j = 101°, k = 40°$
   f) $m = 56°, n = 34°, o = 56°$
   g) $p = 38°, q = 52°, r = 90°$
2. $a = 26°, b = 64°, c = 128°$

Oefening 8 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. a) $\hat{A} = x$
   b) $C\hat{O}D = 2x$
   c) $\hat{D} = 90° - x$
   e) $\hat{C} = 90° - x$
2. a) $\hat{D}_1 = 78°$
   b) $\hat{M}_1 = 39°$
   c) $\hat{F}_2 = 51°$
   d) $\hat{G} = 58°$
   e) $\hat{E}_1 = 32°$
3. a) $\hat{D}_2 = x$
   b) $O\hat{A}B = x$
   c) $O\hat{B}A = x$
   d) $A\hat{O}B = 180° - 2x$
4. a) $OM = 3$ cm
   b) $AM = 8$ cm
   c) $AB = 4\sqrt{5}$cm
5. $x = 35°$
6. a) $R\hat{Q}S, Q\hat{S}O$
   b) $P\hat{O}S = 2x$
7. a) $O\hat{D}C = 35°$
   b) $C\hat{O}D = 110°$
   c) $C\hat{B}D = 55°$
   d) $B\hat{A}D = 90°$
   e) $A\hat{D}B = 45°$
8. $x = 4y$
10. $OQ = 17$ mm
11. a) $Q\hat{R}P, Q\hat{S}P, R\hat{S}T$
    b) $S\hat{R}T = 80°, S\hat{T}R = 30°, P\hat{Q}S = 30°$
    d) $P\hat{M}Q = 110°$
13. a) $90° - \frac{x}{2}$
    b) $\frac{x}{2}$
    c) $90° - \frac{x}{2}$
14. c) $90° - 2x$
    d) $AO = 13$ cm

Oefening 9 – 1: Hersiening

1. R 13 630
2. R 10 246,59
3. a) R 2536
   b) R 2468,27
4. 9,38%
5. 4,56%

Oefening 9 – 2: Enkelvoudige verval

1. R 112 000
2. R 941,18
3. 11,66%
4. 7 jare

Oefening 9 – 3: Saamgestelde depresiasie

1. R 23 766,73
2. 2229 rietduikers
3. R 131 072
4. 132 221
5. 7,62 kg
6. R 85 997,13

Oefening 9 – 4: Om i te bepaal

1. 14,9%
2. 16,4%
3. 12,0%
4. 9,4%

Oefening 9 – 5: Tydlyne

1. R 38 588,25
2. R 35 308,00
3. R 2600
4. R 19 950,62
5. R 1 149 283,50
6. R 7359,83

Oefening 9 – 6: Nominale en effektiewe rentekoerse

1. a) 12,6%
   b) 15,5%
   c) 22,1%
2. a) 16,8%; 17,7%; 17,5%
   b) 17,7%
   c) 16,8%
3. 9,1%
4. 9,4%
5. a) 9,42% is die beste koers.
   b) 9,38%
   c) 9,52%

Oefening 9 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. a) R 246 400
   b) R 265 599,87
2. R 229,92
3. a) R 8800
   b) 18,1%
4. R 238 191,17
5. a) 7,44%
   b) R 148 826,15
   c) R 135 968,69
6. a) R 8042,19
   b) 26,82%
8. a) 11,3%
   b) 11,1%
   c) 11,0%
9. R 322 580,65
10. a) 4,7%
    b) 4,8%
11. R 212 347,69

10 Waarskynlikheid

Oefening 10 – 1: Hersiening

1. $\frac{y}{r+b+y}$
2. $\frac{5}{12}$
3. $\frac{3}{8}$
4. 3
6. 5
7. a) $\frac{1}{6}$
   b) $\frac{8}{21}$
8. a) $\frac{4}{9}$
   b) $\frac{5}{9}$
   c) $\frac{1}{9}$
   d) $\frac{8}{9}$
   e) $\frac{5}{9}$
   f) $\frac{4}{9}$
9. a) $\frac{24}{116} \approx 0{,}21$
   b) $\frac{65}{116} \approx 0{,}56$
   c) 0
   d) $\frac{21}{29} \approx 0{,}72$
10. 0,28

Oefening 10 – 2: Venndiagram hersiening

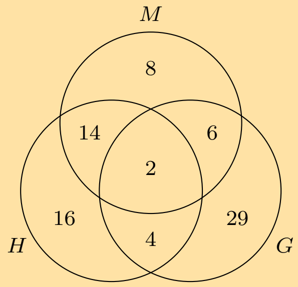
1. 0,5
2. 0,7
3. 0,18

Oefening 10 – 3: Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse

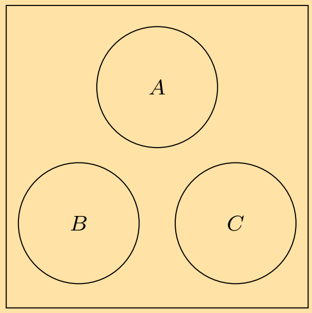
1. a) nie-wedersyds eksklusief
   b) afhanklik
2. a) $\frac{17}{30}$
   b) $\frac{11}{30}$
   c) Ja
   d) Nee
3. onafhanklik en nie-wedersyds eksklusief

Oefening 10 – 4: Venndiagramme

1. a) $\frac{9}{40}$
   b) $\frac{3}{5}$
   c) $\frac{1}{10}$
   d) afhanklik
2. $P(Z \text{ en nie } (X \text{ of } Y)) = \frac{4}{25}$
3. a)



   b) 6
   c) 29
   d) 2
4.



Oefening 10 – 5: Boomdiagramme

1. $\frac{7}{36}$
2. $\frac{671}{1296}$
3. a) $\frac{1}{4}$
   b) $\frac{5}{16}$
4. a) $\frac{1}{4}$
   b) $\frac{5}{16}$

Oefening 10 – 6: Gebeurlikheidstabelle

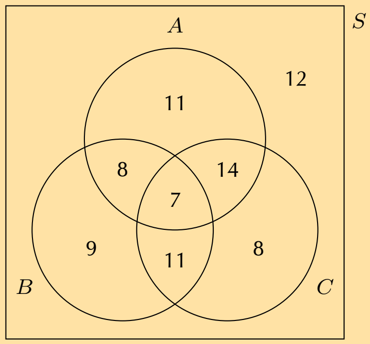
1. a) $\frac{5}{8}$
   b) $\frac{8}{23}$
   c) $\frac{12}{23}$
   d) afhanklik
2. Die gebeurtenisse is of 'n bus vanaf Plek A vertrek of nie; en of 'n bus laat vertrek of nie.

   Die gebeurtenisse is afhanklik.
3.

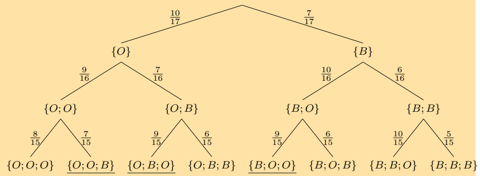
	A	nie A	Totale
B	14	6	20
nie B	21	9	30
Totale	35	15	50

Oefening 10 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. 0,68
2. 0,24
3. a) Die steekproef is die uitkoms wanneer 'n spesifieke model en kleur motor vanuit die steekproefruimte gekies word.
   Die steekproefruimte is {pienk model A; lemmetjiegroen model A; pers model A; pers model B; oranje model B; veelkleurig model B}.
   b) 1
   c) 0
4. 0,57
5. a) 0,38
   b) 0,7
   c) 0,69
   d) 0,69
   e) 0,3
6. a) $\frac{3}{5}$
   b) $\frac{1}{2}$
   c) $\frac{1}{10}$
   d) 0
   e) $\frac{2}{5}$
   f) $\frac{9}{10}$
7. a)



   b) 12
   c) 8
   d) $\frac{17}{20}$
8. a) $h = 0{,}3$
   b) $h = 0{,}5$
9. a) 0,434
   b) 0,182
   c) 0,47
10.



$P(\text{twee oranje balle}) = \frac{63}{136}$

11.

	Durban	Bloemfontein	Totale
Bly lekker daar	130	30	160
Bly nie lekker daar nie	140	200	340
Totale	270	230	500

Die gebeurtenisse is afhanklik.

12.

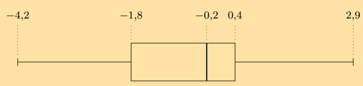
	Multivitamine A	Multivitamine B	Totale
Verbetering	400	300	700
Geen verbetering	140	120	260
Totale	540	420	960

Multivitamine A is meer effektief.

11 Statistiek

Oefening 11 – 1: Hersiening

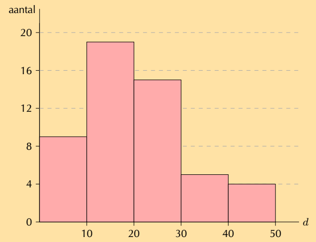
1. a) gemiddeld = $-4{,}3$; eerste kwartiel = $-6{,}2$; tweede kwartiel = $-3{,}4$; derde kwartiel = $-2{,}9$.
   b) gemiddeld = $-5{,}6$; eerste kwartiel = -60; tweede kwartiel = -6; derde kwartiel = 65.
   c) gemiddeld = 18,5; eerste kwartiel = 7; tweede kwartiel = 11,5; derde kwartiel = 33.
2. reikwydte = 9,6; inter-kwartielwydte = 2,51.
3.



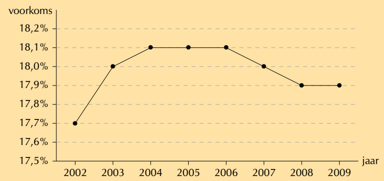
Oefening 11 – 2: Histogramme

1. a) 170 miljoen
   b) neem toe
   c) 3 miljoen

2.



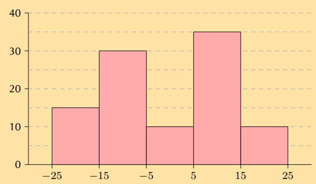
3.



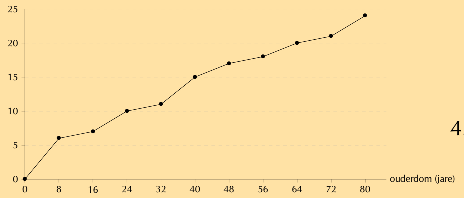
Oefening 11 – 3: Ogiewe

1. a) 20
   b) 15
   c) 60%

2.



3. a)



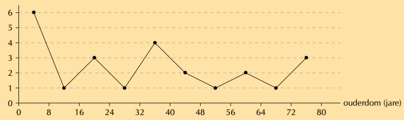
b) 11 mense

c) 19 mense

d) 34

e) 25,5

f)



4. e) 49,25

   f) 49,7

Oefening 11 – 4: Variansie en standaardafwyking

1. a) Kaapstad: 3,84. Durban: 3,82.
   b) Kaapstad: 0,121. Durban: 0,184.
   c) Kaapstad

2. Gemiddeld = 270,7. Variansie = 27 435,2.

3. Gemiddeld = −1,95. Variansie = 127,5.

4. a) 10,4
   b) 0,27
   c) 3

5. 13 en 20

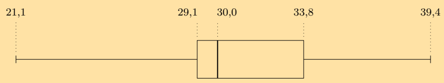
Oefening 11 – 5: Simmetriese en skewe data

1. skeef na links

2. a) skeef na regs
   b) skeef na regs
   c) skeef na links
   d) simmetries

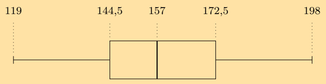
Oefening 11 – 6: Uitskieters

1. a)



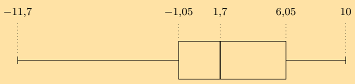
Daar is twee uitskieters aan die linkerkant.

b)



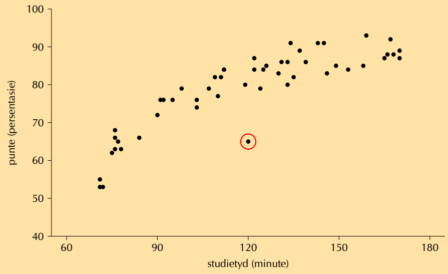
Daar is geen uitskieters nie.

c)



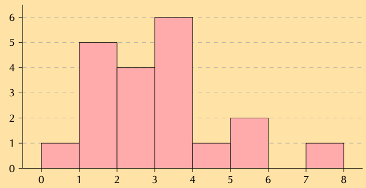
Daar is een uitskieter aan die linkerkant.

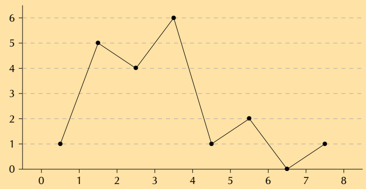
2.

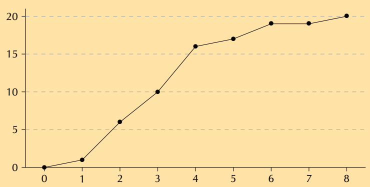


Oefening 11 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

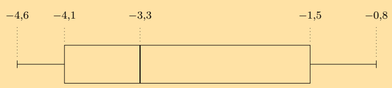
1.







2.



skeef na regs

3. a) Gemiddeld = $11\frac{3}{8}$. Standaardafwyking = 6,69.

   b) Gemiddeld = $5\frac{3}{8}$. Standaardafwyking = 2,33.

   c) Daar is geen uitskieters nie.

4. a) Gemiddeld = R 12 497,50. Standaardafwyking = R 1768,55.

   b) 4

   c) Gemiddeld = R 12 997,50. Standaardafwyking = R 1768,55.

   d) Gemiddeld = R 13 747,25. Standaardafwyking = R 1945,41.

   e) 4

   f) 10%

5. a) 14

   b) ongeveer 88 kg.

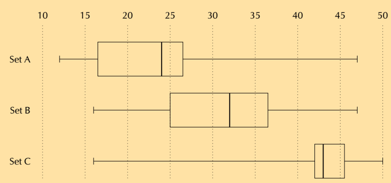
   c) 75

6. a) A. Gemiddeld = 23,83. Vyf-getal opsomming = [12 ; 16,5 ; 24 ; 26,5 ; 47].

   B. Gemiddeld = 31,17. Vyf-getal opsomming = [16 ; 25 ; 32 ; 36,5 ; 47].

   C. Gemiddeld = 41,83. Vyf-getal opsomming = [16 ; 42 ; 43 ; 45,5 ; 50].

   b)



   c) Set A: skeef na links. Set B: effens skeef na links. Set C: skeef na regs.

Oefening 12 – 2: Optimering

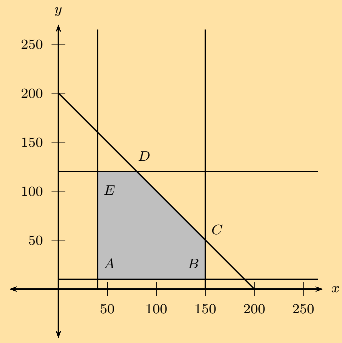
1. a) $x \leq 10$; $y \leq 10$; $x \geq 4$; $2x + 3y \leq 30$
   b) $T = 5x + 10y$

2. a) $x + y \leq 10\ 000$; $x \geq 4000$; $y \geq 2000$; $y \leq 4000$
   c) $I = 50x + 30y$
   d) R 460 000

3. a) $150x + 60y \geq 30\ 000$; $50x + 40y \geq 13\ 000$; $(10)x + (20)y \geq 5000$
   d) $E = (20\ 000)x + (10\ 000)y$
   e) 140 Super X en 150 Super Y
   f) R 4 300 000

4. a) $x \leq 300$; $y \geq 0.5x$; $x + y \leq 500$
   b) $P = (3)x + (2)y$
   c) 300 hamburgers en 200 hoenderburgers

5. a) $x \leq 150; y \leq 120; x + y \leq 200; x \geq 40; y \geq 10$
   b)



   c) $P = (5)x + (10)y$
   d) 80 van kaartjie X en 120 van kaartjie Y

6. a) $4x + 3y \geq 15$; $16x + 24y \geq 72$; $x + y \leq 5$
   b) 3 pakkies Vuka en 1 pakkies Molo
   c) $0; 5$ of $5; 0$

CAPS UITGAWE

GRAAD 11 WISKUNDE

GESKRYF DEUR VRYWILLIGERS

HIERDIE HANDBOEK IS BESKIKBAAR OP JOU SELFOON

Hierdie handboek is beskikbaar op die web, mobi-web en Mxit.
Lees, oefen slim en sien oplossings by m.everythingmaths.co.za

ISBN 978-1-920423-79-7

SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING