WEERGAWE 1 CAPS

GRAAD 11 WISKUNDE

GESKRYF DEUR VRYWILLIGERS

EVERYTHING SCIENCE
DEUR
SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

ONDERWYSERSGIDS

basic education
Department:
Basic Education
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

METROPOLITAN

EVERYTHING MATHS

GRAAD 11 WISKUNDE

ONDERWYSERSGIDS

WEERGAWE 1 CAPS

DEUR SIYAVULA EN VRYWILLIGERS

LYS VAN SKRYWERS

Siyavula Onderwys

Siyavula Onderwys is a sosiale onderneming wat in 2012 met kapitaal en ondersteuning van die **PSG Group Beperk** en die **Shuttleworth Stigting** gestig is. Die Everything Maths and Science reeks is deel van 'n groeiende versameling van hulpbronne geskep en vryliks beskikbaar gestel is deur Siyavula. Vir meer inligting oor die skryf en verspreiding van hierdie titels besoek :

www.siyavula.com
info@siyavula.com
021 469 4771

Siyavula Skrywers

Alison Jenkin; Marina van Zyl; Dr. Carl Scheffler

Siyavula en DBE span

Neels van der Westhuizen; Leonard Gumani Mudau; Ewald Zietsman; Bridget Nash; Pertunia Mpho Letwaba; Josephine Mamaroke Phatlane; William Buthane Chauke; Nicola du Toit; Heather Williams

Siyavula en Free High School Science Text bydraers

Dr. Mark Horner; Dr. Samuel Halliday; Dr. Sarah Blyth; Dr. Rory Adams; Dr. Spencer Wheaton

Iesrafeel Abbas; Sarah Abel; Dr. Rory Adams; Andrea Africa; Wiehan Agenbag; Matthew Amundsen; Ben Anhalt; Prashant Arora; Amos Baloyi; Bongani Baloyi; Raymond Barbour; Caro-Joy Barendse; Richard Baxter; Tara Beckerling; Tim van Beek; Mariaan Bester; Jennifer de Beyer; Dr. Sarah Blyth; Sebastian Bodenstein; Martin Bongers; Thinus Booysen; Gareth Boxall; Stephan Brandt; Hannes Breytenbach; Alexander Briell; Wilbur Britz; Graeme Broster; Craig Brown; Michail Brynard; Deanne de Bude; Richard Burge; Bianca BˆHmer; Jan Buys; George Calder-Potts; Eleanor Cameron; Mark Carolissen; Shane Carollisson; Richard Case; Sithembile Cele; Alice Chang; Richard Cheng; Fanny Cherblanc; Dr. Christine Chung; Brett Cocks; RochÈ Compaan; Willem Conradie; Stefaan Conradie; Rocco Coppejans; Tim Craib; Andrew Craig; Tim Crombie; Dan Crytser; Jock Currie; Dr. Anne Dabrowski; Laura Daniels; Gareth Davies; Sandra Dickson; Sean Dobbs; Buhle Donga; William Donkin; Esmi Dreyer; Matthew Duddy; Christel Durie; Fernando Durrell; Dr. Dan Dwyer; Frans van Eeden; Alexander Ellis; Tom Ellis; Andrew Fisher; Giovanni Franzoni; Olivia Gillett; Ingrid von Glehn; Tamara von Glehn; Lindsay Glesener; Kevin Godby; Dr. Vanessa Godfrey; Terence Goldberg; Dr. Johan Gonzalez; Saaligha Gool; Hemant Gopal; Dr. Stephanie Gould; Umeshree Govender; Heather Gray; Lynn Greeff; Jaco Greyling; Martli Greyvenstein; Carine Grobbelaar; Suzanne GrovÈ; Dr. Tom Gutierrez; Brooke Haag; Kate Hadley; Alex Hall; Dr. Sam Halliday; Asheena Hanuman; Dr. Melanie Dymond Harper; Ebrahim Harris; Dr. Nicholas Harrison; Neil Hart; Nicholas Hatcher; Jason Hayden; Laura Hayward; Dr. William P. Heal; Pierre van Heerden; Dr. Fritha Hennessy; Dr. Colleen Henning; Shaun Hewitson; Millie Hilgart; Grant Hillebrand; Nick Hobbs; Chris Holdsworth; Dr. Benne Holwerda; Dr. Mark Horner; Robert Hovden; Mfandaidza Hove; Jennifer Hsieh; George Hugo; Laura Huss; Prof. Ed Jacobs

Hester Jacobs; Stefan Jacobs; Rowan Jelley; Grant Jelley; Clare Johnson; Francois Jooste; Luke Jordan; Tana Joseph; Corli Joubert; Dr. Fabian Jutz; Brian Kamanzi; Herman Kamper; Dr. Lutz Kampmann; Simon Katende; Natalia Kavalenia; Rabia Khan; Nothando Khumalo; Paul Kim; Lizl King; Melissa Kistner; Dr. Jennifer Klay; Andrea Koch; Grove Koch; Bishop Komolafe; Dr. Timo Kriel; Lara Kruger; Sihle Kubheka; Andrew Kubik; Luca Lategan; Dr. Jannie Leach; Nkoana Lebaka; Dr. Marco van Leeuwen; Dr. Tom Leinster; Ingrid Lezar; Henry Liu; Christopher Loetscher; Linda Loots; Michael Loseby; Bets Lourens; Chris Louw; Amandla Mabona; Malothe Mabutho; Stuart Macdonald; Dr. Anton Machacek; Tshepo Madisha; Batsirai Magunje; Dr. Komal Maheshwari; Michael Malahe; Masoabi Malunga; Kosma von Maltitz; Masilo Mapaila; Bryony Martin; Nicole Masureik; Jacques Masuret ; John Mathew; Dr. Will Matthews; Chiedza Matuso; JoEllen McBride; Nikolai Meures; Margaretha Meyer; Riana Meyer; Filippo Miatto; Jenny Miller; Rossouw Minnaar; Abdul Mirza; Colin Mkhize; Mapholo Modise; Carla Moerdyk; Tshwarelo Mohlala; Relebohile Molaoa; Marasi Monyau; Asogan Moodaly; Jothi Moodley; Robert Moon; Calvin Moore; Bhavani Morarjee; Kholofelo Moyaba; Nina Gitau Muchunu; Christopher Muller; Helgard Muller; Johan Muller; Caroline Munyonga; Alban Murewi; Kate Murphy; Emmanuel Musonza; Tom Mutabazi; David Myburgh; Johann Myburgh; Kamie Naidu; Nolene Naidu; Gokul Nair; Vafa Naraghi; Bridget Nash; Eduan NaudÈ; Tyrone Negus; Theresa Nel; Huw Newton-Hill; Buntu Ngcebetsha; Towan Nothling; Dr. Markus Oldenburg; Adekunle Oyewo; Thomas OíDonnell; Dr. Jaynie Padayachee; Poveshen Padayachee; Masimba Paradza; Quinton Paulse; Dave Pawson; Justin Pead; Carli Pengilly; Nicolette Pekeur; Joan Pienaar; Petrus Pieter; Sirika Pillay; Jacques Plaut; Jaco du Plessis; Barry Povey; Barry Povey; Andrea Prinsloo; David Prinsloo; Joseph Raimondo; Sanya Rajani; Alastair Ramlakan; Thinus Ras; Dr. Matina J. Rassias; Ona Rautenbach; Dr. Jocelyn Read; Jonathan Reader; Jane Reddick; Robert Reddick; Dr. Matthew Reece; Chris Reeders; Razvan Remsing; Laura Richter; Max Richter; Sean Riddle; Dr. David Roberts; Christopher Roberts; Helen Robertson; Evan Robinson; Christian Roelofse; Raoul Rontsch; Dr. Andrew Rose; Katie Ross; Jeanne-MariÈ Roux; Karen Roux; Mark Roux; Bianca Ruddy; Heinrich Rudman; Nitin Rughoonauth; Katie Russell; Steven Sam; Jason Avron Samuels; Dr. Carl Scheffler; Nathaniel Schwartz; Duncan Scott; Christo van Schalkwyk; Rhoda van Schalkwyk; Helen Seals; Relebohile Sefako; Prof. Sergey Rakityansky; Sandra Serumaga-Zake; Paul Shangase; Cameron Sharp; Ian Sherratt; Dr. James Short; Cho Hee Shrader; Roger Sieloff; Brandon Sim; Bonga Skozana; Clare Slotow; Bradley Smith; Greg Solomon; Nicholas Spaull; Hester Spies; Dr. Andrew Stacey; Dr. Jim Stasheff; Mike Stay; Nicol Steenkamp; Dr. Fred Strassberger; Mike Stringer; Stephanie Strydom; Abdulhuck Suliman; Masixole Swartbooi; Tshenolo Tau; Tim Teatro; Ben Thompson; Shen Tian; Xolani Timbile; Liezel du Toit; Nicola du Toit; Dr. Francois Toerien; RenÈ Toerien; Dr. Johan du Toit; Robert Torregrosa; Jimmy Tseng; Pieter Vergeer; Rizmari Versfeld; Nina Verwey; Mfundo Vezi; Mpilonhle Vilakazi; Wetsie Visser; Alexander Volkwyn; Mia de Vos; Dr. Karen Wallace; John Walmsley; Helen Waugh; Leandra Webb; Dr. Dawn Webber; Michelle Wen; Dr. Rufus Wesi; Francois Wessels; Wessel Wessels; Neels van der Westhuizen; Sabet van der Westhuizen; Dr. Alexander Wetzler; Dr. Spencer Wheaton; Vivian White; Dr. Gerald Wigger; Harry Wiggins; Heather Williams; Wendy Williams; Julie Wilson; Timothy Wilson; Andrew Wood; Emma Wormauld; Dr. Sahal Yacoob; Jean Youssef; Ewald Zietsman; Johan Zietsman; Marina van Zyl

TITEL BORG

Hierdie handboek is ontwikkel met 'n borgskap van MMI Holdings.

MMI FOUNDATION

Goedgestruktureerde, betekenisvolle korporatiewe sosiale beleggings kan op 'n positiewe manier bydra tot nasiebou en só lei tot positiewe veranderings in gemeenskappe. MMI se verbintenis tot beleggings in die gemeenskap beteken ons is deurentyd op soek na geleenthede waarop ons sommige van Suid-Afrika se mees weerlose burgers kan help en ondersteun om hul horisonne te verbreed en om groter toegang te kry tot al die geleenthede wat die lewe bied.

Dit beteken ons beskou nie beleggings wat in die gemeenskap gemaak word as net 'n bonus of bemarkingstrategie of borgskap nie. Ons beskou dit as ín kritieke en noodsaaklike deel in ons bydrae tot die samelewing. Die samesmelting tussen Metropolitan en Momentum is geprys omdat hierdie twee maatskappye mekaar goed aanvul. Die goeie samewerking kom ook duidelik na vore in die fokusgebiede van die korporatiewe sosiale beleggingsprogramme waarin Metropolitan en Momentum gesamentlik belê in sowel die belangrikste bedrywe as daar waar die grootste behoefte is in terme van sosiale deelname.

MIV/vigs raak toenemend 'n bestuurbare siekte in baie ontwikkelde lande, maar in 'n land soos ons sín is dit steeds ín toestand waaraan mense steeds onnodig sterf. Metropolitan se ander fokusgebied is opvoeding en dit bly die hoeksteen van ekonomiese vooruitgang in ons land.

Momentum se fokus op mense met gestremdhede verseker dat hierdie gemeenskap ingesluit is by en toegelaat word om hul bydrae tot die samelewing te lewer. Weerlose en weeskinders is nog ín fokusgebied vir Momentum en projekte wat deur hulle ondersteun word verseker dat kinders die kans kry om veilig groot te word.

momentum METROPOLITAN

EVERYTHING MATHS AND SCIENCE

Die Everything Mathematics en Science-reeks sluit handboeke in vir Wiskunde, Wiskundige Geletterdheid, Fisiese Wetenskappe en Lewenswetenskappe.

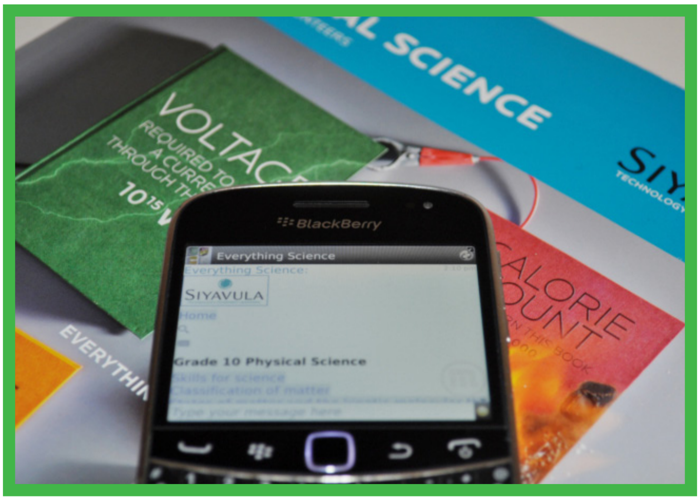
Die Siyavula Everything Science Fisiese Wetenskappe-handboeke

Die Siyavula Everything Maths Wiskunde-handboeke

LEES OP JOU SELFOON

MOBI WEBBLAD

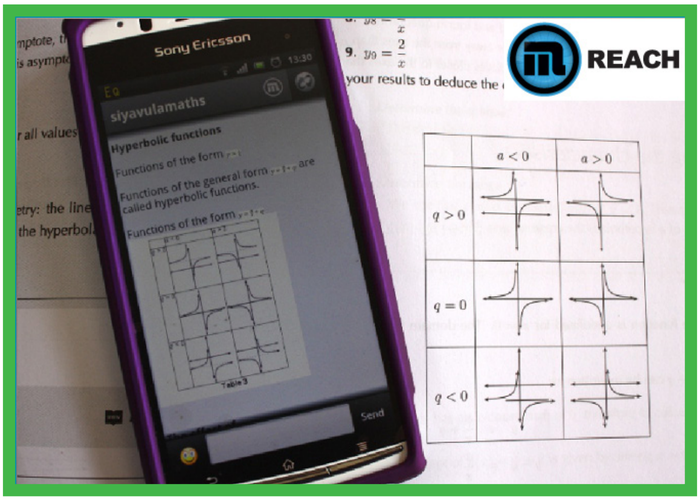
Jy kan hierdie boek en al die ander titels in die Everything Maths en Science-reeks op jou selfoon lees. Besoek die webblad by:



m.everythingmaths.co.za en ***m.everythingscience.co.za***

MXIT

Alle Mxit-gebruikers kan hierdie handboeke op Mxit lees deur Everything Maths en Everything Science by hulle lys van kontakte te voeg of dit binne Mxit Reach kry.

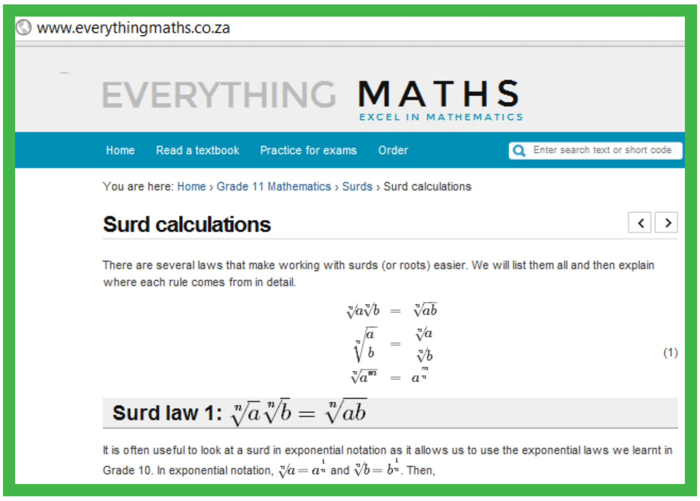


mxit>tradepost>reach>education>everything maths of ***everything science***

DIGITALE HANDBOEKE

• *LEES AANLYN*

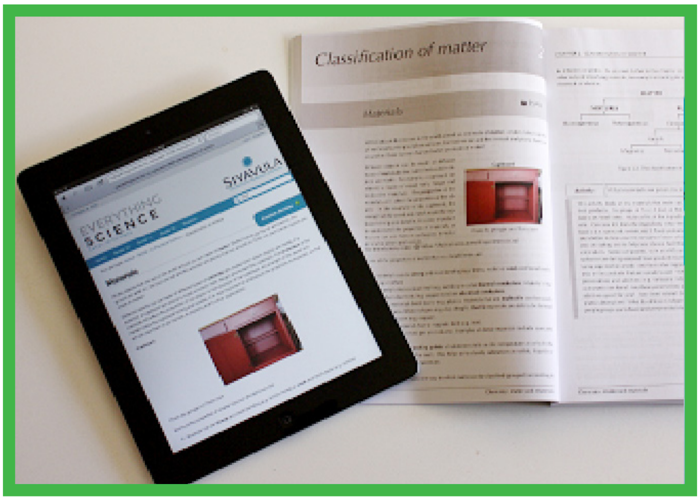
Die aanlynweergawe van die handboek bevat videos, aanbiedings, simulasies en ten volle uitgewerkte oplossings vir die vrae en oefeninge in die boek.



www.everythingmaths.co.za en ***www.everythingscience.***

• *LAAI OP JOU TABLET AF*

Jy kan 'n digitale weergawe van die Everything Series-handboeke aflaai om aflyn te lees op jou persoonlike rekenaar, tabletrekenaar, iPad of Kindle. Besoek Everything Maths en Everything Science se webblaaie om die boek af te laai.

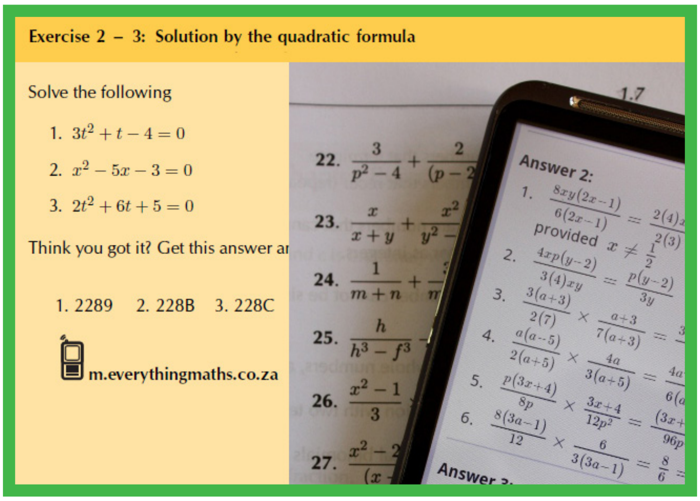


www.everythingmaths.co.za en ***www.everythingscience.co.za***

OEFEN SLIM

- ## *GAAN JOU ANTWOORDE OP JOU SELFOON*

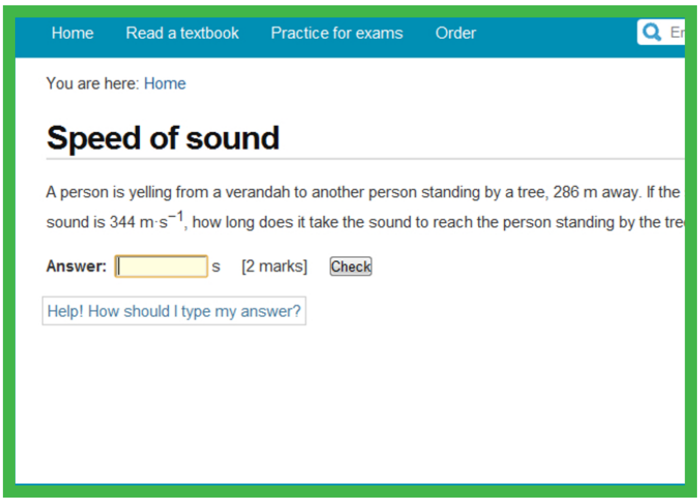
Jy kan jou antwoorde vir enige van die vrae in hierdie handboek op jou selfoon nagaan deur die kode vir die oefening in te tik op die mobi of webblad.



m.everythingmaths.co.za en ***m.everythingscience.co.za***

- ## *OEFEN VIR TOETSE EN EKSAMENS OP JOU SELFOON*

Jy moet oefen om goed te kan doen in toetse en eksamens. Gebruik die oefeninge in hierdie handboek, en ook die bykomende oefeninge en vorige eksamenvrae wat beskikbaar is op ***m.everythingmaths.co.za*** en ***m.everythingscience.co.za*** en Mxit Reach.

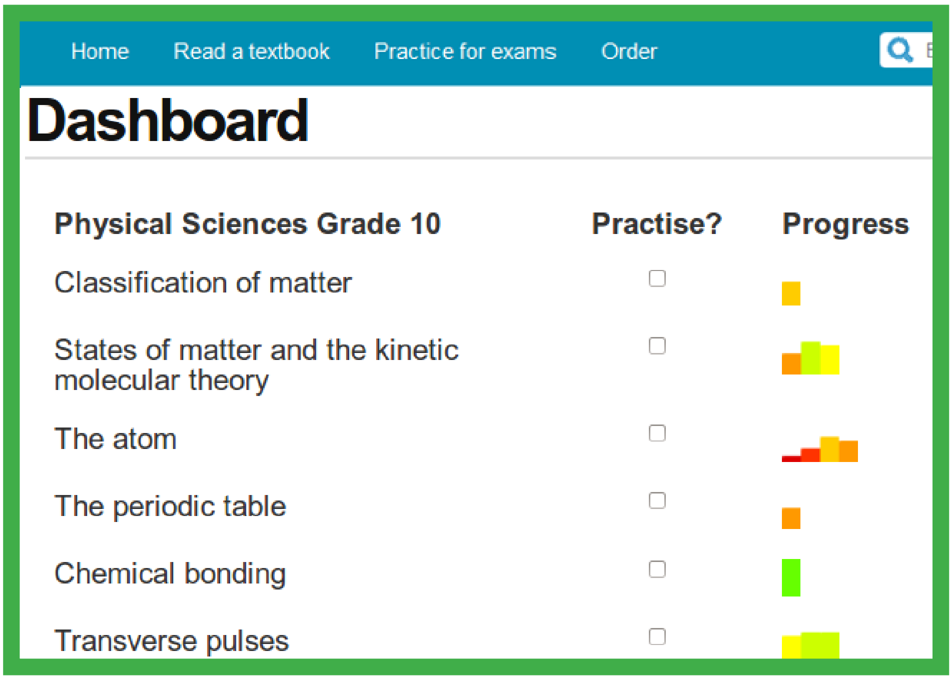


m.everythingmaths.co.za en ***m.everythingscience.co.za***

BESTUUR JOU STUDIES

- ***JOU 'DASHBOARD'***

Indien jy jou huiswerk en oefenvrae op ***m.everythingmaths.co.za*** or ***m.everythingscience.co.za*** voltooi, sal dit namens jou rekord hou. Jy sal op jou 'dashboard' kan sien hoe jy vorder, hoe jy elke onderwerp in die boek bemeester het en dit sal jou help om jou studies te bestuur.



SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

EVERYTHING MATHS

Ons dink oor die algemeen aan Wiskunde as 'n vak oor getalle, maar eintlik is Wiskunde 'n taal. As ons dié taal leer praat en verstaan kan ons baie van die natuur se geheime ontdek. Net soos ons iemand se taal moet verstaan om meer van hom/haar te leer, moet ons wiskunde gebruik om meer te leer van alle aspekte van die wêreld 'n of dit nou fisiese wetenskappe, lewenswetenskappe of selfs finansies of ekonomie is.

Die vernaamste skrywers en digters het 'n gawe om woorde só te gebruik dat hulle mooi en inspirerende stories kan vertel. Net so kan ons wiskunde gebruik om konsepte te verduidelik en nuwe dinge te skep. Baie van die moderne tegnologie wat ons lewens beter en makliker maak, is afhanklik van wiskunde. DVDs, Google soektogte en bankkaarte wat met 'n PIN werk, is maar net ën paar voorbeelde. Woorde het nie ontstaan om stories te vertel nie, maar die bestaan daarvan maak dit moontlik. Net so is die wiskunde wat gebruik is om hierdie tegnologie te ontwikkel, nie spesifiek vir hierdie doel ontwikkel nie. Die uitvinders kon egter bestaande wiskundige beginsels gebruik wanner en waar die toepassing daarvan nodig was.

Trouens is daar nie 'n enkele faset van die lewe wat nie deur wiskunde geraak word nie. Baie van die mees gesogte beroepe is afhanklik van wiskunde. Siviele ingenieurs gebruik wiskunde om te bepaal hoe om die beste, nuwe ontwerpe te maak. Ekonome gebruik wiskunde om te beskryf en voorspel hoe die ekonomie sal reageer op sekere veranderinge. Beleggers gebruik wiskunde om die prys van sekere soorte aandele te bepaal of om die risiko verbonde aan sekere beleggings te bereken. Wanneer sagteware-ontwikkelaars programme soos Google skryf, gebruik hulle baie van die wiskundige algoritmes om die programme bruikbaar maak.

Selfs in ons daaglikse lewens is wiskunde oral - in die afstand wat ons aflê, tyd en geld. Ons kan ook in kuns, ontwerp en musiek die invloed van wiskunde sien, veral in die proporsies en musikale klanke. Hoe beter ons vermoë om wiskunde te verstaan, hoe beter ons vermoë om die natuur en die skoonheid daarvan te waardeer. Wiskunde is daarom nie net 'n abstrakte dissipline nie, dit omarm logika, simmetrie, harmonie en tegnologiese vooruitgang. Meer as enige ander taal is wiskunde oral en universeel in sy toepassing.

SIYAVULA
TECHNOLOGY-POWERED LEARNING

Inhoudsopgawe

HOOFSTUK 1

Wiskunde - Onderwysers gids

1.1 Blog posts

Algemene blogs

- Educator's Monthly - Education News and Resources (http://www.teachersmonthly.com)
  - "We eat, breathe and live education! "
  - "Perhaps the most remarkable yet overlooked aspect of the South African teaching community is its enthusiastic, passionate spirit. Every day, thousands of talented, hard-working educators gain new insight from their work and come up with brilliant, inventive and exciting ideas. Educator's Monthly aims to bring educators closer and help them share knowledge and resources.
  - Our aim is twofold . . .
    - To keep South African educators updated and informed.
    - To give educators the opportunity to express their views and cultivate their interests."
- Head Thoughts – Personal Reflections of a School Headmaster (http://headthoughts.co.za/)
  - blog by Arthur Preston
  - "Arthur is currently the headmaster of a growing independent school in Worcester, in the Western Cape province of South Africa. His approach to primary education is progressive and is leading the school through an era of new development and change."

Wiskunde blogs

- CEO: Circumspect Education Officer - Educating The Future
  - blog by Robyn Clark
  - "Mathematics teacher and inspirer."
  - http://clarkformaths.tumblr.com/
- dy/dan - Be less helpful
  - blog by Dan Meyer
  - "I'm Dan Meyer. I taught high school math between 2004 and 2010 and I am currently studying at Stanford University on a doctoral fellowship. My specific interests include curriculum design (answering the question, "how we design the ideal learning experience for students?") and teacher education (answering the questions, "how do teachers learn?änd "how do we retain more teachers?änd "how do we teach teachers to teach?")."
  - http://blog.mrmeyer.com

- Without Geometry, Life is Pointless - Musings on Math, Education, Teaching, and Research
  - blog by Avery
  - "I've been teaching some permutation (or is that combination?) of math and science to third through twelfth graders in private and public schools for 11 years. I'm also pursuing my EdD in education and will be both teaching and conducting research in my classroom this year."
  - http://mathteacherorstudent.blogspot.com/
- Overthinking my teaching - The Mathematics I Encounter in Classrooms
  - blog by Christopher Danielson
  - "I think a lot about my math teaching. Perhaps too much. This is my outlet. I hope you find it interesting and that you'll let me know how it's going."
  - http://christopherdanielson.wordpress.com
- A Recursive Process - Math Teacher Seeking Patterns
  - blog by Dan
  - "I am a High School math teacher in upstate NY. I currently teach Geometry, Computer Programming (Alice and Java), and two half year courses: Applied and Consumer Math. This year brings a new 21st century classroom (still not entirely sure what that entails) and a change over to standards based grades."
  - http://dandersod.wordpress.com
- Think Thank Thunk – Dealing with the Fear of Being a Boring Teacher
  - blog by Shawn Cornally
  - "I am Mr. Cornally. I desperately want to be a good teacher. I teach Physics, Calculus, Programming, Geology, and Bioethics. Warning: I have problem with using colons. I proof read, albeit poorly."
  - http://101studiostreet.com/wordpress/

1.2 Oorsig

Voor 1994 het daar 'n aantal verskillende onderwysdepartemente en kurrikula bestaan volgens die skeiding wat so duidelik was tydens die apartheid era. As 'n gevolg het die kurrikulum self een van die politiese ikone van vryheid of onderdrukking geword. Sedertdien het die regering en politieke leiers probeer om een kurrikulum te ontwikkel, wat die nasionale agenda van demokratiese vryheid en gelykheid ondesteun, deur die kennis, vaardighede en waardes wat ons leerders moet leer en toepas op die voorgrond te stel, sodat hulle op 'n betekenisvolle manier kan deelneem in die samelewing as burgers van 'n vry land. Die Nasionale Kurrikulumverklaring (NKV) Graad R–12 (DBE, 2012) dien dus volgende doelwitte:

- om leerders toe te rus met die kennis, vaardighede end waardes benodig vir selfverwesenliking en betekenisvolle deelname in die samelewing as burgers van 'n vry land, ongeag hulle sosio-ekonomiese agtergrond, ras, geslag, fisiese of intellektuele vermoë;

- om toegang to hoër onderrig te verskaf;
- om die oorgang van leerders vanaf onderwysinstellings na die werkplek te fasiliteer; en
- om werkgewers met 'n voldoende profiel van leerdersbevoegdhede te verskaf.

Alhoewel dit verhef is tot die status van 'n politiese ikoon, bly die kurrikulum 'n instrument. Die vaardighede van 'n onderwyser word benodig om hierdie istrument te interpreteer en operasionaliseer in die klaskamer. Die kurrikulum self kan nie die doelwitte hierbo gelys bereik sonder dat die gemeenskap van kurrikulumspesialiste, ontwikkelaars van onderwysmateriaal, onderwysers en assessore die prosess, om die voorgenome kurrikulum die geïmplementeerde kurrikulum te maak, ondersteun en daartoe bydra nie. 'n Kurrikulum kan slaag of misluk, afhangende van die implementering en ongeag die voorgenome beginsels of potensiaal op papier daarvan. Daarom is dit belangrik dat belanghebbendes van die kurrikulum vertroud is en ooreenstem met die volgende beginsels waarop die NKV gebaseer is:

Beginsel	**Implementering**
Sosiale Transformasie	Die regstelling van wanbalanse van die verlede. Die verskaffing van gelyke geleenthede vir almal.
Aktiewe en Kritiese Leer	Aanmoediging van 'n aktiewe en kritiese benadering tot leer. Vermyding van oormatige onkritiese memorisering van gegewe waarhede.
Diepgaande Kennis en Vaardighede	Leerders behaal minimum standaarde van kennis en vaardighede, soos bepaal vir elke graad in elke vak.
Vordering	Inhoud en konteks toon progressie van eenvoudig na kompleks.
Sosiale en Omgewingsgeregtigheid en Menseregte	Praktyke soos in die Grondwet omskryf is, verweef in die onderrig en leer van elk van die vakke.
Waardering vir Inheemse Kennissisteme	Erken die ryk geskiedenis en erfenis van hierdie land.
Geloofwaardigheid, Gehalte en Doeltreffendheid	Verskaffing van onderrig wat wêreldwyd vergelykbaar is i.t.v. kwaliteit.

Hierdie gids is bedoel om waarde en insig toe te voeg tot die bestaande Nasionale Kurrikulum vir Graad 10 Wiskunde, in lyn met die doelwitte en beginsels daarvan. Daar word gehoop dat dit u as die opvoeder sal help om die voorgenome kurrikulum te optimeer en implementeer.

Kurrikulumvereistes en doelwitte

Die belangrikste doelwitte van die kurrikulum hou verband met die leerders wat uit ons opvoedkundestelsel kom. Opvoeders is die belangrikste rolspelers in die uitvoering van die voorgenome kurrikulum. Die kwaliteit van die leerder wat deur hierdie stelsel beweeg, sal egter die bewys wees dat die kurrikulum soos wat dit bedoel en geïmplementeer is, ook sy doelwitte bereik het. Hierdie doelwitte en beginsels beoog om leerders te produseer wat in staat is:

- om probleme te identifiseer en op te los en om besluite te neem deur kritiese en kreatiewe denke;
- om doeltreffend te werk as individue en met ander as lede van 'n span;
- om hulself en hul aktiwiteite verantwoordelik en doeltreffend te organiseer en bestuur;
- om inligting te versamel, te analiseer, te organiseer en krities te evalueer;
- om effektief te kommunikeer deur gebruik te maak van visuele, simboliese en/of taalvaardighede in verskillende vorme;
- om wetenskap en tegnologie doeltreffend en krities te gebruik met verantwoordelikheid teenoor die omgewing en die gesondheid van ander; en
- om begrip van die wêreld as 'n stel verwante stelsels te toon deur te herken dat die kontekste van probleme nie in isolasie bestaan nie.

Die bogenoemde punte kan opgesom word as 'n onafhanklike leerder wat krities en analities kan dink, in staat is om effektief met lede van 'n span te werk, en probleme kan identifiseer en oplos deur middel van effektiewe besluitneming. Dit is ook die uitkoms waarna binne opvoedkundige navorsing verwys word as die "hervormde" benadering eerder as die "tradisionele" benadering waaraan baie opvoeders meer gewoond is. Tradisionele praktyke het hul rol en kan nie heeltemal ten gunste van hervormde praktyke daargelaat word nie. Maar, ten einde meer onafhanklike en wiskundige denkers te produseer, moet die hervorming ideologie deur opvoeders ingeneem word in hul optrede as onderwysers. Hier is 'n tabel wat kan help om u dominante instruksionele praktyk te identifiseer en u probeer help om dit aan te pas (indien nodig), om meer gebalanseerd en in lyn met die hervorming benadering, soos voorgestel deur die NKV, te wees.

	Tradisionele Versus Hervormde Praktyke
Waardes	**Tradisioneel** – fokus op onderrigmateriaal, korrektheid van leerders se antwoorde en wiskundige geldigheid van metodes. **Hervorm** – patrone vind, konsepte verbind, wiskundig kommunikeer en probleemoplossing.
Onderrigmetodes	**Tradisioneel** – verklarend, oordrag van inligting, baie oefen en herhaling, stap vir stap bemeestering van algoritmes. **Hervorm** – Geleide ontdekkingsmetodes, eksplorasie, modellering. Hoë vlak van redenasie is sentraal.
Groepering van Leerders	**Tradisioneel** – oorheersend gelyksoortige groepering. **Hervorm** – oorheersend gemengde vermoëns.

Die vak wiskunde verskaf uiter aard ruim geleentheid om te voldoen aan die hervormde doelwitte. Die definisie van wiskunde moet verstaan en omhels moet word deur die opvoeders betrokke by die onderrig en die leer van die vak. In die navorsing is dit goed gedokumenteer dat ons opvattings oor wat wiskunde is, 'n invloed het op ons benadering tot die onderrig en leer van die vak.

Drie sienings van wiskunde word hier aangebied. Die instrumentalistiese siening van wiskunde aanvaar die standpunt dat wiskunde 'n versameling feite, reëls en vaardighede is wat gebruik word as 'n middel vir 'n doelwit, sonder dat daar noodwendig 'n verband is tussen hierdie komponente. Die Platonistiese siening van wiskunde is dat die vak ’n statiese, maar verenigde liggaam van sekere kennis is, waarbinne wiskunde ontdek word eerder as om geskep te word. Die probleemoplossing siening van wiskunde is dat dit ’n dinamiese, voortdurend ontwikkelende veld van menslike skepping en uitvinding is wat op sigself ’n kulturele produk is. Wiskunde word dus beskou as ’n proses van ondersoek, eerder as ’n voltooide produk. Die resultate bly voortdurend oop vir hersiening. Een voorgestel is dat ’n hiërargiese orde bestaan binne hierdie drie aansigte, met die instrumentalistiese siening op die laagste vlak en die probleemoplossing siening op die hoogste vlak.

Volgens die NKV:

Wiskunde is die studie van hoeveelheid, struktuur, ruimte en verandering. Wiskundiges soek patrone, formuleer nuwe veronderstellings en vestig aksiomatiese stelsels deur die streng deduktiewe afleiding vanaf toepaslik gekose aksiomas en definisies. Wiskunde is ’n menslike aktiwiteit wat deur alle kulture beoefen is, vir duisende jare reeds. Wiskundige probleemoplossing stel ons in staat om die wêreld rondom ons (fisies, sosiaal en ekonomies) te verstaan en, belangrikste van alles, om te leer om kreatief te dink.

Dit stem goed ooreen met die probleemoplossing siening van wiskunde en mag dalk sommige van ons instrumentalistiese of Platonistiese sienings, as ’n statiese versameling van kennis, feite, reëls en vaardighede wat geleer en toegepas moet word, uitdaag. Die NKV probeer om so ’n benadering te ontmoedig en moedig wiskunde-onderwysers aan om op ’n dinamiese en kreatiewe manier hulle leerders as wiskundiges te betrek by ’n proses van studie, begrip, redenering, probleemoplossing en kommunikasie. Hieronder is ’n lys wat u kan help om u lesse aktief te ontwerp in ’n poging om die NKV definisie van wiskunde te omhels en om nader te beweeg aan ’n probleemoplossing konsepsie van die onderwerp. Die aanvaarding van so ’n benadering tot die onderrig en leer van wiskunde sal op sy beurt bydra tot die implementering en realisering van die voorgenome kurrikulum, in terme van die kwaliteit van die leerders wat uit die onderwysstelsel kom.

Aktiwiteit	**Voorbeeld**
Leerders neem deel aan die oplossing van kontekstuele probleme wat verband hou met hul lewens en vereis dat hulle ’n probleem interpreteer en dan ’n geskikte wiskundige oplossing te vind.	Leerders word gevra om uit te werk watter busdiens die goedkoopste is, gegee die tariewe en die afstand wat hulle wil reis.
Leerders raak betrokke by die oplos van probleme van ’n suiwer wiskundige aard, wat hoërorde denke en die toepoassing van kennis (ni standaard probleme) benodig.	Leerders word gevra om ’n grafiek te teken. Hulle het nog nie ’n spesifieke tekentegniek (byvoorbeeld vir ’n parabool) geleer nie, maar het geleer om die tabelmetode te gebruik om reguit lyne te teken.
Leerders kry geleentheid om oor betekenis te redeneer.	Leerders bespreek hul begrip van konsepte en strategieë vir die oplossing van probleme met mekaar en met die onderwyser.
Leerders word geleer end gevra om situasies op verskeie ekwivalente maniere te verteenwoordig (wiskundige modellering).	Leerders verteenwoordig dieselfde data met behulp van ’n grafiek, ’n tabel en ’n formule om die data voor te stel.

Leerders doen individueel wiskundige ondersoeke in die klas, gelei deur die onderwyser waar nodig.	Elke leerder kry 'n wiskundige probleem (byvoorbeeld om die aantal priemgetalle minder as 50 te vind) wat ondersoek moet word en die oplossing neergeskryf moet word. Leerders werk onafhanklik.
Leerders werk saam as 'n groep/span om ondersoek in te stel of 'n wiskundige probleem op te los.	'n Groep word opdrag gegee om saam te werk aan 'n probleem wat vereis dat hulle patrone in data ondersoek, om veronderstellings te maak en 'n formule vir die patroon te vind.
Leerders doen oefeninge om hulle kennis van konsepte te konsolideer en verskeie vaardighede te bemeester.	Voltooiing van 'n oefening wat roetine prosedures benodig.
Leerders kry geleenthede om die wisselwerking tussen verskillende aspekte van wiskunde te sien en om te sien hoe die verskillende uitkomste verwant is.	Terwyl leerders deur meetkunde probleme werk, word hulle aangemoedig om gebruik te maak van algebra.
Leerders word gevra om probleme vir hulle onderwyser en klasmaats op te stel.	Leerders word gevra 'n algebraïese woordsom op te stel (waarvan hulle ook die oplossing ken), vir die persoon wat langs hulle sit om op te los.

Oorsig van die onderwerpe

Oorsig van onderwerpe en hulle relevansie:

1. Funksies – lineêr, kwadraties, eksponensiëel, rasioneel	**Relevansie**
Brei graad 10 werk oor verwantskappe tussen veranderlikes in terme van numeriese, grafiese, woordelikse en simboliese voorstellings van funksies uit. Leerders moet gemaklik tussen hierdie voorstellings (tabelle, grafieke, woorde en formules) kan omskakel. Sluit 'n lineêre en kwadratiese polinome funksies, eksponensiële funksies, sommige rasionale funksies en trigonometriese funksies. Genereer soeveel moontlike grafieke as wat nodig is, aanvanklik deur punt-vir-punt-stipping, ondersteun deur beskikbare tegnologie. Maak en toets veronderstellings en veralgemeen vervolgens die uitwerking van die parameter wat 'n horisontale strek en/of 'n refleksie rondom die y-as teweegbring. Probleemoplossing en grafiekwerk wat die voorgeskrewe funksies betrek. Die gemiddelded gradient tussen twee punte.	Funksies vorm 'n sentrale deel van leerders se wiskundige begrip en redenasie-proseese in algebra. Dit is ook uitstekende geleentheid vir kontekstuele wiskundige modelleringsvrae.
2. Getalpatrone, rye en reekse	**Relevansie**
Ondersoek getalpatrone wat lei tot die soort waar daar 'n konstante tweede verskil tussen opeenvolgende terme is en die algemene term dus kwadratiese is.	Baie wiskunde wentel rondom die identifisering van patrone.
3. Finansies, groei en krimping	**Relevansie**

Gebruik eenvoudige en saamgestelde vervalformules om probleme op te los (insluitend eenvoudige vermindering en samegestelde vermindering). Verbind met die werk oor funksies. Die uitwerking van verskillende periodes van saamgestelde groei en verval (insluitend effektiewe en nominale rentekoerse).	Die wiskunde van finansies is baie relevant vir daaglikse en langtermyn finansiële besluite wat leerders sal moet maak vir beleggings, lenings, spaar, begrip van wisselkoerse en die invloed daarvan wêreldwyd.
4. Algebra	**Relevansie**
Neem kennis dat daar getalle bestaan wat nie op die reelegetallelyn voorkom nie, die nie-reelegetalle. Dit is moontlik om sekere nie-reelegetalle te kwadreer en negatiewe reele getalle as antwoorde te verkry. a. Pas die eksponensiële wette vir eksponente toe op die uitdrukkings wat rasionale eksponente bevat. b. Tel op, trek af, vermenigvuldig en deel eenvoudige wortelvorme. Hersien faktorisering. Los op: kwadratiese vergelykings, kwadratiese ongelykhede in een veranderlike en interpretter die antwoord grafies, en vergelykings in twee veranderlikes waarvan een lineêre en die ander kwadratiese.	Algebra verskaf die grondslag vir wiskundige leerders om te beweeg van numeriese berekeninge na veralgemeende operasies, vereenvoudiging van uitdrukkings, oplos van vergelykings en gebruik van grafieke en ongelykhede vir oplossing van kontekstuele probleme.
5. Differensiaalrekening	**Relevansie**
Word nie in graad 11 gedek nie.	
6. Waarskynlikheid	**Relevansie**
a. Afhantlike en onafhanklike gebeurtenisse. b. Venn-diagramme en boomdiagramme of tweerigtingtabelle as hulpmiddels om waarskynlikheidsprobleme op te los (waar gebeurtenisse nie noodwendig onafhanklik is nie).	Hierdie onderwerp is nuttig vir die ontwikkeling van goeie logiese redenasievermoë en vir die opvoeding van leerders in terme van werklike lewenskwessies soos dobbelary en die slaggate daarvan.
7. Euklidiese Meetkunde en Meting	**Relevansie**
a. Ondersoek en bewys stellings aangaande sirkelmeetkunde. Aanvaar feite uit vorige grade tesame met ander feit rakende raaklyne en radusse van sirkels. b. Los sirkelmeetkundeprobleme op en gee redes wanneer vereis word. c. Bewys meetkundige vraagstukke/probleme Hersien graad 10 werk.	Die denkprosesse en wiskundige vaardighede met betrekking tot die bewys van veronderstellings en die indentifisering van valse veronderstellings is meer relevant as om die inhoud te studeer. Die oppervlakte en volume in praktiese kontekste soos die ontwerp van kombuise, die teël en verf van kamers, die ontwerp van verpakking, ens. is relevant tot die huidige en toekomstige lewens var leerders.
8. Trigonometrie	**Relevansie**

a. Lei af en gebruik die identiteite: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ en $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. b. Lei die reduksieformules af. c. Bepaal die algeme oplossing en/of die spesifieke oplossings van trigonometriese vergelykings. d. Bepaal die sinus, kosinus en area-reels. Los probleme in tweedimensionele figure op.	Trigonometrie het versleie gebruike in die samelewing, bv. in navigasie, musiek, geografie en die ontwerp en konstruksie van geboue.
9. Analytiese Meetkunde	**Relevansie**
Gebruik die Cartesise koordinaatstelsel om die volgende: die vergelyking van 'n lyn deur enige twee gegewe punte, die vergelyking van 'n lyn deur een punt en ewewydig of loodreg met 'n gegewe lyn. en die inklinasie van 'n lyn af te lei en toe te pas.	Hierdie afdeling verskaf 'n verdere toegepassing vir leerders se algebraïese en trigonometriese interaksie met die Cartesise vlak. Kunstenaars en die ontwerp en uitleg industrieë maak dikwels gebruik van die inhoud en denkprosesse van hierdie wiskundige onderwerp.
10. Statistiek	**Relevansie**
a. Stel maatstawwe van sentrale neiging en verspreiding in eenveranderlike numeriese data voor deur ogiewe te gebruik, en berekening van die variansie en standaardafwyking van stelle data sonder sakrekenaar (vir klein stelle data) en met 'n sakrekenaar (vir groter stelle data) en stel die resultate grafies voor. b. Stel skeefgetrekte data voor in mond-en-snordiagramme en frekwensieveelhoeke. Identifiseer uitskieters.	Mense word daagliks gekonfronteer met die interpretasie van data wat deur die media verskaf word. Dikwels word data bevooroordeeld of wanvoorgestel binne 'n sekere konteks. In enige soort navorsing is die insameling en hantering van data kernprosesse. Hierdie onderwerp help ook leerders op om meer sosiaal en polities opgevoed te wees ten opsigte van die media.

Wiskunde onderwysers moet ook verseker dat die volgende belangrike spesifieke doelwitte en algemene beginsels toegepas word in wiskunde-aktiwiteite in alle grade:

- Sakrekenaars mag slegs gebruik word om die standaard numeriese berekeninge uit te voer en berekeninge wat met die hand gedoen is, te kontroleer
- Werklike probleme geïntegreer word in alle afdelings, om wiskundige modellering te behou as 'n belangrike fokuspunt van die kurrikulum
- Ondersoeke gee leerders die geleentheid om hul vermoë om meer metodies te wees, om te kan veralgemeen, en om veronderstellings te kan ontwikkel en regverdig en/of bewys.
- Gepaste benaderings- en afrondingsvaardighede moet geleer word en voortdurend aangemoedig word in aktiwiteite.
- Die geskiedenis van wiskunde moet ingewerk word in projekte en take, waar moontlik, om die menslike aspek en ontwikkelende aard van wiskunde te illustreer.
- Kontekstuele probleme moet kwessies met betrekking tot gesondheid, maatskaplike, ekonomiese, kulturele, wetenskaplike, politieke en omgewingskwessies insluit, waar moontlik.

- Konseptuele begrip van "wanneer" en "hoekom" moet ook deel vorm van die tipes probleme.
- Onderrig vir gemengde vermoëns vereis dat opvoeders in staat is om leerders uit te daag en remediërende ondersteuning aan te bied, waar nodig.
- Wanpersepsies wat deur assessering blootgestel word, moet hanteer en reggestel word met behulp van vrae ontwerp deur opvoeders.
- Probleemoplossing en kognitiewe ontwikkeling moet sentraal wees tot alle wiskunde onderrig en leerwerk, sodat leerders hulle kennis doeltreffend kan toepas.

Toekenning van onderrigtyd:

Tydstoekenning vir Wiskunde per week: 4 ure en 30 minute bv. ses 45 minuut periodes per week.

Kwartaal	Onderwerp	Aantal weeks
Kwartaal 1	Exponente en wortelvorme	3
	Vergelykings en ongelykhede	3
	Getalpatrone	2
	Analytiese Meetkunde	3
Kwartaal 2	Funksies	4
	Trigonometrie (reduksieformules, grafieke, vergelykings)	4
	Half-jaar eksamens	3
Kwartaal 3	Meting	1
	Euklidiese meetkunde	3
	Trigonometrie (sinus, kosinus en area reele)	2
	Finansies, groei en decay	2
	Waarskynlikheid	2
Kwartaal 4	Statistiek	3
	Hersiening	3
	Eksamen	3

Sien bladsy 19 van die Kurrikulum- en Assesseringsbeleidsraamwerk vir die volgordebepaling en tempo van onderwerpe.

1.3 Assesering

"Opvoeder assessering is deel van die alledaagse onderrig en leerwerk in die klaskamer. Opvoeders hou besprekings met leerders, lei hulle in hul werk, vra en beantwoord vrae, neem waar, help, moedig aan en daag uit. Daarbenewens merk en hersien hulle geskrewe en ander vorme van werk. Deur middel van hierdie aktiwiteite is hulle voortdurend besig om meer uit te vind oor hulle leerders se vermoëns en prestasies. Hierdie kennis lig dan planne in vir toekomstige werk. Opvoeder assessering behels hierdie deurlopende proses. Dit moet nie gesien word as 'n afsonderlike aktiwiteit wat noodwendig die gebruik van ekstra take of toetse vereis nie."

Soos die aanhaling hierbo suggereer, behoort assessering opgeneem te word as deel van die klaskamerpraktyk, eerder as 'n afsonderlike aktiwiteit. Navorsing gedurende die afgelope tien jaar dui aan dat leerders 'n gevoel kry van wat hulle weet en nie weet nie, van wat hulle hieromtrent kan doen en hoe hulle hieroor voel, vanaf gereelde klaskamerassessering en onderwyser terugvoer. Die onderwyser se persepsies van en benadering tot assessering (beide formele en informele assessering) kan 'n invloed hê op die klaskamerkultuur, wat geskep word met betrekking tot die leerders se verwagtinge van en prestasie in assesseringstake. Literatuur oor klaskamerassessering onderskei tussen twee verskillende doelwitte van assessering: assessering van leer en assessering vir leer.

Assessering van leer is geneig om 'n meer formele assessering te wees en assesseer hoeveel leerders geleer het, of op 'n bepaalde punt in die jaarlikse onderrigplan verstaan. Die NKV bied omvattende riglyne oor die soorte en hoeveelheid van formele assessering wat moet plaasvind binne die onderrigjaar, om die skoolgebaseerde assesseringspunt saam te stel. Die skoolgebaseerde assesseringspunt dra 25% by tot die finale persentasie van 'n leerder se promosiepunt; die einde van die jaar eksamen bepaal die ander 75% van die jaarlikse promosiepunt. Daar word van leerders verwag om 7 formele assesseringstake vir hul skoolgebaseerde assesseringspunt te hê. Die aantal take en hul gewig in die graad 10 wiskunde kurrikulum is hieronder opgesom:

		Take	**Gewigstoekening (persent)**
Skool-gebaseerde Assessering	Kwartaal 1	Projek/Ondersoek Toets	20 10
	Kwartaal 2	Opdrag/Toets Eksamen	10 30
	Kwartaal 3	Toets Toets	10 10
	Kwartaal 4	Toets	10
Skool-gebaseerde Asseseringspunt			100
Skool-gebaseerde Asseseringspunt (as 'n persent van vorderingspunt)			25%
Eindeksamen			75%
Vorderingspunt			75%

Die volgende is 'n kort verduideliking van elk van die assesseringstake ingesluit in die assesseringsprogram hierbo

Toets

Alle wiskunde-opvoeders is vertroud met hierdie vorm van formele assessering. Die toetse sluit 'n verskeidenheid van items/vrae in wat die onderwerpe dek wat reeds voor die toets aangebied is. Die nuwe NKV bepaal ook dat wiskundetoetse vrae wat betrekking het op die volgende vier tipes kognitiewe vlakke insluit:

Kognitiewe vlakke	Beskrywing	Gewigstoekening (persent)
Kennis	Beramings- en toepaslike afronding van getalle. Bewyse van voorgeskrewe stellings. Die aflei van formules. Direkte herroeping Identifisering en die direkte gebruik van formules op die inligtingsblad (geen verandering van die onderwerp). Gebruik van wiskundige feite.. Toepaslike gebruik van wiskundige woordeskat.	20
Roetine prosedures	Voer bekende prosedures uit. Eenvoudige toepassings en berekeninge. Afleiding vanaf die gegewe inligting. Identifikasie en die gebruik (insluitend die verandering van die onderwerp) van korrekte formules. Vrae oor die algemeen soortgelyk aan dié wat in die klas behandel is.	35
Komplekse prosedures	Probleme behels komplekse berekenings en/of hoër redenasie. Daar is dikwels nie 'n duidelike pad na die oplossing. Probleme hoef nie gebaseer te wees op 'n werklike konteks nie. Kan die vorming van beduidende verbinddings tussen verskillende voorstellings behels. Verreis konseptuele begrip. Vereis konseptuele begrip.	25
Probleemoplossing	Voorheen ongesiende nie-roetine probleme (wat nie noodwendig moeilik is nie). Hoër orde begrip en prosesse is dikwels betrokke. Kan die vermoë om die probleem in sy samestellende dele op te breek, vereis.	15

Die uiteensetting van die toetse oor die vier kwartale van die NKV assesseringsprogram word as volg opgesom:

Kwartaal 1: Een toets van ten minste 50 punte en een uur, of twee/drie toetse van ten minste 40 minute elk.

Kwartaal 2: Óf een toets (van ten minste 50 punte) óf 'n werkstuk..

Kwartaal 3: Twee toetse, elk van ten minste 50 punte en een uur.

Kwartaal 4: Een toets van ten minste 50 punte.

Projekte/Ondersoeke

Ondersoeke en projekte bestaan uit oop vrae wat denkprosesse inisiëer en ontwikkel. Die aanleer en ontwikkeling van probleem-vaardighede is 'n noodsaaklike deel van ondersoeke en projekte. Hierdie take bied leerders die geleentheid om ondersoek in te stel, inligting te versamel, resultate te tabuleer, veronderstellings te maak, en hierdie veronderstellings te regverdig of bewys. Voorbeelde van ondersoeke en projekte en moontlike assesseringskale word aangegee in die volgende afdeling oor assessering ondersteuning. Die NKV assesseringsprogram dui aan dat slegs een projek of ondersoek (van ten minste 50 punte) per jaar ingesluit moet word. Alhoewel die projek/ondersoek in die eerste kwartaal aangegee word van die assesseringsskedule, kan dit ook in die tweede kwartaal gedoen word.

Opdragte

Die NKV sluit die volgende take in as goeie voorbeelde van opdragte:

- Oopboe toets
- Vertalingsopdrag
- Foute identifiseer en verbeter
- Korter ondersoek
- Joernaalinskrywing
- Breinkaart (ook bekend as 'n metacog)
- Olimpiade (eerste ronde)
- Wiskunde-handleiding oor 'n hele onderwerp
- Wiskunde tutoriaal op meer komplekse probleemoplossings vrae

Die NKV assesseringsprogram vereis dat 'n opdrag(van ten minste 50 punte) in die tweede kwartaal gegee word. Dit kan 'n kombinasie wees van 'n paar van die voorbeelde hierbo. Meer inligting oor hierdie voorgestelde voorbeelde van opdragte en moontlike assesseringsrubrieke word in die volgende afdeling oor assesseringsondersteuning gegee.

Eksamens

Opvoeders is goed vertroud met hierdie summatiewe vorm van assessering wat gewoonlik tweekeer per jaar gedoen word: die middel-van-die-jaar eksamens en einde-van-jaar eksamens. Dit is soortgelyk aan toetse, maar dek 'n groter verskeidenheid van onderwerpe wat voltooi is voor elke eksamen. Die NKV bepaal dat elke eksamen die vier kognitiewe vlakke sal dek volgens hul aanbevole gewigte soos saamgevat in die afdeling oor toetse. Die volgende tabel gee 'n opsomming van die vereistes en inligting van die NKV vir die twee eksamens.

Eksamen	Punte	Uiteensetting	inhoud en puntverspreiding
Middel-van-die-jaar eksame	100 50 + 50	Een vraestel: 2 uur **of** Twee vraestels: 1 uur elk	Onderwerpe voltooi
Einde-van-die-jaar eksamen	100+	Vraestel 1: 2 uur	Algebraiese uitdrukkings, vergely kings en ongelykhede (±45) Getalpatrone en sekwensies (±25 Finansies, groei en decay (±15) Funksies en grafieke (±45) Waarskynlikheid (±20)
	100	Vraestel 2: 2 ure	Statistiek (±20) Analyties meetkunde (±30) Trigonometrie (±50) Euklidiese meetkunde en metin (±50)

In die jaarlikse opsommende onderrigplan van die NKV in Wiskunde vir Graad 11, verskaf die pasaanduider afdeling 'n gedetailleerde model van die voorgestelde onderwerpe wat gedek moet word in elke week van elke kwartaal en die gepaardgaande formele assessering.

Assesering **vir** leer is geneig om meer informeel te wees en fokus op die toepassing van assessering in die loop van die daaglikse klaskameraktiwiteite. Dit sluit in:

1. Nasien van huiswerk
2. Basislynasseserings
3. Diagnostiese assessering
4. Groepwerk
5. Klasbesprekings
6. Mondelinge aanbiedings
7. Self-assessering
8. Eweknie-assessering

Hierdie aktiwiteite word uitgebrei in die volgende afdeling oor assesseringsondersteuning en voorgestelde assesseringskale word voorsien. Waar formele assessering geneig is om die leerder te beperk tot skriftelike assesseringstake, is die informele assessering nodig is om leerders se vordering in verbale wiskundige redenasie- en kommunikasievaardighede te evalueer en aan te moedig. Dit bied ook 'n minder formele assesseringsomgewing wat leerders toelaat om hulleself openlik en eerlik te assesseer, om verantwoordelikheid te neem vir hul eie leer, sonder die swaar las van die prestasie (of punte) komponent. Die assessering-vir-leer aktiwiteite moet ten minste een keer 'n week ingesluit word in die klaskamer-aktiwiteite (as deel van' n les) om te verseker dat die opvoeder in staat is om voortdurend die leerders se begrip van die onderwerpe wat gedek is en hulle doeltreffendheid te evalueer. Dit bemagtig ook die opvoeder om enige moontlike tekortkominge in sy of haar eie onderrig van die onderwerpe te identifiseer.

'n Verskeidenheid van verduidelikings, voorbeelde en voorgestelde assesseringskale vir die assessering van leer (formele vorme van assessering) en die assessering vir leer (informele vorme van assessering), wat in die vorige afdeling genoem is, word in hierdie afdeling uiteengesit.

Basislynasseserings

Basislyn- of grondlynassessering is 'n metode vir die vasstelling van:

- die voorkennis waaroor 'n leerder beskik
- 'n leerder se vlak van kennis oor 'n spesifieke leerarea
- die vaardigheids- en toepassingsvlak wat 'n leerder toon
- 'n leerder se vlak van begrip van die verskillende leerareas

Dit is nuttig vir 'n opvoeder om te weet wat 'n leerder se individuele vertrekpunt is, ten einde hom/haar te help na 'n meer gevorderde vlak en om sodoende vordering maak. Dit help ook voorkom dat groot "gapings"bestaan in leerders se kennis soos wat hulle beweeg deur die onderwysstelsel. Uitkomsgebaseerde onderwys is 'n meer leerder-gesentreerde benadering as waaraan ons in Suid-Afrika gewoond is; dus moet die klem moet nou verskuif na die vlak van elke individuele leerder, eerder as dié van die hele klas.

Die basislynassessering dien ook as 'n maatstaf om leerders in staat te stel om meer verantwoordelikheid vir hulle eie leer te neem en hulle eie vordering te monitor. In die tradisionele assesseringstelsel daal die swakker leerders dikwels van 'n gemiddeld van 40% in die eerste kwartaal tot 'n gemiddeld van 30% in die vierde kwartaal as gevolg van 'n toename in die werkslading. Hulle toon dus geen duidelike vordering nie. Basislynassessering gee inligting oor die vlakke wat verbeter kan word en soos die leerder vorder deur 'n afdeling van die werk, kan aangetoon word of die leerder meer kennis, begrip en vaardigheid in daardie gebied verwerf.

Diagnostiese assessering

Dit word gebruik om uit te vind of enige spesifieke probleme bestaan ten opsigte van 'n afdeling van die werk ten einde die leerder te voorsien van toepaslike addisionele hulp en leiding. Die assessering help die opvoeder en die leerder om probleemareas, misverstande, wanopvattings en foutiewe gebruik en interpretasie van notasie te identifiseer.

'n Paar punte om in gedagte te hou:

- Probeer om nie te veel konsepte te toets binne 'n enkele diagnostiese assessering nie.
- Wees selektief in die tipe vrae wat jy kies.

- Diagnostiese assesserings moet met 'n sekere struktuur in gedagte ontwerp word. As 'n opvoeder moet jy besluit presies watter uitkomste jy wil assesseer en die inhoud van die assessering dienooreenkomstig struktureer.
- Die beoordeling is anders gemerk ander toetse wat die punt is nie die fokus nie, maar eerder die tipe foute wat die leerder gemaak het.

Die beoordeling word anders gemerk as ander toetse want die punt is nie die fokus nie, maar eerder die tipe foute wat die leerder gemaak het.

0: dui aan dat die leerder nie die konsep onder die knie het nie en dat daar 'n fundementele wiskundige probleem bestaan.

1: dui aan dat die leerder 'n idee het van die inhoud, maar nie ware begrip van die inhoud of die notasie toon nie.

2: dui op getuienis van 'n mate van begrip deur die leerder, maar verdere konsolidasie is steeds 'n vereiste.

3: dui op 'n duidelike bewys dat die leerder die konsep verstaan en die notasie korrek kan gebruik.

Sakrekenaar werkblad: assessering van diagnostiese vaardighede

1. Bereken:

    a) $242 + 63 =$
    b) $2 - 36 \times (114 + 25) =$
    c) $\sqrt{144 + 25} =$
    d) $\sqrt[4]{729} =$
    e) $-312 + 6 + 879 - 321 + 18\ 901 =$

2. Bereken:

    a) $\frac{2}{7} + \frac{1}{3} =$
    b) $2\frac{1}{5} - \frac{2}{9} =$
    c) $-2\frac{5}{6} + \frac{3}{8} =$
    d) $4 - \frac{3}{4} \times \frac{5}{7} =$
    e) $\left(\frac{9}{10} - \frac{8}{9}\right) \div \frac{3}{5} =$
    f) $2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) =$
    g) $\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{16}} =$

Self-assessering rubriek:

Naam:

Vraag	Antwoord	ja	nee	Indien nee, volgorde neer waarin die sleutels gedruk is
1a				
1b				
1c				
1d				
1e				
Subtotaal				
2a				
2b				
2c				
2d				
2e				
Subtotaal				
Totaal				

Opvoeder-assessering rubriek:

Tipe vaardigheid	Bemeester	Benodig oefening	Probleem
Verhoging na ’n mag			
Vind ’n wortel			
Berekeninge met breuke			
Hakies en volgorde van berekeninge			
Skattings en hoofreken-kontrole			

Riglyne vir assessering van sakrekenaarvaardighede:

Tipe vaardigheid	Onderafdeling	Vrae
Verhoging tot ’n mag	Vierkante en derdemagte Hoer orde magte	1a, 2f 1b
Vind ’n wortel	Vierkants en derdemagswortels Hoer order wortels	1c, 2g 1d
Berekeninge met breuke	Basiese erekeninge Gemengde getalle Negatiewe getalle Kwadree breuke Vierkantswortel van breuke	2a, 2d 2b, 2c 1e, 2c 2f 2g
Hakies en volgende van berekeninge	Korrekte gebruik van hakies of volgorde van berekeninge	1b, 1c, 2e, 2f, 2g
Skattings en hoofrekenkontrole	Algeheel	Almal

Voorgestelde riglyn vir die toekenning van algehele vlakke

Vlak 1

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Die leerder toon nie voldoende hoofrekenskatting en -kontrole vaardighede nie.

Vlak 2

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen met die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants- en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder toon 'n mate van hoofrekenskatting en –kontrole tegnieke.

Vlak 3

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen op die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants- en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is ook in staat om hoër-orde magte en wortels te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.
- Leerder werk korrek met negatiewe getalle.
- Leerder is in staat om hakies te gebruik in sekere berekeninge, maar verstaan nog nie ten volle die volgorde van bewerkings wat die sakrekenaar geprogrammeer is om uit te voer nie, vandaar die behoefte aan hakies.
- Leerder is in staat om moontlike foute en probleme in hul berekeninge te identifiseer, maar het hulp nodig om die probleem op te los.

Vlak 4

- Leerder is in staat om basiese bewerkings te doen op die sakrekenaar.
- Leerder is in staat om vierkante en derdemagte van heelgetalle asook vierkants- en derdemagswortels van getalle te bereken.
- Leerder is ook in staat om hoër-orde-magte en wortels te bereken.
- Leerder is in staat om eenvoudige berekeninge met betrekking tot breuke te doen, sowel as om bewerkings met gemengde breuke korrek uit te voer.

- Leerder werk korrek met negatiewe getalle.
- Leerder is in staat om korrek te werk met hakies en om die noodsaaklikheid en die gebruik van hakies en die ″= sleutel″in berekeninge reg te hanteer volgens die aard van ′n wetenskaplike sakrekenaar.
- Leerder is in staat om moontlike foute en probleme in hul berekeninge te identifiseer en om oplossings hiervoor te vind ten einde by ′n ″meer geloofwaardige-antwoord uit te kom.

Ander kort diagnostiese toetse

Dit is kort toetse wat klein hoeveelhede herroeping en toepassing van kennis op ′n dag-tot-dag basis assesseer. Sulke toetse kan vrae oor een of ′n kombinasie van die volgende insluit:

- Definisies
- Stellings
- Meetkunderprobleme
- Formules
- Toepassings
- Gekombineerde vrae

Oefeninge

Dit behels enige werk uit die handboek of ′n ander bron wat aan die leerder gegee word deur die opvoeder om in die klas óf tuis te voltooi. Opvoeders moet leerders aanmoedig om nie mekaar se werk te kopieer nie en moet oplettend en noukeurig wees in die nagaan van hierdie werk. Dit word aanbeveel dat hierdie tipe werk gemerk/gekontroleer sal word met behulp van ‘n kontrolelys (hieronder) om die proses vir die opvoeder te bespoedig.

Die punte wat behaal word deur die leerder vir ′n spesifieke stuk werk moet nie gebaseer wees op korrekte of verkeerde antwoorde nie, maar verkieslik op die volgende:

1. die poging van die leerder om antwoorde te produseer.
2. die kwaliteit van die regstellings aan werk wat voorheen verkeerd was.
3. die vermoë van die leerder om die inhoud van ′n paar geselekteerde voorbeelde (hetsy skriftelik of mondeling) te verduidelik.

Die volgende rubriek kan gebruik word om klas- of huiswerkoefeningete assesseer:

Kriteria	Prestasie-aanduiders		
Werk gedoen	2 Al die werk gedoen	1 Gedeeltelik voltooi	0 Geen werk gedoen
Werk netjies gedoen	2 Werk netjies gedoen	1 Sekere werk nie netjies gedoen nie	0 Slordig en deurmekaar
Regstellings gedoen	2 Deurgaans alle regstellings gedoen	1 Ten minste helfte van die restellings gedoen	0 Geen restellings gedoen
Korrekte wiskundige metode	2 Deurgaans	1 Soms	0 Glad nie
Begrip van wiskundige tegnieke en prosses	2 Kan konsepte en prossese akkuraat verduidelik	1 Verduidelikings is dubbelsinnig en nie gefokus nie	0 Verduidelikings is verwarrend of irrelevant

Joernaalinskrywings

'n Joernaalinskrywing is 'n poging deur 'n leerder om in geskrewe woorde uit te druk wat in Wiskunde gebeur. Dit is belangrik om in staat wees om 'n wiskundige probleem en die oplossing daarvan in die geskrewe taal te verwoord. Dit kan op verskillende maniere gedoen word:

- Vandag in wiskunde het ons geleer...
- Skryf 'n brief aan 'n vriend wat siek was om te verduidelik wat vandag gebeur het in die klas.
- Verduidelik die denkproses agter die poging om 'n spesifieke wiskundeprobleem op te los, bv. skets die grafiek va $y = x^2 - 2x^2 + 1$ en verduidelik hoe om so 'n grafiek te teken.
- Gee 'n oplossing vir 'n probleem, besluit of dit korrek is, en indien nie, verduidelik die moontlike probleme wat ervaar word deur die persoon wat die verkeerde oplossing geskryf het.

'n Joernaal is 'n waardevolle hulpmiddel wat die opvoeder in staat stel om wiskundige wanopvattings van die leerders te identifiseer. Die nasien van hierdie soort oefening kan gesien word as subjektief, maar 'n rubriek kan die taak vereenvoudig.

Die volgende rubriek kan gebruik word om joernaalinskrywings te merk. Die assesseringsrubriek moet aan leerders gegee voor die taak gedoen word.

Taak	Bevoegd (2 punte)	Ontwikkel nog (1 punt)	Nog nie ontwikkel (0 punte)
Voltooi binne tydsbeperking?			
Korrektheid van die verduideliking?			
Korrekte en toepaslike gebruik van wiskundige taal?			
Is die konsep korrek geinterpreteer?			

Vertalings

Vertaling assesseer die leerder se vermoë om woorde te vertaal in wiskundige notasie of om 'n verduideliking van wiskundige konsepte in woorde te gee. Dikwels wanneer leerders wiskundige taal en notasie korrek kan gebruik, toon hulle 'n groter begrip van die konsepte.

Byvoorbeeld:

Skryf die letter van die korrekte uitdrukking langs die ooreenstemmende nommer:

x word met 10 vermeeder	a)	xy
Die produk van x en y	b)	$x-2$
Die som van 'n sekere getal en dubbel daardie getal	c)	x^2
Helfte van 'n sekere getal vermenigvuldig met homself	d)	$\frac{1}{2}\times 2$
Twee minder as x	e)	$x+x+2$
'n Sekere getal vermenigvuldig met homself	f)	x^2

Groep werk

Een van die beginsels in die NKV is om leerders te produseer wat in staat is om effektief te werk in groepsverband. Leerders vind dit oor die algemeen moeilik om te doen, daarom moet hulle aangemoedig word om in klein groepies te werk. Dikwels ontwikkel leerders 'n beter begrip van konsepte en prosesse wanneer hulle met bystand van hulle maats werk. Slim leerders vind hierdie tipe taak gewoonlik moeilik, en tog is dit belangrik dat hulle leer hoe om te help en effektief te kommunikeer met ander leerders.

Breinkarts of metacogs

'n Metacog of "breinkaart"is 'n nuttige hulpmiddel. Dit help om idees te koppel en verbindings te vorm van sake wat andersins onverwant voorgekom het. 'n Breinkaart kan gebruik word aan die begin of einde van 'n afdeling ten einde leerders 'n oorsigtelike perspektief van die werk te gee, of as 'n herinnering aan 'n gedeelte van die werk wat reeds afgehandel is. Dit moet beklemtoon word dat dit nie 'n opsomming is nie. Ongeag hoe jy dit gebruik, dit is 'n geleentheid wat 'n leerder gegee word om navorsing te doen in 'n bepaalde veld en te kan toon dat hy/sy 'n begrip het van die betrokke afdeling.

Dit is 'n oopboek vorm van assessering en leerders kan enige materiaal gebruik wat hulle voel sal kan help. Daar word voorgestel dat hierdie aktiwiteit geoefen word, met behulp van ander onderwerpe, voor 'n breinkaart-toets voorgelê word vir portefeulje-assessering.

Na voltooiing van die beinkaart, moet die leerders in staat wees om insiggewende vrae daaroor te beantwoord. Dit is wat 'n breinkaart onderskei van 'n gewone opsomming van 'n afdeling van die werk. Leerders moet verwys na hul breinkaart wanneer die vrae beantwoord word, maar mag nie verwys na enige verwysingsmateriaal nie. Hier is ’n paar riglyne om aan leerders te gee waaraan voldoen moet word wanneer ‘n breinkaart saamgestel word, sowel as twee voorbeelde om leerders te help om aan die gang te kom . ’n Assesseringsrubriek word ook voorsien. Dit moet beskikbaar gestel word aan die leerders voor hulle begin om hulle breinkaarte saam te stel. Op die volgende bladsy is ’n modelvraag vir ’n breinkaart, asook ’n paar voorbeelde van vrae wat gevra kan word binne die konteks van die samestelling van ‘n breinkaart oor analitiese meetkunde.

’n Basiese breinkaart word op die volgende wyse saamgestel:

- Skryf die titel/onderwerp van die vak in die middel van die bladsy en trek ’n sirkel daar rondom.
- Vir die eerste hoofopskrif van die onderwerp, trek ’n streep uit die sirkel in enige rigting, en skryf die opskrif bo of onder die lyn.
- Vir die sub-opskrifte van die hoofopskrif, trek lyne vir elke onderafdeling uit die eerste lyn en benoem elkeen.
- Vir individuele feite, trek lyne uit die toepaslike opskrif.

’n Metacog (breinkaart) is ’n mens se persoonlike eiendom. Sodra iemand verstaan hoe om die basiese struktuur saam te stel, kan hulle hulle eie kodering en konvensies ontwikkel om dinge verder te neem, byvoorbeeld hoe om verbande en skakels tussen feite aan te toon. Die volgende wenke kan opvoeders en leerders help om die doeltreffendheid van hul breinkaarte te verbeter:

- Gebruik die enkele woorde of eenvoudige frases vir meer inligting. Oortollige woorde kompliseer die breinkaart en neem onnodige tyd om neer te skryf.
- Gebruik drukskrif: aanmekaar- of onduidelike skrif lees moeiliker en is minder aantreklik om na te kyk.
- Gebruik kleur om verskillende idees te skei - dit sal jou brein help om verskillende idees van mekaar te onderskei waar nodig, en help met visualisering van die breinkaart vir maklike herroepping. Kleur help ook om organisasie te wys.
- Gebruik simbole en diagramme/sketse waar van toepassing. As ’n simbool iets vir jou beteken en meer inligting oordra as woorde, gebruik dit. Prente/foto’s help ook om inligting te onthou.
- Gebruik vorms, sirkels en raampies om brokkies inligting met mekaar te verbind - dit is ’n bykomende hulpmiddels om die groepering van inligting voor te stel.

Gebruik die konsep van analitiese meetkunde as jou onderwerp en konstrueer ’n breinkaart (of metacog) met al die inligting (insluitend terminologie, definisies, formules en voorbeelde) wat jy ken oor die onderwerp van analitiese meetkunde. Moontlike vrae om die leerder te vra na voltooiing van die breinkaart:

- Verduidelik kortliks wat die wiskunde onderwerp van analitiese meetkunde behels.
- Identifiseer en verduidelik die afstandformule, die afleiding daarvan en die gebruik daarvan op jou breinkaart.

- Hoe verskil of stem die berekening van gradiënt in analitiese meetkunde ooreen met die benadering wat gebruik word om die gradiënt te bereken wanneer daar met funksies gewerk word?

'n Voorgestelde eenvoudige rubriek vir nasien van 'n breinkaart:

Taak	**Bevoegd (2 punte)**	**In ontwikkeling (1 punt)**	**Nog nie ontwikkel 1 punte)**
Betyds voltooi			
Hoofopskrifte			
Korrekte teorie (Formules, definisies, terminologie, ens.)			
Verduidelikking			
Leesbaarheid			

10 punte vir die vrae wat gemerk is met behulp van die volgende skaal:

0 - geen poging of 'n totaal verkeerde poging is gemaak

1 - 'n korrekte poging is aangewend, maar die leerder het nie die korrekte antwoord gekry nie

2 - 'n korrekte poging is aangewend en die antwoord is korrek

Ondersoeke

Ondersoeke bestaan uit oop vrae wat denkprosesse inisieer en uitbrei. Die aanleer en ontwikkeling van probleemoplossingsvaardighede is 'n noodsaaklike deel van die uitvoer van ondersoeke.

Dit word voorgestel dat 2 - 3 uur toegelaat word vir hierdie taak. Gedurende die eerste 30 - 45 minute behoort leerders aangemoedig te word om te praat oor die probleem, punte van verwarring uit te klaar, en die aanvanklike hipoteses met ander te bespreek. Die finale skriftelike weergawe moet individueel gedoen word en moet ongeveer vier bladsye beslaan.

Assessering van ondersoeke kan terugvoer of voordragte deur groepe of individue oor die resultate insluit, terwyl die volgende in gedagte gehou word:

- gebruik 'n logiese volgorde in die oplossing van probleme
- die pre-kennis wat nodig is om die probleem op te los
- die korrekte gebruik van wiskundige taal en notasie
- doelgerigtheid van die oplossing
- die kwaliteit van die geskrewe en mondelinge aanbieding

Enkele voorbeelde van voorgestelde assesseringskale ingesluit is op die volgende paar bladsye, gevolg deur 'n seleksie van onderwerpe vir moontlike ondersoeke. Die volgende riglyne moet aan leerders voorsien word voordat hulle 'n ondersoek begin:

Algemene instruksies aan leerders

- Jy kan enige van die gegewe projekte of ondersoeke kies (kyk modelvraag oor ondersoeke).
- Volg die instruksies wat saam met elke taak gegee word noukeurig aangesien dit beskryf hoe die finale produk aangebied moet word.
- Julle mag die probleem in groepe bespreek om kwessies uit te klaar, maar elke individu moet sy/haar eie weergawe op skrif stel.
- Kopiëring van mede-leerders sal meebring dat die taak gediskwalifiseer word.
- Jou opvoeders is 'n bron van hulp vir jou, en al sal hulle nie antwoorde of oplossings verskaf nie, kan hulle genader word vir wenke.

Die ondersoek moet ingehandig word op die datum deur jou opvoeder bepaal. Dit moet ten minste die volgende bevat:

- 'n beskrywing van die probleem
- 'n bespreking van die manier waarop jy te werk gaan om die probleem te hanteer
- 'n beskrywing van die finale resultaat met 'n toepaslike motivering oor die geldigheid van die oplossing
- persoonlike refleksies wat wiskundige of ander lesse wat geleer is, insluit, sowel as die gevoelens wat ervaar is in die ondersoek van die probleem.
- die geskrewe weergawe moet aantreklik en netjies aangebied word op sowat vier A4-bladsye.
- hoewel die gebruik van tegnologie in die aanbieding aangemoedig word, moet die wiskundige inhoud en prosesse die hooffokus bly.

Hier is 'n paar voorbeelde van 'n moontlike rubriek wat gebruik kan word vir die nasien van die ondersoek:

Vlak van prestasie	Kriteria
4	• Bevat 'n volledige antwoord. • Duidelike, samehangende, ondubbelsinnige en elegante verduideliking. • Sluit duidelike en eenvoudige diagramme in waar van toepassing. • Toon begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer die belangrikste elemente van die vraag. • Sluit voorbeelde en teenvoorbeelde in. • Gee sterk ondersteunende argumente. • Gaan verder as die vereistes van die probleem.
3	• Bevat 'n volledige antwoord. • Verduideliking minder elegant, minder volledig. • Toon begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer die belangrikste elemente van die vraag. • Gaan nie verder as die vereistes van die probleem nie.
2	• Bevat 'n onvolledige antwoord. • Verduideliking is nie logies en duidelik nie. • Toon 'n mate van begrip van die vraag se wiskundige idees en prosesse. • Identifiseer sommige van die belangrikste elemente van die vraag. • Bied argumente aan, maar onvolledig. • Sluit diagramme in, maar onvanpas of onduidelik.

1	• Bevat 'n onvolledige antwoord. • Laat belangrike dele van die vraag of die hele vraag en antwoord weg. • Bevat groot foute. • Gebruik onvanpaste strategieë.
0	• Geen sigbare antwoord of poging.

Mondelinge Assessering

'n Mondelinge assessering behels dat die leerder aan die hele klas of 'n groep of die opvoeder verduidelik wat hy/sy verstaan van 'n konsep of 'n probleem of spesifieke vrae beantwoord. Die fokus hier is op die korrekte gebruik van wiskundige taal deur die leerders; die bondigheid en logiese volgorde van die verduidelikings, sowel as hul kommunikasievaardighede.

Mondelinge gedoen kan op 'n aantal maniere gedoen word:

- 'n Leerder verduidelik die oplossing van 'n huiswerkprobleem wat deur die opvoeder gekies is.
- Die opvoeder vra die leerder 'n spesifieke vraag of 'n stel vrae om seker te maak dat die leerder verstaan en evalueer die leerder op sy/haar verduideliking.
- Die opvoeder neem 'n groep leerders waar wat interaksie het met mekaar en assesseer die leerders op hul bydraes en verduidelikings binne die groep.
- 'n Punt word toegeken aan die groep as geheel, op grond van die antwoord wat enige lid van die groep gee op 'n vraag.

'n Voorbeeld van 'n merkrubriek vir 'n mondeling:

1 - die leerder het die vraag verstaan en probeer om dit te beantwoord

2 - die leerder gebruik die korrekte wiskundige taal

2 - die verklaring van die leerder volg 'n logiese progressie

2 - die leerder se verduideliking is bondig en akkuraat

2 - die leerder toon 'n begrip van die konsep wat verduidelik is

1 - die leerder demonstreer goeie kommunikasievaardighede

Maksimum punt = 10

’n Voorbeeld van ’n eweknie-assesseringsrubriek vir ’n mondeling:

My naam:

Naam van persoon wat ek assesseer:

Kriteria	**Punt toegeken**	**Maksimum punt**
Korrekte antwoord		2
Helderheid en verduideliking		3
Korrektheid van verduideliking		3
Bewyse van begrip		2
Totaal		10

HOOFSTUK 1

Eksponente en wortels

- Bespreek die getalsisteem; verduidelik die verskil tussen reële en nie- reële getalle.
- Ontmoedig die leerders om sakrekenaars te gebruik in hierdie hoofstuk.
- Algemene wanopvatting: π (irrasionaal) $\approx$ $\frac{22}{7}$ (rasionaal).
- Verduidelik dat die vierkantswortel van 'n negatiewe getal nie- reëel is.
- Bespreek die verheffing van 'n negatiewe getal tot 'n ewe en tot 'n onewe mag.
- Verduidelik dat wortelvorme 'n spesiale notasie of skryfwyse vir rasionale eksponente is.
- Sleutelstrategie in die manipulasie van eksponensiële uitdrukkings: druk die grondtal uit in terme van sy priemfaktore.
- Beklemtoon die beginsel van ekwivalensie en die gebruik van die optellingsinverse in die vereenvoudiging van vergelykings (en nie eenvoudig 'neem die term na die ander kant toe' nie).
- Rasionalisering van die noemers is 'n handige hulpmiddel wanneer daar met spesiale hoeke in Trigonometrie gewerk word.
- Leerders behoort hulle finale antwoorde as gemengde breuke te skryf.
- Antwoorde behoort altyd geskryf te word met positiewe eksponente.

1.1 Hersiening

Die getallestelsel

Oefening 1 – 1: Die getallestelsel

Gebruik die lys van woorde hieronder om elk van die onderstaande getalle te beskryf (in sommige gevalle sal meer as een woord pas):

- Natuurlik ($\mathbb{N}$)
- Tel ($\mathbb{N}_0$)
- Heel ($\mathbb{Z}$)
- Rasionaal ($\mathbb{Q}$)
- Irrasionaal ($\mathbb{Q}'$)
- Reëel ($\mathbb{R}$)
- Nie-reëel ($\mathbb{R}'$)

1. $\sqrt{7}$

   Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}'$

2. $0{,}01$

   Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$

3. $16\frac{2}{5}$

   Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$

4. $\sqrt{6\frac{1}{4}}$

   Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$

5. 0

   Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}; \mathbb{Z}; \mathbb{N}_0$

6. 2π

   Oplossing: $\mathbb{R}'\mathbb{Q}'$

7. $-5{,}3\dot{8}$

   Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$

8. $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

   Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}'$

9. $-\sqrt{-3}$

   Oplossing: $\mathbb{R}'$

10. $(\pi)^2$

    Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}'$

11. $-\frac{9}{11}$

    Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$

12. $\sqrt[3]{-8}$

    Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}; \mathbb{Z}$

13. $\frac{22}{7}$

    Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$

14. $2{,}45897\ldots$

    Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}'$

15. $0{,}\overline{65}$

    Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}$

16. $\sqrt[5]{-32}$

    Oplossing: $\mathbb{R}; \mathbb{Q}; \mathbb{Z}$

Eksponentwette

Oefening 1 – 2: Eksponentwette

Vereenvoudig die volgende:

1. $4 \times 4^{2a} \times 4^2 \times 4^a$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 4 \times 4^{2a} \times 4^2 \times 4^a &= 4^{1+2a+2+a} \\ &= 4^{3a+3} \end{aligned}$$

2. $\frac{3^2}{2^{-3}}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{3^2}{2^{-3}} &= 3^2 \times 2^3 \\ &= 9 \times 8 \\ &= 72 \end{aligned}$$

3. $(3p^5)^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(3p^5)^2 &= 3^2 \times p^{10}\\ &= 9p^{10}\end{aligned}$$

4. $\frac{k^2 k^{3x-4}}{k^x}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{k^2 k^{3x-4}}{k^x} &= \frac{k^{3x-2}}{k^x}\\ &= k^{3x-2-(x)}\\ &= k^{2x-2}\end{aligned}$$

5. $(5^{z-1})^2 + 5^z$

Oplossing:

$$(5^{z-1})^2 + 5^z = 5^{2z-2} + 5^z$$

6. $(\frac{1}{4})^0$

Oplossing:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$$

7. $(x^2)^5$

Oplossing:

$$\left(x^2\right)^5 = x^{10}$$

8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} &= \frac{a^{-2}}{b^{-2}}\\ &= \frac{b^2}{a^2}\end{aligned}$$

9. $(m+n)^{-1}$

Oplossing:

$$(m+n)^{-1} = \frac{1}{m+n}$$

10. $2(p^t)^s$

Oplossing:

$$2\left(p^{t}\right)^{s} = 2p^{ts}$$

11. $\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}}$

Oplossing:

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{-1}} = \frac{1}{a}$$

12. $\frac{k^{0}}{k^{-1}}$

Oplossing:

$$\frac{k^{0}}{k^{-1}} = k$$

13. $\frac{-2}{-2^{-a}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{-2}{-2^{-a}} &= 2 \times 2^{a} \\ &= 2^{a+1}\end{aligned}$$

14. $\frac{-h}{(-h)^{-3}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{-h}{(-h)^{-3}} &= -h\,(-h)^{3} \\ &= -h\left(-h^{3}\right) \\ &= h^{4}\end{aligned}$$

15. $\left(\frac{a^{2}b^{3}}{c^{3}d}\right)^{2}$

Oplossing:

$$\left(\frac{a^{2}b^{3}}{c^{3}d}\right)^{2} = \frac{a^{4}b^{6}}{c^{6}d^{2}}$$

16. $10^{7}(7^{0}) \times 10^{-6}(-6)^{0} - 6$

Oplossing:

$$\begin{aligned}10^{7}\left(7^{0}\right) \times 10^{-6}\,(-6)^{0} - 6 &= 10^{7}(1) \times 10^{-6}(1) - 6 \\ &= 10^{1} - 6 \\ &= 4\end{aligned}$$

17. $m^{3}n^{2} \div nm^{2} \times \frac{mn}{2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} m^3n^2 \div nm^2 \times \frac{mn}{2} &= m^3n^2 \times \frac{1}{m^2n} \times \frac{mn}{2} \\ &= \frac{m^3n^2}{m^2n} \times \frac{mn}{2} \\ &= \frac{m^2n^2}{2} \end{aligned}$$

18. $(2^{-2} - 5^{-1})^{-2}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \left(2^{-2} - 5^{-1}\right)^{-2} &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{1}{20}\right)^{-2} \\ &= 20^2 \\ &= 400 \end{aligned}$$

19. $(y^2)^{-3} \div \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \left(y^2\right)^{-3} \div \left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-1} \div \frac{y^{-2}}{x^{-2}} &= \frac{1}{y^6} \times \frac{x^2}{y^3} \times \frac{y^2}{x^2} \\ &= \frac{1}{y^7} \end{aligned}$$

20. $\frac{2^{c-5}}{2^{c-8}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2^{c-5}}{2^{c-8}} &= 2^{(c-5)-(c-8)} \\ &= 2^{c-5-c+8} \\ &= 2^3 \\ &= 8 \end{aligned}$$

21. $\frac{2^{9a} \times 4^{6a} \times 2^2}{8^{5a}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{2^{9a} \times 4^{6a} \times 2^2}{8^{5a}} &= \frac{2^{9a} \times 2^{12a} \times 2^2}{2^{15a}} \\ &= \frac{2^{9a+12a+2}}{2^{15a}} \\ &= 2^{21a+2-15a} \\ &= 2^{6a+2} \end{aligned}$$

22. $\frac{20t^5p^{10}}{10t^4p^9}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{20t^5p^{10}}{10t^4p^9} &= 2t^{5-4}p^{10-9} \\ &= 2pt\end{aligned}$$

23. $\left(\frac{9q^{-2s}}{q^{-3s}y^{-4a-1}}\right)^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\frac{9q^{-2s}}{q^{-3s}y^{-4a-1}}\right)^2 &= \frac{\left(9q^{-2s}\right)^2}{(q^{-3s}y^{-4a-1})^2} \\ &= \frac{81q^{-4s}}{q^{-6s}y^{-8a-2}} \\ &= \frac{81q^{6s}}{q^{4s}y^{-(8a+2)}} \\ &= 81q^{2s}y^{8a+2}\end{aligned}$$

1.2 Rasionale eksponente en wortels

Oefening 1 – 3: Rasionale eksponente en wortels

1. Vereenvoudig die volgende en skryf die antwoorde met positiewe eksponente:

a) $\sqrt{49}$

b) $\sqrt{36^{-1}}$

c) $\sqrt[3]{6^{-2}}$

d) $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$

e) $\sqrt[4]{(16x^4)^3}$

Oplossing:

a) $\sqrt{49} = 7$

b)

$$\begin{aligned}36^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{36^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{36}} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 6^{-\dfrac{2}{3}} &= \frac{1}{6^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{6^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{36}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{-\frac{64}{27}} &= \sqrt[3]{-\frac{4^3}{3^3}} \\ &= \sqrt[3]{\left(-\frac{4}{3}\right)^3} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{(16x^4)^3} &= \left((16x^4)^3\right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(2^4x^4\right)^{\frac{3}{4}} \\ &= 2^3x^3 \\ &= 8x^3 \end{aligned}$$

2. Vereenvoudig:

a) $s^{\frac{1}{2}} \div s^{\frac{1}{3}}$

b) $\left(64m^6\right)^{\frac{2}{3}}$

c) $\dfrac{12m^{\frac{7}{9}}}{8m^{-\frac{11}{9}}}$

d) $(5x)^0 + 5x^0 - (0{,}25)^{-0{,}5} + 8^{\frac{2}{3}}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} s^{\frac{1}{2}} \div s^{\frac{1}{3}} &= s^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{s^{\frac{1}{3}}} \\ &= s^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} \\ &= s^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}} \\ &= s^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left(64m^6\right)^{\frac{2}{3}} &= \left(2^6\right)^{\frac{2}{3}}\left(m^6\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= \left(2^4\right)\left(m^4\right) \\ &= 16m^4 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{12m^{\frac{7}{9}}}{8m^{-\frac{11}{9}}} &= \frac{3}{2}m^{\frac{7}{9}-(-\frac{11}{9})}\\ &= \frac{3}{2}m^{\frac{18}{9}}\\ &= \frac{3}{2}m^2\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}(5x)^0 + 5x^0 - (0{,}25)^{-0{,}5} + 8^{\frac{2}{3}} &= (1) + 5(1) - \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}\\ &= 6 - 4^{\frac{1}{2}} + 4\\ &= 10 - 2\\ &= 8\end{aligned}$$

3. Gebruik die wette om die volgende uitdrukking te herskryf as 'n mag van x:

   $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}} &= x \times x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{1}{8}} \times x^{\frac{1}{16}}\\ &= x^{\frac{16}{16}} \times x^{\frac{8}{16}} \times x^{\frac{4}{16}} \times x^{\frac{2}{16}} \times x^{\frac{1}{16}}\\ &= x^{\frac{31}{16}}\end{aligned}$$

Vereenvoudiging van wortelvorme

Oefening 1 – 4: Vereenvoudiging van wortelvorme

1. Vereenvoudig die volgende en skryf die antwoorde met positiewe eksponente:

   a) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4}$
   b) $\sqrt{a^2b^3} \times \sqrt{b^5c^4}$
   c) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$
   d) $\sqrt{x^2y^{13}} \div \sqrt{y^5}$

   Oplossing:

   a) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{16 \times 4} = \sqrt[3]{64} = 4$
   b) $\sqrt{a^2b^3} \times \sqrt{b^5c^4} = \sqrt{a^2b^8c^4} = ab^4c^2$
   c) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$

d) $\sqrt{x^2y^{13}} \div \sqrt{y^5} = \sqrt{\frac{x^2y^{13}}{y^5}} = \sqrt{x^2y^8} = xy^4$

2. Vereenvoudig die volgende:

a) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}$

b) $\dfrac{b-a}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1} &= \left(\frac{b-a}{ab}\right)^{-1} \\ &= \frac{ab}{b-a} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} &= -\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} \\ &= -\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

Rasionalisering van die noemers

Oefening 1 – 5: Rasionalisering van die noemer

Rasionaliseer die noemer in elk van die volgende:

1. $\frac{10}{\sqrt{5}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{10}{\sqrt{5}} &= \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10\sqrt{5}}{5} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

2. $\frac{3}{\sqrt{6}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{6}} &= \frac{3}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\\ &= \frac{3\sqrt{6}}{6}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

3. $\frac{2}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{2}}{3}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{2}}{3} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{2}}{3}\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{6}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\\ &= \frac{6\sqrt{6}}{6}\\ &= \sqrt{6}\end{aligned}$$

4. $\dfrac{3}{\sqrt{5}-1}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sqrt{5}-1} &= \frac{3}{\sqrt{5}-1} \times \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}\\ &= \frac{3\sqrt{5}+3}{5-1}\\ &= \frac{3\sqrt{5}+3}{4}\end{aligned}$$

5. $\frac{x}{\sqrt{y}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{y}} &= \frac{x}{\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\\ &= \frac{x\sqrt{y}}{y}\end{aligned}$$

6. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}+\sqrt{7}\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{14}}{2}\end{aligned}$$

7. $\frac{3\sqrt{p}-4}{\sqrt{p}}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{p}-4}{\sqrt{p}} &= \frac{3\sqrt{p}-4}{\sqrt{p}} \times \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p}} \\ &= \frac{3\left(\sqrt{p}\right)^2 - 4\left(\sqrt{p}\right)}{p} \\ &= \frac{3p-4\sqrt{p}}{p}\end{aligned}$$

8. $\frac{t-4}{\sqrt{t}+2}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{t-4}{\sqrt{t}+2} &= \frac{t-4}{\sqrt{t}+2} \times \frac{\sqrt{t}-2}{\sqrt{t}-2} \\ &= \frac{(t-4)\left(\sqrt{t}-2\right)}{t-4} \\ &= \sqrt{t}-2\end{aligned}$$

9. $(1+\sqrt{m})^{-1}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{m})^{-1} &= \frac{1}{1+\sqrt{m}} \times \frac{1-\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \\ &= \frac{1-\sqrt{m}}{1-m}\end{aligned}$$

10. $a\left(\sqrt{a} \div \sqrt{b}\right)^{-1}$

    Oplossing:

$$\begin{aligned}a\left(\sqrt{a} \div \sqrt{b}\right)^{-1} &= a\left(\sqrt{a} \times \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^{-1} \\ &= a\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^{-1} \\ &= a\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{a\sqrt{ab}}{a} \\ &= \sqrt{ab}\end{aligned}$$

Oefening 1 – 6: Oplos van wortelvormvergelykings

Los die onbekende veranderlike op (onthou om te kontroleer dat die oplossing geldig is):

1. $2^{x+1} - 32 = 0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 2^{x+1} - 32 &= 0 \\ 2^{x+1} &= 32 \\ 2^{x+1} &= 2^5 \\ \therefore x + 1 &= 5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

2. $125\left(3^p\right) = 27\left(5^p\right)$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 125\left(3^p\right) &= 27\left(5^p\right) \\ \frac{5^p}{3^p} &= \frac{125}{27} \\ \left(\frac{5}{3}\right)^p &= \left(\frac{5}{3}\right)^3 \\ \therefore p &= 3 \end{aligned}$$

3. $2y^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{4}} + 1 = 0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 2y^{\frac{1}{2}} - 3y^{\frac{1}{4}} + 1 &= 0 \\ \left(2y^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(y^{\frac{1}{4}} - 1\right) &= 0 \\ \text{Dus } 2y^{\frac{1}{4}} - 1 &= 0 \\ y^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2} &= 0 \\ y^{\frac{1}{4}} &= \frac{1}{2} \\ y^{\frac{4}{4}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ \therefore y &= \frac{1}{16} \\ &\text{of} \\ y^{\frac{1}{4}} - 1 &= 0 \\ y^{\frac{1}{4}} &= 1 \\ \therefore y &= 1 \end{aligned}$$

4. $t-1=\sqrt{7-t}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
t-1 &= \sqrt{7-t} \\
(t-1)^2 &= \left(\sqrt{7-t}\right)^2 \\
t^2-2t+1 &= 7-t \\
t^2-t-6 &= 0 \\
(t-3)(t+2) &= 0 \\
\therefore t &= 3 \text{ of } t=-2 \\
\text{Toets RK vir } t=3: &= \sqrt{7-3} \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2 \\
&= \text{LK} \therefore \text{ geldige oplossing} \\
\text{Toets RK vir } t=-2: &= \sqrt{7-(-2)} \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3 \\
&\neq \text{LK} \therefore \text{ ongeldige oplossing}
\end{aligned}$$

5. $2z-7\sqrt{z}+3=0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
2z-7z^{\frac{1}{2}}+3 &= 0 \\
\left(z^{\frac{1}{2}}-3\right)\left(2z^{\frac{1}{2}}-1\right) &= 0 \\
\text{Dus } z^{\frac{1}{2}}-3 &= 0 \\
\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= 3^2 \\
\therefore z &= 9 \\
\text{of}& \\
2z^{\frac{1}{2}}-1 &= 0 \\
\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
\therefore z &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

6. $x^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}+1)=6$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right) &= 6 \\
x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}} &= 6 \\
\left(x^{\frac{1}{3}}-2\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+3\right) &= 0 \\
\text{Dus } x^{\frac{1}{3}}-2 &= 0 \\
x^{\frac{1}{3}} &= 2 \\
\therefore x &= 8 \\
\text{of} & \\
x^{\frac{1}{3}}+3 &= 0 \\
x^{\frac{1}{3}} &= -3 \\
\therefore x &= -27
\end{aligned}
$$

7. $2^{4n} - \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = 0$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2^{4n} - \frac{1}{\sqrt[4]{16}} &= 0 \\
2^{4n} &= \frac{1}{16^{\frac{1}{4}}} \\
2^{4n} &= \frac{1}{(2^4)^{\frac{1}{4}}} \\
2^{4n} &= \frac{1}{2} \\
2^{4n} &= 2^{-1} \\
\therefore 4n &= -1 \\
\therefore n &= -\frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

8. $\sqrt{31-10d} = 4 - d$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{31-10d} &= d-4 \\
\left(\sqrt{31-10d}\right)^2 &= (d-4)^2 \\
31-10d &= d^2-8d+16 \\
0 &= d^2+2d-15 \\
0 &= (d-3)(d+5) \\
\text{Dus } d &= 3 \\
\text{of} \\
d &= -5 \\
\text{Toets LK vir } d=3: &= \sqrt{31-30} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1 \\
&= \text{RK} \therefore \text{ geldige oplossing} \\
\text{Toets LK vir } t=-5: &= \sqrt{31-(-50)} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9 \\
&= \text{RK} \therefore \text{ geldige oplossing}
\end{aligned}
$$

9. $y-10\sqrt{y}+9=0$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y-10\sqrt{y}+9 &= 0 \\
y-10y^{\frac{1}{2}}+9 &= 0 \\
\left(y^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(y^{\frac{1}{2}}-9\right) &= 0 \\
\text{Dus } y^{\frac{1}{2}}-1 &= 0 \\
y^{\frac{1}{2}} &= 1 \\
\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= (1)^2 \\
\therefore y &= 1 \\
\text{of} \\
y^{\frac{1}{2}}-9 &= 0 \\
y^{\frac{1}{2}} &= 9 \\
\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2 &= (9)^2 \\
\therefore y &= 81
\end{aligned}
$$

10. $f=2+\sqrt{19-2f}$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
f &= 2 + \sqrt{19 - 2f} \\
f - 2 &= \sqrt{19 - 2f} \\
(f - 2)^2 &= \left(\sqrt{19 - 2f}\right)^2 \\
f^2 - 4f + 4 &= 19 - 2f \\
f^2 - 2f - 15 &= 0 \\
(f - 5)(f + 3) &= 0 \\
\text{Dus } f - 5 &= 0 \\
\therefore f &= 5 \\
\text{of} & \\
f + 3 &= 0 \\
\therefore f &= -3 \\
\text{Toets RK vir } f = 5: &= 2 + \sqrt{19 - 10} \\
&= 2 + \sqrt{9} \\
&= 5 \\
&= \text{LK} \therefore \text{ geldige oplossing} \\
\text{Toets RK vir } f = -3: &= 2 + \sqrt{19 + 6} \\
&= 2 + \sqrt{25} \\
&= 7 \\
&\neq \text{LK} \therefore \text{ ongeldige oplossing}
\end{aligned}
$$

1.4 Toepassings van eksponentuitdrukkings

Oefening 1 – 7: Toepassings van eksponentuitdrukkings

1. Nqobani belê R 5530 in 'n rekening wat 'n grootsom uitbetaal aan die einde van 6 jaar. As hy R 9622,20 kry aan die einde van die periode, watter saamgestelde rentekoers het die bank hom aangebied? Gee jou antwoord korrek tot een desimale plek.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
A &= 9622{,}20 \\
P &= 5530 \\
n &= 6
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
9622{,}20 &= 5530(1+i)^6 \\
\frac{9622{,}20}{5530} &= (1+i)^6 \\
\sqrt[6]{\frac{9622{,}20}{5530}} &= 1+i \\
\sqrt[6]{\frac{9622{,}20}{5530}} - 1 &= i \\
\therefore i &= 0{,}096709\ldots \\
&= 9{,}7\%
\end{aligned}$$

2. Die huidige bevolking van Johannesburg is $3\ 885\ 840$ en die gemiddelde bevolkingsgroei in Suid-Afrika is $0{,}7\%$ p.a. Hoe groot kan die stadsbeplannners verwag sal die bevolking van Johannesburg wees na 13 jaar?

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
P &= 3\ 885\ 840 \\
i &= 0{,}007 \\
n &= 13
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 3\ 885\ 840(1+0{,}007)^{13} \\
&= 4\ 254\ 691
\end{aligned}$$

3. Abiona sit 3 boeke in 'n stapel op haar lessenaar. Die volgende dag tel sy die boeke in die stapel en sit dan nog net soveel boeke bo-op die stapel neer. Na hoeveel dae sal sy 'n stapel van 192 boeke hê?

   Oplossing:

   $3; 6; 12; 24; 48; \ldots$

$$\begin{aligned}
3 \times 2^{n-1} &= 192 \\
2^{n-1} &= 64 \\
&= 2^6 \\
\therefore n-1 &= 6 \\
\therefore n &= 7
\end{aligned}$$

4. 'n Tipe skimmel het 'n baie hoë eksponensiële groeitempo van 40% per uur. As daar aanvanklik 45 individuele skimmelselle in die bevolking is, bepaal dan hoeveel daar sal wees in 19 ure.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Bevolking} &= \text{aanvanklike bevolking} \times (1 + \text{groeitempo})^{\text{tydsperiode in ure}} \\
&= 45(1+0{,}4)^{19} \\
&= 26\ 893
\end{aligned}$$

Oefening 1 – 8: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Vereenvoudig so ver as moontlik:

a) $8^{-\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt{16} + 8^{-\frac{2}{3}}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} 8^{-\frac{2}{3}} &= \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 2^{-2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sqrt{16} + 8^{-\frac{2}{3}} &= 4 + \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}} \\ &= 4 + \frac{1}{4} \\ &= 4\frac{1}{4} \end{aligned}$$

2. Vereenvoudig:

a) $\left(x^3\right)^{\frac{4}{3}}$

b) $\left(s^2\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(m^5\right)^{\frac{5}{3}}$

d) $\left(-m^2\right)^{\frac{4}{3}}$

e) $-\left(m^2\right)^{\frac{4}{3}}$

f) $\left(3y^{\frac{4}{3}}\right)^4$

Oplossing:

a)

$$\left(x^3\right)^{\frac{4}{3}} = x^4$$

b)

$$\left(s^2\right)^{\frac{1}{2}} = s$$

c)

$$\left(m^5\right)^{\frac{5}{3}} = m^{\frac{25}{3}}$$

d)

$$\left(-m^2\right)^{\frac{4}{3}} = m^{\frac{8}{3}}$$

e)

$$-\left(m^2\right)^{\frac{4}{3}} = -m^{\frac{8}{3}}$$

f)

$$\left(3y^{\frac{4}{3}}\right)^4 = 81y^{\frac{16}{3}}$$

3. Vereenvoudig die volgende:

a) $\frac{3a^{-2}b^{15}c^{-5}}{(a^{-4}b^{3}c)^{\frac{-5}{2}}}$

b) $\left(9a^{6}b^{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

c) $\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^{16}$

d) $x^{3}\sqrt{x}$

e) $\sqrt[3]{x^{4}b^{5}}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\frac{3a^{-2}b^{15}c^{-5}}{(a^{-4}b^{3}c)^{-\frac{5}{2}}} &= \frac{3a^{-2}b^{15}c^{-5}}{a^{10}b^{-\frac{15}{2}}c^{-\frac{5}{2}}}\\ &= \frac{3b^{15+\frac{15}{2}}}{a^{12}c^{5-\frac{5}{2}}}\\ &= \frac{3b^{\frac{45}{2}}}{a^{12}c^{\frac{5}{2}}}\end{aligned}$$

b)

$$\left(9a^{6}b^{4}\right)^{\frac{1}{2}} = 3a^{3}b^{2}$$

c)

$$\left(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{4}}\right)^{16} = a^{24}b^{12}$$

d)

$$\begin{aligned}x^{3}\sqrt{x} &= x^{3}\times x^{\frac{1}{2}}\\ &= x^{\frac{6}{2}}\times x^{\frac{1}{2}}\\ &= x^{\frac{7}{2}}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^{4}b^{5}} &= \left(x^{4}b^{5}\right)^{\frac{1}{3}}\\ &= x^{\frac{4}{3}}b^{\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

4. Herskryf die volgende uitdrukking as 'n mag van x:

$\frac{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{x^{2}}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}{x^{2}} &= \frac{x\times x^{\frac{1}{2}}\times x^{\frac{1}{4}}\times x^{\frac{1}{8}}\times x^{\frac{1}{16}}}{x^{2}}\\ &= \frac{x^{\frac{31}{16}}}{x^{\frac{32}{16}}}\\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{16}}}\end{aligned}$$

5. Brei uit:

$\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= x-2\end{aligned}$$

6. Rasionaliseer die noemer:

   $\frac{10}{\sqrt{x}-\frac{1}{x}}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{10}{\sqrt{x}-1} &= \frac{10}{\sqrt{x}-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\\ &= \frac{10\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}\\ &= \frac{10\sqrt{x}+10}{x-1}\end{aligned}$$

7. Skryf as 'n enkele term met 'n rasionale noemer:

   $\frac{3}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x} &= \frac{3+2\sqrt{x}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{3+2x}{2\sqrt{x}}\times\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\\ &= \frac{3\sqrt{x}+2x\sqrt{x}}{2x}\end{aligned}$$

8. Skryf in die eenvoudigste wortelvorm:

   a) $\sqrt{72}$

   b) $\sqrt{45}+\sqrt{80}$

   c) $\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}}$

   d) $\frac{\sqrt{18}\div\sqrt{72}}{\sqrt{8}}$

   e) $\frac{4}{\left(\sqrt{8}\div\sqrt{2}\right)}$

   f) $\frac{16}{\left(\sqrt{20}\div\sqrt{12}\right)}$

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned}\sqrt{72} &= \sqrt{8\times 9}\\ &= \sqrt{8}\times\sqrt{9}\\ &= 2\sqrt{2}\times 3\\ &= 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}\sqrt{45}+\sqrt{80} &= \sqrt{5\times 9}+\sqrt{5\times 16}\\ &= 3\sqrt{5}+4\sqrt{5}\\ &= 7\sqrt{5}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} &= \sqrt{\frac{48}{12}}\\ &= \sqrt{4}\\ &= 2\\ \text{of } \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{12}} &= \frac{\sqrt{3\times 16}}{\sqrt{3\times 4}}\\ &= \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\ &= \frac{4}{2}\\ &= 2\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{18}\div\sqrt{72}}{\sqrt{8}} &= \frac{\sqrt{\frac{18}{72}}}{\sqrt{8}}\\ &= \frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}\\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\frac{4}{\sqrt{8}\div\sqrt{2}} &= \frac{4}{2\sqrt{2}\div\sqrt{2}}\\ &= \frac{4}{2}\\ &= 2\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\frac{16}{\sqrt{20}\div\sqrt{12}} &= \frac{16}{2\sqrt{5}\div 2\sqrt{3}}\\ &= \frac{16}{\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}}\\ &= 16\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\\ &= 16\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\\ &= \frac{16\sqrt{15}}{5}\end{aligned}$$

9. Brei uit en vereenvoudig:

   a) $\left(2+\sqrt{2}\right)^2$

b) $\left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{8}\right)$

c) $\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{2}\right)^2 &= \left(2+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)\\ &= 4+4\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= 4+4\sqrt{2}+2\\ &= 6+4\sqrt{2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{8}\right) &= \left(2+\sqrt{2}\right)\left(1+2\sqrt{2}\right)\\ &= 2+4\sqrt{2}+\sqrt{2}+2\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= 2+5\sqrt{2}+2(2)\\ &= 6+5\sqrt{2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{8}+\sqrt{3}\right) &= 1+\sqrt{8}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{8\times 3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\\ &= 1+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+3\\ &= 4+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}\end{aligned}$$

10. Vereenvoudig, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\sqrt{5}\left(\sqrt{45}+2\sqrt{80}\right)$

b) $\frac{\sqrt{98}-\sqrt{8}}{\sqrt{50}}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{5}\left(\sqrt{45}+2\sqrt{80}\right) &= \sqrt{5}\left(\sqrt{9\times 5}+2\sqrt{16\times 5}\right)\\ &= \sqrt{5}\left(3\sqrt{5}+8\sqrt{5}\right)\\ &= 3\times 5+8\times 5\\ &= 15+40\\ &= 55\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{98}-\sqrt{8}}{\sqrt{50}} &= \frac{\sqrt{49\times 2}-\sqrt{4\times 2}}{\sqrt{25\times 2}}\\ &= \frac{7\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\\ &= \frac{5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}\\ &= 1\end{aligned}$$

11. Vereenvoudig:

$\sqrt{98x^6} + \sqrt{128x^6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\sqrt{98x^6} + \sqrt{128x^6} &= \sqrt{2 \times 49x^6} + \sqrt{2 \times 64x^6} \\
&= 7x^3\sqrt{2} + 8x^3\sqrt{2} \\
&= 15\sqrt{2}x^3
\end{aligned}$$

12. Rasionaliseer die noemer:

a) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}$

b) $\frac{y-4}{\sqrt{y}-2}$

c) $\frac{2x-20}{\sqrt{x}-\sqrt{10}}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} &= \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{5+2\sqrt{5}}{5} \\
&= 1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{y}-4}{\sqrt{y}-2} &= \frac{y-4}{\sqrt{y}-2} \times \frac{\sqrt{y}+2}{\sqrt{y}+2} \\
&= \frac{y\sqrt{y}+2y-4\sqrt{y}-8}{y-4} \\
&= \frac{2y+y\sqrt{y}-4\sqrt{y}-8}{y-4}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{2x-20}{\sqrt{x}-\sqrt{10}} &= \frac{2x-20}{\sqrt{x}-\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{10}}{\sqrt{x}+\sqrt{10}} \\
&= \frac{2(x-10)\left(\sqrt{x}+\sqrt{10}\right)}{x-10} \\
&= 2\sqrt{x} + 2\sqrt{10}
\end{aligned}$$

13. Evalueer sonder die gebruik van 'n sakrekenaar: $\left(2 - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(2 + \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Oplossing:

$$\left(2-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(4-\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\frac{16}{4}-\frac{7}{4}}$$
$$= \sqrt{\frac{9}{4}}$$
$$= \frac{3}{2}$$

14. Bewys (sonder die gebruik van 'n sakrekenaar):

    $\sqrt{\frac{8}{3}}+5\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{10\sqrt{15}+3\sqrt{6}}{6}$

    Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sqrt{\frac{8}{3}}+5\sqrt{\frac{5}{3}}-\sqrt{\frac{1}{6}} \\
&= \sqrt{\frac{8}{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+5\sqrt{\frac{5}{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\sqrt{\frac{1}{6}}\times\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{\sqrt{8}\sqrt{3}}{3}+5\frac{\sqrt{5}\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6} \\
&= \frac{2\sqrt{24}}{6}+\frac{10\sqrt{15}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{6} \\
&= \frac{4\sqrt{6}+10\sqrt{15}-\sqrt{6}}{6} \\
&= \frac{10\sqrt{15}+3\sqrt{6}}{6} \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

15. Vereenvoudig volkome en toon al jou stappe (moenie 'n sakrekenaar gebruik nie):

$$3^{-\frac{1}{2}}\left[\sqrt{12}+\sqrt[3]{\left(3\sqrt{3}\right)}\right]$$

    Oplossing:

$$\begin{aligned}
3^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{12}+\sqrt[3]{3\sqrt{3}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}+\sqrt[3]{3\times 3^{\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}+\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\sqrt{3}+3^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(3\sqrt{3}\right) \\
&= 3
\end{aligned}$$

16. Vul die wortelvorm aan die regterkant in wat die volgende bewering sal waar maak: $-3\sqrt{6}\times -2\sqrt{24} = -\sqrt{18}\times \ldots$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= -3\sqrt{6} \times -2\sqrt{24} \\
&= 6\sqrt{6}\sqrt{4 \times 6} \\
&= 12\sqrt{6}\sqrt{6} \\
&= 12(6) \\
&= 72 \\
\text{Dus as LK} &= \text{RK} \\
\text{RK} &= 72 \\
&= \sqrt{5184} \\
&= -\sqrt{18} \times -\sqrt{288}
\end{aligned}$$

17. Los op vir die onbekende veranderlike:

a) $3^{x-1} - 27 = 0$

b) $8^x - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = 0$

c) $27(4^x) = (64)3^x$

d) $\sqrt{2x - 5} = 2 - x$

e) $2x^{\frac{2}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
3^{x-1} - 27 &= 0 \\
3^{x-1} &= 27 \\
3^{x-1} &= 3^3 \\
x - 1 &= 3 \\
\therefore x &= 4
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
8^x - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} &= 0 \\
2^{3x} &= \frac{1}{\sqrt[3]{2^3}} \\
2^{3x} &= \frac{1}{2} \\
2^{3x} &= 2^{-1} \\
\therefore x &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned}
8^x - \frac{1}{\sqrt[3]{8}} &= 0 \\
8^x &= \frac{1}{\sqrt[3]{8}} \\
8^x &= 8^{-\frac{1}{3}} \\
\therefore x &= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
27(4^x) &= (64)3^x \\
\frac{27}{64} &= \frac{3^x}{4^x} \\
\frac{3^3}{4^3} &= \left(\frac{3}{4}\right)^x \\
\left(\frac{3}{4}\right)^3 &= \left(\frac{3}{4}\right)^x \\
\therefore x &= 3
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x-5} &= 2-x \\
\left(\sqrt{2x-5}\right)^2 &= (2-x)^2 \\
2x-5 &= 4-4x+x^2 \\
0 &= x^2-6x+9 \\
0 &= (x-3)(x-3) \\
\therefore x &= 3 \\
\text{Toets oplossing: LK } &= \sqrt{2(3)-5} \\
&= \sqrt{6-5} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1 \\
\text{Toets oplossing: RK } &= 2-3 \\
&= -1 \\
\text{RK } &\neq \text{LK} \\
&\therefore \text{Geen oplossing}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
2x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-2 &= 0 \\
\left(2x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+2\right) &= 0 \\
\therefore 2x^{\frac{1}{3}}-1 &= 0 \\
2x^{\frac{1}{3}} &= 1 \\
x^{\frac{1}{3}} &= \frac{1}{2} \\
\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
\therefore x &= \frac{1}{8} \\
&\text{of} \\
x^{\frac{1}{3}}+2 &= 0 \\
x^{\frac{1}{3}} &= -2 \\
\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 &= (-2)^3 \\
x &= -8 \\
\text{Dus } x = \frac{1}{8} &\text{ of } x = -8
\end{aligned}$$

18. a) Wys dat $\sqrt{\frac{3^{x+1}-3^{x}}{3^{x-1}}+3}$ gelyk is aan 3

b) Los vervolgens op $\sqrt{\frac{3^{x+1}-3^{x}}{3^{x-1}}+3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sqrt{\frac{3^{x+1}-3^{x}}{3^{x-1}}+3} \\
&= \sqrt{\frac{3^{x+1}}{3^{x-1}}-\frac{3^{x}}{3^{x-1}}+3} \\
&= \sqrt{3^{x+1-x+1}-3^{x-x+1}+3} \\
&= \sqrt{3^{2}-3^{1}+3} \\
&= \sqrt{3^{2}} \\
&= 3 \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{3^{x+1}-3^{x}}{3^{x-1}}+3} &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \\
3 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \\
3 &= (3)^{-x+2} \\
1 &= -x+2 \\
x &= 1
\end{aligned}$$

HOOFSTUK 2

Vergelykings en ongelykhede

- Bespreek terminologie.
- Beklemtoon die goue reël vir die oplos van vergelykings: wat jy doen aan die linkerkant (LK), moet jy ook doen aan die regterkant (RK). Die LK moet altyd gelyk wees aan die RK.
- Beklemtoon die gebruik van ekwivalensie en van die optellingsinverse in vergelykings (en nie 'neem die term na die anderkant toe' nie).
- Grafieke is ingesluit om leerders te help om die antwoorde te visualiseer. Moedig leerders aan om vinnige sketse te trek selfs al word 'n grafiek nie vereis in die oplossing nie.
- Moedig leerders aan om te kontroleer dat 'n uitdrukking korrek gefaktoriseer is deur uitbreiding van die hakies om weer uit te kom by die oorspronklike uitdrukking.
- Moedig leerders aan om hulle antwoorde (oplossings) te toets deur dit terug te substitueer in die oorspronklike vergelyking in en seker te maak dat die oplossing die vergelyking bevredig.
- Beide metodes vir die voltooiing van die vierkant is ingesluit:
  - Neem die vierkantswortel aan beide kante van die vergelyking - hierdie is die makliker en voorkeurmetode.
  - Onthou om pm in te sluit sodat een oplossing nie verloor word nie.
  - Faktorisering - hierdie metode word in Graad 12 gebruik vir die vergelyking van 'n sirkel.
- 'n Algemene fout wat deur leerders gemaak word, is om die kwadratiese formule te skryf as $x = -b \pm \frac{b^2 - -4ac}{2a}$.
- In die ondersoek oor die aard van die wortels, moet leerders geleentheid gegee word om die verband te ontdek tussen die antwoorde wat verkry word met die gebruik van die kwadratiese formule en die waarde van die diskriminant.
- Woordprobleme: moedig leerders aan om hulle vaardigheid in die interpretasie van woordprobleme te ontwikkel deur sketse te trek en tabelle te maak van die inligting wat gegee word.
- Herinner leerders om nie 'n ongelykheid as 'n vergelyking te hanteer nie.
- Beklemtoon dat die kritiese waardes nie die oplossing van 'n ongelykheid is nie, hulle dui die punte aan waar die tekens verander. Dit word benodig om 'n getallelyn-tabel van tekens op te stel.
- Herinner leerders dat wanneer hulle 'n ongelykheid met 'n negatiewe getal vermenigvuldig of deel, die rigting van die ongelykheidsteken verander.

2.1 Hersiening

Oefening 2 – 1: Oplossing deur faktorisering

Los die volgende kwadratiese vergelykings op deur faktorisering. Antwoorde mag in wortelvorm gelos word waar nodig.

1. $7t^2 + 14t = 0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 7t^2 + 14t &= 0 \\ 7t(t+2) &= 0 \\ t(t+2) &= 0 \\ t &= 0 \text{ of } t = -2 \end{aligned}$$

2. $12y^2 + 24y + 12 = 0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 12y^2 + 24y + 12 &= 0 \\ 12(y^2 + 2y + 1) &= 0 \\ y^2 + 2y + 1 &= 0 \\ (y+1)(y+1) &= 0 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

3. $16s^2 = 400$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 16s^2 - 400 &= 0 \\ 16(s^2 - 25) &= 0 \\ (s-5)(s+5) &= 0 \\ s &= \pm 5 \end{aligned}$$

4. $y^2 - 5y + 6 = 0$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} y^2 - 5y + 6 &= 0 \\ (y-3)(y-2) &= 0 \\ y &= 3 \text{ of } y = 2 \end{aligned}$$

5. $y^2 + 5y - 36 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
y^2 + 5y - 36 &= 0 \\
(y-4)(y+9) &= 0 \\
y &= 4 \text{ of } y = -9
\end{aligned}$$

6. $4 + p = \sqrt{p+6}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
4 + p &= \sqrt{p+6} \\
(4+p)^2 &= p + 6 \\
16 + 8p + p^2 &= p + 6 \\
p^2 + 7p + 10 &= 0 \\
(p+5)(p+2) &= 0 \\
p &= -5 \text{ of } p = -2
\end{aligned}$$

Toets $p = -5$:

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \sqrt{-5+6} \\
&= \sqrt{1} \\
&= 1 \\
\text{LK} &= 4 + (-5) \\
&= -1 \\
\therefore \text{LK} &\neq \text{RK}
\end{aligned}$$

Oplossing $p = -5$ is ongeldig.

Toets $p = -2$:

$$\begin{aligned}
\text{RK} &= \sqrt{-2+6} \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2 \\
\text{LK} &= 4 + (-2) \\
&= 2 \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

Oplossing $p = -2$ is geldig.

Finale antwoord: $p = -2$.

7. $-y^2 - 11y - 24 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
-y^2 - 11y - 24 &= 0 \\
y^2 + 11y + 24 &= 0 \\
(y+3)(y+8) &= 0 \\
y &= -3 \text{ of } y = -8
\end{aligned}$$

8. $13y - 42 = y^2$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
13y - 42 &= y^2 \\
y^2 - 13y + 42 &= 0 \\
(y-6)(y-7) &= 0 \\
y &= 6 \text{ of } y = 7
\end{aligned}
$$

9. $(x-1)(x+10) = -24$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(x-1)(x+10) &= -24 \\
x^2 + 9x - 10 &= -24 \\
x^2 + 9x + 14 &= 0 \\
(x+7)(x+2) &= 0 \\
x &= -7 \text{ of } x = -2
\end{aligned}
$$

10. $y^2 - 5ky + 4k^2 = 0$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y^2 - 5ky + 4k^2 &= 0 \\
(y-4k)(y-k) &= 0 \\
y &= 4k \text{ of } y = k
\end{aligned}
$$

11. $2y^2 - 61 = 101$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2y^2 - 61 &= 101 \\
2y^2 - 162 &= 0 \\
2(y^2 - 81) &= 0 \\
y^2 - 81 &= 0 \\
(y-9)(y+9) &= 0 \\
y &= 9 \text{ of } y = -9
\end{aligned}
$$

12. $2y^2 - 10 = 0$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2y^2 - 10 &= 0 \\
2(y^2 - 5) &= 0 \\
y^2 - 5 &= 0 \\
(y - \sqrt{5})(y + \sqrt{5}) &= 0 \\
y &= \sqrt{5} \text{ of } y = -\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

13. $-8 + h^2 = 28$

Oplossing:

$$\begin{aligned} -8 + h^2 &= 28 \\ h^2 - 36 &= 0 \\ (h-6)(h+6) &= 0 \\ h &= \pm 6 \end{aligned}$$

14. $y^2 - 4 = 10$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y^2 - 4 &= 10 \\ y^2 - 14 &= 0 \\ (y - \sqrt{14})(y + \sqrt{14}) &= 0 \\ y &= \sqrt{14} \text{ of } y = -\sqrt{14} \end{aligned}$$

15. $\sqrt{5-2p} - 4 = \frac{1}{2}p$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sqrt{5-2p} - 4 &= \frac{1}{2}p \\ \sqrt{5-2p} &= \frac{1}{2}p + 4 \\ \left(\sqrt{5-2p}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}p + 4\right)^2 \\ 5 - 2p &= \frac{p^2}{4} + 4p + 16 \\ 0 &= \frac{p^2}{4} + 6p + 11 \\ 0 &= p^2 + 24p + 44 \\ 0 &= (p+2)(p+22) \\ p = -2 \text{ of } p &= -22 \end{aligned}$$

Toets $p = -2$:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \sqrt{5 - 2(-2)} - 4 \\ &= \sqrt{9} - 4 \\ &= -1 \\ \text{RK} &= \frac{1}{2}(-2) \\ &= -1 \\ \therefore \text{LK} &= \text{RK} \end{aligned}$$

Oplossing $p = -2$ is geldig.

Toets $p = -22$:

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \sqrt{5-2(-22)} - 4 \\ &= \sqrt{49} - 4 \\ &= 3 \\ \text{RK} &= \frac{1}{2}(-22) \\ &= -11 \\ \therefore \text{LK} &\neq \text{RK} \end{aligned}$$

Oplossing $p = -22$ is ongeldig.

Finale antwoord: $p = -2$.

16. $y^2 + 28 = 100$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y^2 + 28 &= 100 \\ y^2 - 72 &= 0 \\ (y - \sqrt{72})(y + \sqrt{72}) &= 0 \\ y &= \pm\sqrt{72} \\ &= \pm\sqrt{2 \times 36} \\ &= \pm 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

17. $f\,(2f + 1) = 15$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(2f+1) &= 15 \\ 2f^2 + f - 15 &= 0 \\ (2f-5)(f+3) &= 0 \\ f &= \frac{5}{2} \text{ of } f = -3 \end{aligned}$$

18. $2x = \sqrt{21x - 5}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x &= \sqrt{21x-5} \\ (2x)^2 &= \left(\sqrt{21x-5}\right)^2 \\ 4x^2 &= 21x - 5 \\ 4x^2 - 21x + 5 &= 0 \\ (4x-1)(x-5) &= 0 \\ x &= \frac{1}{4} \text{ of } x = 5 \end{aligned}$$

Toets $x = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sqrt{21\left(\frac{1}{4}\right) - 5} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{2} \\
\text{RK} &= \frac{1}{4}(2) \\
&= \frac{1}{2} \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

Oplossing $x = \frac{1}{4}$ is geldig.

Toets $x = 5$:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sqrt{21(5) - 5} \\
&= \sqrt{100} \\
&= 10 \\
\text{RK} &= 2(10) \\
&= 20 \\
\therefore \text{LK} &\neq \text{RK}
\end{aligned}$$

Oplossing $x = 5$ is ongeldig.

Finale antwoord: $x = \frac{1}{4}$.

19. $\frac{5y}{y-2} + \frac{3}{y} + 2 = \frac{-6}{y^2-2y}$

Oplossing:

Beperkings: $y \neq 0$, $y \neq 2$

$$\frac{5y}{y-2} + \frac{3}{y} + 2 = \frac{-6}{y^2 - 2y}$$

Vermenigvuldig beide kante met $y(y-2)$:

$$\begin{aligned}
y(5y) + 3(y-2) + 2y(y-2) &= -6 \\
5y^2 + 3y - 6 + 2y^2 - 4y &= -6 \\
7y^2 - y &= 0 \\
y(7y - 1) &= 0 \\
y = 0 \text{ of } y &= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Volgens die beperking $y \neq 0$, daarom $y = \frac{1}{7}$.

20. $\frac{x+9}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} = \frac{2}{x-3}$

Oplossing:

Beperkings: $x \neq \pm 3$.

$$\frac{x+9}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x+3} \frac{2}{x-3}$$

Vermenigvuldig beide kante $(x+3)(x-3)$:

$$\begin{aligned} x+9+x-3 &= 2(x+3) \\ 2x+6 &= 2x+6 \end{aligned}$$

wat altyd waar is, dus $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pm 3$.

21. $\frac{y-2}{y+1} = \frac{2y+1}{y-7}$

Oplossing:

Beperkings: $y \neq -1$, $y \neq 7$

$$\begin{aligned} \frac{y-2}{y+1} &= \frac{2y+1}{y-7} \\ (y-2)(y-7) &= (2y+1)(y+1) \\ y^2 - 9y + 14 &= 2y^2 + 3y + 1 \\ -y^2 - 12y + 13 &= 0 \\ y^2 + 12y - 13 &= 0 \\ (y+13)(y-1) &= 0 \\ y &= -13 \text{ of } y = 1 \end{aligned}$$

22. $1 + \frac{t-2}{t-1} = \frac{5}{t^2-4t+3} + \frac{10}{3-t}$

Oplossing:

Beperkings: $t \neq 1$, $t \neq 3$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{t-2}{t-1} &= \frac{5}{t^2-4t+3} + \frac{10}{3-t} \\ 1 + \frac{t-2}{t-1} &= \frac{5}{(t-3)(t-1)} - \frac{10}{t-3} \\ (t-3)(t-1) + (t-2)(t-3) &= 5 - 10(t-1) \\ t^2 - 4t + 3 + t^2 - 5t + 6 &= 5 - 10t + 10 \\ 2t^2 - 9t + 9 &= -10t + 15 \\ 2t^2 + t - 6 &= 0 \\ (2t-3)(t+2) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3}{2} \text{ of } t = -2 \end{aligned}$$

23. $\frac{4}{m+3} + \frac{4}{4-m^2} = \frac{5m-5}{m^2+m-6}$

Oplossing:

Beperkings: $m \neq -3$, $m \neq \pm 2$

$$\begin{aligned} \frac{4}{m+3} + \frac{4}{4-m^2} &= \frac{5m-5}{m^2+m-6} \\ \frac{4}{m+3} - \frac{4}{m^2-4} &= \frac{5(m-1)}{(m+3)(m-2)} \\ 4(m^2-4) - 4(m+3) &= 5(m-1)(m+2) \\ 4m^2 - 16 - 4m - 12 &= 5(m^2+m-2) \\ 4m^2 - 4m - 28 &= 5m^2 + 5m - 10 \\ m^2 + 9m + 18 &= 0 \\ (m+3)(m+6) &= 0 \\ m &= -3 \text{ of } m = -6 \\ \text{Maar } m \neq -3, &\therefore m = -6 \end{aligned}$$

24. $5\sqrt{5t+1} - 4 = 5t + 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
5\sqrt{5t+1} - 4 &= 5t + 1 \\
5\sqrt{5t+1} &= 5t + 5 \\
5\sqrt{5t+1} &= 5(t + 1) \\
\sqrt{5t+1} &= t + 1 \\
\left(\sqrt{5t+1}\right)^2 &= (t+1)^2 \\
5t + 1 &= t^2 + 2t + 1 \\
t^2 - 3t &= 0 \\
t(t - 3) &= 0 \\
t = 0 &\text{ of } t = 3
\end{aligned}$$

Toets $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= 5\sqrt{5(0) + 1} - 4 \\
&= 1 \\
\text{RK} &= 5(0) + 1 \\
&= 1 \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

Oplossing $t = 0$ is geldig.

Toets $t = 3$:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= 5\sqrt{5(3) + 1} - 4 \\
&= 5\sqrt{16} - 4 \\
&= 16 \\
\text{RK} &= 5(3) + 1 \\
&= 16 \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

Oplossing $t = 3$ is geldig.

Finale antwoord: $t = 0$ of $t = 3$.

2.2 Vierkantsvoltooiing

Oefening 2 – 2: Oplossing deur kwadraatsvoltooiing

1. Los die volgende vergelykings op deur kwadraatsvoltooiing:

a) $x^2 + 10x - 2 = 0$

b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

c) $p^2 - 5 = -8p$

d) $2(6x + x^2) = -4$

e) $x^2 + 5x + 9 = 0$

f) $t^2 + 30 = 2(10 - 8t)$

g) $3x^2 + 6x - 2 = 0$

h) $z^2 + 8z - 6 = 0$

i) $2z^2 = 11z$

j) $5 + 4z - z^2 = 0$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} x^2 + 10x - 2 &= 0 \\ x^2 + 10x &= 2 \\ x^2 + 10x + 25 &= 2 + 25 \\ (x+5)^2 - 27 &= 0 \\ \left[(x+5) + \sqrt{27}\right]\left[(x+5) - \sqrt{27}\right] &= 0 \\ (x+5) = -\sqrt{27} \text{ of } (x+5) &= \sqrt{27} \\ x = -5 - 3\sqrt{3} \text{ of } x &= -5 + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ x^2 + 4x &= -3 \\ x^2 + 4x + 4 &= -3 + 4 \\ (x+2)^2 &= 1 \\ (x+2) &= \pm\sqrt{1} \\ &= \pm 1 \\ x = -2 + 1 = -1 \text{ of } x &= -2 - 1 = -3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} p^2 - 5 &= -8p \\ p^2 + 8p - 5 &= 0 \\ p^2 + 8p &= 5 \\ p^2 + 8p + 16 &= 5 + 16 \\ (p+4)^2 &= 21 \\ (p+4) &= \pm\sqrt{21} \\ p &= -4 \pm \sqrt{21} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} 2(6x + x^2) &= -4 \\ 2x^2 + 12x + 4 &= 0 \\ x^2 + 6x + 2 &= 0 \\ x^2 + 6x &= -2 \\ x^2 + 6x + 9 &= -2 + 9 \\ (x+3)^2 &= 7 \\ x + 3 &= \pm\sqrt{7} \\ x &= -3 \pm \sqrt{7} \end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
x^2 + 5x + 9 &= 0 \\
x^2 + 5x &= -9 \\
x^2 + 5x + \frac{25}{4} &= -9 + \frac{25}{4} \\
\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 &= -\frac{11}{4} \\
x + \frac{5}{2} &= \pm\sqrt{-\frac{11}{4}}
\end{aligned}
$$

Geen reële oplossing

f)

$$
\begin{aligned}
t^2 + 30 &= 2(10 - 8t) \\
t^2 + 16t + 10 &= 0 \\
t^2 + 16t &= -10 \\
t^2 + 16t + 64 &= -10 + 64 \\
(t + 8)^2 &= 54 \\
t + 8 &= \pm\sqrt{54} \\
t &= -8 \pm \sqrt{9 \times 6} \\
\therefore t &= -8 \pm 3\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

g)

$$
\begin{aligned}
3x^2 + 6x - 2 &= 0 \\
x^2 + 2x &= \frac{2}{3} \\
x^2 + 2x + 1 &= \frac{2}{3} + 1 \\
(x + 1)^2 &= \frac{5}{3} \\
x + 1 &= \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \\
x &= -1 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}
\end{aligned}
$$

h)

$$
\begin{aligned}
z^2 + 8z - 6 &= 0 \\
z^2 + 8z &= 6 \\
z^2 + 8z + 16 &= 6 + 16 \\
(z + 4)^2 &= 22 \\
z + 4 &= \pm\sqrt{22} \\
z &= -4 \pm \sqrt{22}
\end{aligned}
$$

i)

$$\begin{aligned}
2z^2 &= 11z \\
2z^2 - 11z &= 0 \\
z^2 - \frac{11}{2}z &= 0 \\
z^2 - \frac{11}{2}z + \frac{121}{16} &= \frac{121}{16} \\
\left(z - \frac{11}{4}\right)^2 &= \frac{121}{16} \\
z - \frac{11}{4} &= \pm\frac{11}{4} \\
z = \frac{11}{4} + \frac{11}{4} = \frac{11}{2} \text{ of } z &= \frac{11}{4} - \frac{11}{4} = 0
\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}
5 + 4z - z^2 &= 0 \\
z^2 - 4z &= 5 \\
z^2 - 4z + 4 &= 5 + 4 \\
(z-2)^2 &= 9 \\
z - 2 &= \pm\sqrt{9} \\
z = 2 + 3 = 5 \text{ of } z &= 2 - 3 = -1
\end{aligned}$$

2. Bepaal k in terme van a: $k^2 + 6k + a = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
k^2 + 6k + a &= 0 \\
k^2 + 6k &= -a \\
k^2 + 6k + 9 &= 9 - a \\
(k+3)^2 &= 9 - a \\
k + 3 &= \pm\sqrt{9-a} \\
k &= -3 \pm \sqrt{9-a}
\end{aligned}$$

3. Bepaal y in terme van p, q en r: $py^2 + qy + r = 0$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
py^2 + qy + r &= 0 \\
y^2 + \frac{q}{p}y + \frac{r}{p} &= 0 \\
y^2 + \frac{q}{p}y &= -\frac{r}{p} \\
y^2 + \frac{q}{p}y + \left(\frac{q}{2p}\right)^2 &= \left(\frac{q}{2p}\right)^2 - \frac{r}{p} \\
\left(y + \frac{q}{2p}\right)^2 &= \frac{q^2}{4p^2} - \frac{r}{p} \\
y + \frac{q}{2p} &= \pm\sqrt{\frac{q^2 - 4pr}{4p^2}} \\
y &= -\frac{q}{2p} \pm \frac{\sqrt{q^2 - 4pr}}{2p} \\
y &= \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4pr}}{2p}
\end{aligned}
$$

2.3 Kwadratiese vergelykings

Oefening 2 – 3: Oplossing met kwadratiese formule

Bepaal die oplossing van die volgende kwadratiese vergelykings met die kwadratiese formule:

1. $3t^2 + t - 4 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
3t^2 + t - 4 &= 0 \\
t &= \frac{-(1) \pm \sqrt{1^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{6} \\
&= \frac{-1 \pm 7}{6}
\end{aligned}
$$

$$
t = \frac{-1+7}{6} = \frac{6}{6} = 1 \text{ of } t = \frac{-1-7}{6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}
$$

2. $x^2 - 5x - 3 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^2 - 5x - 3 &= 0 \\
x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 12}}{2} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}
\end{aligned}
$$

Dus $x = \dfrac{5 + \sqrt{37}}{2}$ of $x = \dfrac{5 - \sqrt{37}}{2}$

3. $2t^2 + 6t + 5 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2t^2 + 6t + 5 &= 0 \\
t &= \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(5)}}{2(2)} \\
&= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 40}}{4} \\
&= \frac{-6 \pm \sqrt{-4}}{4}
\end{aligned}
$$

Geen reële oplossing

4. $2p(2p + 1) = 2$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
4p^2 + 2p - 2 &= 0 \\
2p^2 + p - 1 &= 0 \\
p &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} \\
&= \frac{-1 \pm 3}{4}
\end{aligned}
$$

Dus $p = \dfrac{-1 + 3}{4} = \dfrac{1}{2}$ of $p = \dfrac{-1 - 3}{4} = -1$

5. $-3t^2 + 5t - 8 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
-3t^2 + 5t - 8 &= 0 \\
t &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-3)(-8)}}{2(-3)} \\
&= \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 96}}{-6} \\
&= \frac{-5 \pm \sqrt{-71}}{-6}
\end{aligned}
$$

Geen reële oplossing

6. $5t^2 + 3t - 3 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
5t^2 + 3t - 3 &= 0 \\
t &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(5)(-3)}}{2(5)} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 60}}{10} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{10} \\
\therefore t = \frac{-3 + \sqrt{69}}{10} &\text{ of } t = \frac{-3 - \sqrt{69}}{10}
\end{aligned}
$$

7. $t^2 - 4t + 2 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
t^2 - 4t + 2 &= 0 \\
t &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} \\
&= 2 \pm \sqrt{2}
\end{aligned}
$$

8. $9(k^2 - 1) = 7k$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
9k^2 - 7k - 9 &= 0 \\
k &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(9)(-9)}}{2(9)} \\
&= \frac{7 \pm \sqrt{49 + 324}}{18} \\
&= \frac{7 \pm \sqrt{373}}{18} \\
k = \frac{7 + \sqrt{373}}{18} &\text{ of } k = \frac{7 - \sqrt{373}}{18}
\end{aligned}
$$

9. $3f - 2 = -2f^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2f^2 + 3f - 2 &= 0 \\ f &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \\ &= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \\ &= \frac{-3 \pm 5}{4} \\ \therefore f = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} &\text{ of } f = \frac{-3 - 5}{4} = -2 \end{aligned}$$

10. $t^2 + t + 1 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} t^2 + t + 1 &= 0 \\ t &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{aligned}$$

Geen reële oplossing

2.4 Substitusie

Oefening 2 – 4:

Bepaal die oplossing van die volgende kwadratiese vergelykings deur substitusie:

1. $-24 = 10(x^2 + 5x) + (x^2 + 5x)^2$

Oplossing:

Let op dat $x^2 + 5x$ dan herhaal word en gevolglik stel ons $k = x^2 + 5x$ en die vergelyking word dan

$$-24 = 10k + k^2$$

Bepaal vir k:

$$
\begin{aligned}
k^2 + 10k + 24 &= 0 \\
(k+6)(k+4) &= 0 \\
\therefore k = -6 &\text{ of } k = -4
\end{aligned}
$$

Gebruik waardes soos bepaal vir k om die oorspronklike veranderlike x te bepaal

Vir $k = -6$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 5x &= -6 \\
x^2 + 5x + 6 &= 0 \\
(x+2)(x+3) &= 0 \\
\therefore x = -2 &\text{ of } x = -3
\end{aligned}
$$

Vir $k = -4$

$$
\begin{aligned}
x^2 + 5x &= -4 \\
x^2 + 5x + 4 &= 0 \\
(x+1)(x+4) &= 0 \\
\therefore x = -1 &\text{ of } x = -4
\end{aligned}
$$

Die wortels van die vergelyking is $x = -1$, $x = -4$, $x = -2$ en $x = -3$.

2. $(x^2 - 2x)^2 - 8 = 7(x^2 - 2x)$

   Oplossing:

   Let op dat $x^2 - 2x$ dan herhaal word en gevolglik stel ons $k = x^2 - 2x$ en die vergelyking word dan

$$
k^2 - 8 = 7k
$$

   Bepaal vir k:

$$
\begin{aligned}
k^2 - 7k - 8 &= 0 \\
(k+1)(k-8) &= 0 \\
\therefore k = -1 &\text{ of } k = 8
\end{aligned}
$$

   Gebruik waardes soos bepaal vir k om die oorspronklike veranderlike x te bepaal

   Vir $k = -1$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x &= -1 \\
x^2 - 2x + 1 &= 0 \\
(x-1)(x-1) &= 0 \\
\therefore x &= 1
\end{aligned}
$$

   Vir $k = 8$

$$
\begin{aligned}
x^2 - 2x &= 8 \\
x^2 - 2x - 8 &= 0 \\
(x+2)(x-4) &= 0 \\
\therefore x = -2 &\text{ of } x = 4
\end{aligned}
$$

   Die wortels van die vergelyking is $x = 1$, $x = 4$ en $x = -2$.

3. $x^2 + 3x - \frac{56}{x(x+3)} = 26$

Oplossing:

Die beperkings is die waardes van x wat veroorsaak dat die noemer gelyk is aan 0. Dit sal die breuk ongedefiniëerd maak. Dus $x \neq 0$ en $x \neq -3$.

Let op dat $x^2 + 3x$ dan herhaal word en gevolglik stel ons $k = x^2 + 3x$ en die vergelyking word dan

$$k - \frac{56}{k} = 26$$

Die beperkings is die waardes van k wat veroorsaak dat die noemer gelyk is aan 0. Dit sal die breuk ongedefiniëerd maak. Dus $k \neq 0$.

Bepaal vir k

$$\begin{aligned} k - \frac{56}{k} &= 26 \\ k^2 - 56 &= 26k \\ k^2 - 26k - 56 &= 0 \\ (k-28)(k+2) &= 0 \\ \therefore k = 28 &\text{ of } k = -2 \end{aligned}$$

Ons kontroleer die wortels teen die beperkings van k en bevestig dat hulle geldig is.

Gebruik waardes soos bepaal vir k om die oorspronklike veranderlike x te bepaal

Vir $k = 28$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= 28 \\ x^2 + 3x - 28 &= 0 \\ (x+7)(x-4) &= 0 \\ \therefore x = -7 &\text{ of } x = 4 \end{aligned}$$

Vir $k = -2$

$$\begin{aligned} x^2 + 3x &= -2 \\ x^2 + 3x + 2 &= 0 \\ (x+2)(x+1) &= 0 \\ \therefore x = -1 &\text{ of } x = -2 \end{aligned}$$

Ons kontroleer die wortels teen die beperkings van x en bevestig dat hulle geldig is.

Die wortels van die vergelyking is $x = -7$, $x = 4$, $x = -1$ en $x = -2$.

4. $x^2 - 18 + x + \frac{72}{x^2+x} = 0$

Oplossing:

Die beperkings is die waardes van x wat veroorsaak dat die noemer gelyk is aan 0. Dit sal die breuk ongedefiniëerd maak. Dus $x \neq 0$ en $x \neq -1$.

Let op dat $x^2 + x$ dan herhaal word en gevolglik stel ons $k = x^2 + x$ en die vergelyking word dan

$$k - 18 + \frac{72}{k} = 0$$

Die beperkings is die waardes van k wat veroorsaak dat die noemer gelyk is aan 0. Dit sal die breuk ongedefiniëerd maak. Dus $k \neq 0$.

Bepaal vir k

$$\begin{aligned} k - 18 + \frac{72}{k} &= 0 \\ k^2 - 18k + 72 &= 0 \\ (k-12)(k-6) &= 0 \\ \therefore k &= 12 \text{ of } k = 6 \end{aligned}$$

Ons kontroleer die wortels teen die beperkings van k en bevestig dat hulle geldig is.

Gebruik waardes soos bepaal vir k om die oorspronklike veranderlike x te bepaal

Vir $k = 12$

$$\begin{aligned} x^2 + x &= 12 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \\ (x+4)(x-3) &= 0 \\ \therefore x &= -4 \text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

Vir $k = 6$

$$\begin{aligned} x^2 + x &= 6 \\ x^2 + x - 6 &= 0 \\ (x+3)(x-2) &= 0 \\ \therefore x &= -3 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

Ons kontroleer die wortels teen die beperkings van x en bevestig dat hulle geldig is.

Die wortels van die vergelyking is $x = -4$, $x = 3$, $x = -3$ en $x = 2$.

5. $x^2 - 4x + 10 - 7(4x - x^2) = -2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 10 - 28x + 7x^2 &= -2 \\ 8x^2 - 32x + 12 &= 0 \\ 2x^2 - 8x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 24}}{4} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{40}}{4} \\ \therefore x = \frac{8 + \sqrt{40}}{4} &\text{ of } x = \frac{8 - \sqrt{40}}{4} \end{aligned}$$

6. $\frac{9}{x^2+2x-12} = x^2 + 2x - 12$

Oplossing:

Die beperkings is die waardes van x wat veroorsaak dat die noemer gelyk is aan 0. Dit sal die breuk ongedefinieërd maak. Dus $x \neq \frac{-2+\sqrt{52}}{2}$ en $x \neq \frac{-2-\sqrt{52}}{2}$.

Let op dat $x^2 + 2x - 12$ dan herhaal word en gevolglik stel ons $k = x^2 + 2x - 12$ en die vergelyking word dan

$$\frac{9}{k} = k$$

Die beperkings is die waardes van k wat veroorsaak dat die noemer gelyk is aan 0. Dit sal die breuk ongedefinieërd maak. Dus $k \neq 0$.

Bepaal vir k

$$\begin{aligned}
\frac{9}{k} &= k \\
9 &= k^2 \\
k &= \pm 3 \\
\therefore k &= -3 \text{ of } k = 3
\end{aligned}$$

Ons kontroleer die wortels teen die beperkings van k en bevestig dat hulle geldig is.

Gebruik waardes soos bepaal vir k om die oorspronklike veranderlike x te bepaal

Vir $k = 3$

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x - 12 &= 3 \\
x^2 + 2x - 15 &= 0 \\
(x+5)(x-3) &= 0 \\
\therefore x &= -5 \text{ of } x = 3
\end{aligned}$$

Vir $k = -3$

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x - 12 &= -3 \\
x^2 + 2x - 9 &= 0 \\
x &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 36}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} \\
&= -1 \pm \sqrt{10} \\
\therefore x = -1 + \sqrt{10} &\text{ of } x = -1 - \sqrt{10}
\end{aligned}$$

Ons kontroleer die wortels teen die beperkings van x en bevestig dat hulle geldig is.

Die wortels van die vergelyking is $x = -5$, $x = 3$, $x = -1 + \sqrt{10}$ en $x = -1 - \sqrt{10}$.

2.5 Vind die vergelyking

Oefening 2 – 5: Vind die vergelyking

1. Bepaal 'n kwadratiese vergelyking vir die grafiek met die wortels 3 en -2.

   Oplossing:

$$x = 3 \text{ of } x = -2$$

$$x - 3 = 0 \text{ of } x + 2 = 0$$

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

2. Vind 'n kwadratiese vergelyking vir grafiek met x-afsnitte $(-4; 0)$ en $(4; 0)$.

   Oplossing:

$$x = -4 \text{ of } x = 4$$

$$x + 4 = 0 \text{ of } x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 4) = 0$$

$$x^2 - 16 = 0$$

3. Bepaal die kwadratiese vergelyking van die vorm $ax^2 + bx + c = 0$, waar a, b en c heeltallig is, met wortels $-\frac{1}{2}$ en 3.

   Oplossing:

$$x = -\frac{1}{2} \text{ of } x = 3$$

$$x + \frac{1}{2} = 0 \text{ of } x - 3 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 3) = 0$$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

4. Bepaal die waarde van k en die ander wortel van 'n kwadratiese vergelyking $kx^2 - 7x + 4 = 0$, as gegee word dat een van die wortels $x = 1$ is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} k(1)^2 - 7(1) + 4 &= 0 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

$3x^2 - 7x + 4 = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 7x + 4 &= 0 \\ (x-1)(3x-4) &= 0 \\ x = 1 \text{ of } x &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

5. Een wortel van die vergelyking $2x^2 - 3x = p$ is $2\frac{1}{2}$. Vind p en die ander wortel.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5}{2}\right) - p &= 0 \\ \frac{25}{2} - \frac{15}{2} &= p \\ p &= 5 \end{aligned}$$

$2x^2 - 3x - 5 = 0$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 5 &= 0 \\ (2x-5)(x+1) &= 0 \\ x = 2\frac{1}{2} \text{ of } x &= -1 \end{aligned}$$

Oefening 2 – 6: Gemengde oefeninge

Bepaal die oplossing van elk van die volgende kwadratiese vergelykings deur gebruik te maak van faktorisering, of die kwadratiese formule of kwadraatsvoltooiing:

- Probeer altyd om eers te faktoriseer; gebruik die formule as die drieterm nie faktoriseer nie.
- Gebruik kwadraatsvoltooiing slegs wanneer daarvoor gevra word.
- Gee antwoord in wortelvorm of in desimale vorm.

1. $24y^2 + 61y - 8 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
24y^2 + 61y - 8 &= 0 \\
(8y - 1)(3y + 8) &= 0 \\
y = \frac{1}{8} &\text{ of } y = -\frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

2. $8x^2 + 16x = 42$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
8x^2 + 16x - 42 &= 0 \\
4x^2 + 8x - 21 &= 0 \\
(2x - 3)(2x + 7) &= 0 \\
x = \frac{3}{2} &\text{ of } x = -\frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

3. $9t^2 = 24t - 12$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
9t^2 - 24t + 12 &= 0 \\
3t^2 - 8t + 4 &= 0 \\
(3t - 2)(t - 2) &= 0 \\
t = \frac{2}{3} &\text{ of } t = 2
\end{aligned}
$$

4. $-5y^2 + 0y + 5 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
-5y^2 + 5 &= 0 \\
-5(y^2 - 1) &= 0 \\
y^2 - 1 &= 0 \\
(y - 1)(y + 1) &= 0 \\
y = 1 &\text{ of } y = -1
\end{aligned}
$$

5. $3m^2 + 12 = 15m$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
3m^2 + 12 - 15m &= 0 \\
m^2 - 5m + 4 &= 0 \\
m^2 - 5m &= -4 \\
m^2 - 5m + \frac{25}{4} &= -4 + \frac{25}{4} \\
\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\
m - \frac{5}{2} &= \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \\
m &= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\
m &= 1 \text{ of } m = 4
\end{aligned}
$$

6. $49y^2 + 0y - 25 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
49y^2 - 25 &= 0 \\
(7y - 5)(7y + 5) &= 0 \\
y &= \frac{5}{7} \text{ of } y = -\frac{5}{7}
\end{aligned}
$$

7. $72 = 66w - 12w^2$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
12w^2 - 66w + 72 &= 0 \\
2w^2 - 11w + 12 &= 0 \\
(2w - 3)(w - 4) &= 0 \\
w &= \frac{3}{2} \text{ of } w = 4
\end{aligned}
$$

8. $-40y^2 + 58y - 12 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
-40y^2 + 58y - 12 &= 0 \\
20y^2 - 29y + 6 &= 0 \\
(5y - 6)(4y - 1) &= 0 \\
y &= \frac{6}{5} \text{ of } y = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

9. $37n + 72 - 24n^2 = 0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
24n^2 - 37n - 72 &= 0 \\
(3n - 8)(8n + 9) &= 0 \\
n &= \frac{8}{3} \text{ of } n = -\frac{9}{8}
\end{aligned}
$$

10. $6y^2 + 7y - 24 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 6y^2 + 7y - 24 &= 0 \\ (3y + 8)(2y - 3) &= 0 \\ y &= -\frac{8}{3} \text{ of } y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

11. $3 = x(2x - 5)$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 3 &= 2x^2 - 5x \\ 2x^2 - 5x - 3 &= 0 \\ (2x + 1)(x - 3) &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2} \text{ of } x = 3 \end{aligned}$$

12. $-18y^2 - 55y - 25 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} -18y^2 - 55y - 25 &= 0 \\ 18y^2 + 55y + 25 &= 0 \\ y &= \frac{-55 \pm \sqrt{(55)^2 - (4)(18)(25)}}{2(18)} \\ &= \frac{-55 \pm \sqrt{3025 - 1800}}{36} \\ &= \frac{-55 \pm \sqrt{1225}}{36} \\ &= \frac{-55 \pm 35}{36} \\ y = -\frac{90}{36} = -\frac{5}{2} &\text{ of } y = -\frac{20}{36} = -\frac{5}{9} \end{aligned}$$

13. $-25y^2 + 25y - 4 = 0$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
-25y^2 + 25y - 4 &= 0 \\
25y^2 - 25y + 4 &= 0 \\
y^2 - y &= -\frac{4}{25} \\
y^2 - y + \frac{1}{4} &= -\frac{4}{25} + \frac{1}{4} \\
\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{-16+25}{100} \\
\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{100} \\
y - \frac{1}{2} &= \pm\sqrt{\frac{9}{100}} \\
y - \frac{1}{2} &= \pm\frac{3}{10} \\
y = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5} &\text{ of } y = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

14. $8(1 - 4g^2) + 24g = 0$

    Oplossing:

$$
\begin{aligned}
-32g^2 + 24g + 8 &= 0 \\
32g^2 - 24g - 8 &= 0 \\
4g^2 - 3g - 1 &= 0 \\
(4g + 1)(g - 1) &= 0 \\
g = -\frac{1}{4} &\text{ of } g = 1
\end{aligned}
$$

15. $9y^2 - 13y - 10 = 0$

    Oplossing:

$$
\begin{aligned}
9y^2 - 13y - 10 = 0 & \\
y &= \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(9)(-10)}}{2(9)} \\
&= \frac{-(-13) \pm \sqrt{169 + 360}}{18} \\
&= \frac{13 \pm \sqrt{529}}{18} \\
&= \frac{13 \pm 23}{18} \\
y = \frac{13+23}{18} = 2 &\text{ of } y = \frac{13-23}{18} = -\frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

16. $(7p - 3)(5p + 1) = 0$

    Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(7p - 3)(5p + 1) &= 0 \\
p = \frac{3}{7} &\text{ of } p = -\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

17. $-81y^2 - 99y - 18 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} -81y^2 - 99y - 18 &= 0 \\ 9y^2 + 11y + 2 &= 0 \\ (9y+2)(y+1) &= 0 \\ y &= -\frac{2}{9} \text{ of } y = -1 \end{aligned}$$

18. $14y^2 - 81y + 81 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 14y^2 - 81y + 81 = 0 & \\ y &= \frac{-(-81) \pm \sqrt{(-81)^2 - 4(14)(81)}}{2(14)} \\ &= \frac{81 \pm \sqrt{6561 - 4536}}{28} \\ &= \frac{81 \pm \sqrt{2025}}{28} \\ &= \frac{81 \pm 45}{28} \\ y = \frac{81+45}{28} = \frac{9}{2} \text{ of } y = \frac{81-45}{28} = \frac{9}{7} & \end{aligned}$$

2.6 Aard van wortels

Oefening 2 – 7: Uit vorige vraestelle

1. Bepaal die aard van die wortels vir elk van die volgende vergelykings:

a) $x^2 + 3x = -2$

b) $x^2 + 9 = 6x$

c) $6y^2 - 6y - 1 = 0$

d) $4t^2 - 19t - 5 = 0$

e) $z^2 = 3$

f) $0 = p^2 + 5p + 8$

g) $x^2 = 36$

h) $4m + m^2 = 1$

i) $11 - 3x + x^2 = 0$

j) $y^2 + \frac{1}{4} = y$

Oplossing:

a)

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$a = 1; \qquad b = 3; \qquad c = 2$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (3)^2 - 4(1)(2)\\ &= 9 - 8\\ &= 1\end{aligned}$$

Ons weet $1 > 0$ en 'n volkome vierkant is.

$\therefore$ $\Delta > 0$ is 'n volkome vierkant, en die wortels is **reëel, ongelyk** en **rasionaal**.

b)

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$a = 1; \qquad b = -6; \qquad c = 9$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-6)^2 - 4(1)(9)\\ &= 36 - 36\\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore$ $\Delta = 0$ en die wortels is **reëel** en **gelyk**.

c)

$$6y^2 - 6y - 1 = 0$$

$$a = 6; \qquad b = -6; \qquad c = -1$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-6)^2 - 4(6)(-1)\\ &= 36 + 36\\ &= 72\end{aligned}$$

Ons weet $72 > 0$ en nie 'n volkome vierkant is nie.

$\therefore$ $\Delta > 0$ en nie 'n volkome vierkant is nie; die wortels is **reëel**, **ongelyk** en **irrasionaal**.

d)

$$4t^2 - 19t - 5 = 0$$

$$a = 4; \qquad b = -19; \qquad c = -5$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-19)^2 - 4(4)(-5)\\ &= 361 + 80\\ &= 441\end{aligned}$$

Ons weet $441 > 0$ en is 'n volkome vierkant.

$\therefore$ $\Delta > 0$ en is 'n volkome vierkant; die wortels is **reëel**, **ongelyk** en **rasionaal**.

e)

$$z^2 - 3 = 0$$

$$a = 1; \qquad b = 0; \qquad c = -3$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (0)^2 - 4(1)(-3) \\ &= 0 + 12 \\ &= 12\end{aligned}$$

Ons weet $12 > 0$ en nie 'n volkome vierkant is nie.

$\therefore \Delta > 0$ en nie 'n volkome vierkant is nie; die wortels is **reëel**, **ongelyk** en **irrasionaal**.

f)

$$p^2 + 5p + 8 = 0$$

$$a = 1; \qquad b = 5; \qquad c = 8$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (5)^2 - 4(1)(8) \\ &= 25 - 32 \\ &= -7\end{aligned}$$

En $-7 < 0$.

$\therefore \Delta < 0$; die wortels is **nie-reëel**.

g)

$$x^2 - 36 = 0$$

$$a = 1; \qquad b = 0; \qquad c = -36$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (0)^2 - 4(1)(-36) \\ &= 0 + 144 \\ &= 144\end{aligned}$$

En $144 > 0$ en is 'n volkome vierkant.

$\therefore \Delta > 0$ en is 'n volkome vierkant; die wortels is **reëel**, **ongelyk** en **rasionaal**.

h)

$$m^2 + 4m - 1 = 0$$

$$a = 1; \qquad b = 4; \qquad c = -1$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (4)^2 - 4(1)(-1) \\ &= 16 + 4 \\ &= 20\end{aligned}$$

En $20 > 0$ en nie 'n volkome vierkant is nie.

Dus, $\Delta > 0$ en nie 'n volkome vierkant is nie; die wortels is **reëel, ongelyk** en **irrasionaal**.

i)

$$x^2 - 3x + 11 = 0$$

$$a = 1; \qquad b = -3; \qquad c = 11$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-3)^2 - 4(1)(11) \\ &= 9 - 44 \\ &= -35\end{aligned}$$

En $-35 < 0$.

$\therefore \Delta < 0$; die wortels is **nie-reëel**.

j)

$$4y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$a = 4; \qquad b = -4; \qquad c = 1$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-4)^2 - 4(4)(1) \\ &= 16 - 16 \\ &= 0\end{aligned}$$

$\therefore \Delta = 0$; die wortels is **reëel** en **gelyk**.

2. Gegee: $x^2 + bx - 2 + k\left(x^2 + 3x + 2\right) = 0$, $(k \neq -1)$

   a) Toon aan dat die diskriminant gegee word deur: $\Delta = k^2 + 6bk + b^2 + 8$
   b) Indien $b = 0$, bespreek die aard van die wortels van die vergelyking.
   c) Indien $b = 2$, vind die waarde(s) van k waarvoor die wortels gelyk is.

   [IEB, Nov. 2001, HG]

   Oplossing:

   a)

$$(k+1)x^2 + (b+3k)x - 2 + 2k = 0$$

$$a = k + 1; \qquad b = b + 3k; \qquad c = -2 + 2k$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (b+3k)^2 - 4(k+1)(2k-2)\\ &= b^2 + 6bk + 9k^2 - 4(2k^2 - 2)\\ &= b^2 + 6bk + 9k^2 - 8k^2 + 8\\ &= k^2 + 6bk + b^2 + 8\end{aligned}$$

b) As $b = 0$:

$$\Delta = k^2 + 8$$

Byvoorbeeld, as $k = 0$ dan $\Delta = 8$, as $k = -1$, dan $\Delta = 9$ en as $k = 1$ dan $\Delta = 9$.

Die wortels is reëel en ongelyk. Ons kan nie bepaal of die wortels rasionaal of irrasionaal is nie want dit hang af van die waarde van k.

c) As $b = 2$:

$$\begin{aligned}\Delta &= k^2 + 6(2)k + (2)^2 + 8\\ &= k^2 + 12k + 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= k^2 + 12k + 12\\ k &= \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}\\ &= \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 48}}{2}\\ &= \frac{-12 \pm \sqrt{96}}{2}\\ &= \frac{-12 \pm 4\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

$$k = -6 + 2\sqrt{6} \text{ of } k = -6 - 2\sqrt{6}$$

Die wortels is $k = -6 \pm 2\sqrt{6}$.

3. Toon aan dat $k^2x^2 + 2 = kx - x^2$ nie-reële wortels het vir alle waardes van k.

[IEB, Nov. 2002, HG]

Oplossing:

$$\begin{aligned}k^2x^2 + x^2 - kx + 2 &= 0\\ a &= (k^2 + 1)\\ b &= -k\\ c &= 2\\ \Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-k)^2 - 4(k^2 + 1)(2)\\ &= k^2 - 8k^2 - 8\\ &= -7k^2 - 8\\ \Delta &< 0\end{aligned}$$

Die wortels is daarom imaginêr.

4. Die vergelyking $x^2 + 12x = 3kx^2 + 2$ het reële wortels.

   a) Vind die grootste waarde van k sodat $k \in \mathbb{Z}$.
   b) Vind een rasionale waarde van k waarvoor bostaande vergelyking rasionale wortels het.

   [IEB, Nov. 2003, HG]

   Oplossing:

   a)

$$
\begin{aligned}
x^2 + 12x &= 3kx^2 + 2 \\
3kx^2 - x^2 - 12x + 2 &= 0 \\
x^2(3k-1) - 12x + 2 &= 0 \\
a &= 3k - 1 \\
b &= -12 \\
c &= 2 \\
\text{Gegee } \Delta &\geq 0 \\
\therefore b^2 - 4ac &\geq 0 \\
\therefore (-12)^2 - 4(3k-1)(2) &\geq 0 \\
152 - 24k &\geq 0 \\
152 &\geq 24k \\
k &\leq \frac{19}{3} \\
k &\leq 6\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

   Aangesien k 'n heelgetal moet wees, is die grootste waarde van $k = 6$.

   b) Vir rasionale wortels moet Δ 'n volkome vierkant wees.

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= 152 - 24k \\
\text{as } k &= \frac{1}{3} \\
\Delta &= 152 - 24\left(\frac{1}{3}\right) \\
&= 152 - 8 \\
&= 144 \\
&= 12^2
\end{aligned}
$$

   Dit is 'n volkome vierkant. Daarom, as $k = \frac{1}{3}$ dan is die wortels rasionaal.

5. Beskou die volgende vergelyking:

$$k = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

   waar $x \neq \frac{5}{2}$.

   a) Vind 'n waarde vir k waarvoor die wortels gelyk is.

b) Vind 'n heelgetal k waarvoor die wortels van die vergelyking rasionaal en ongelyk sal wees.

[IEB, Nov. 2004, HG]

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} k(2x-5) &= x^2-4 \\ 2kx-5k &= x^2-4 \\ 0 &= x^2-4-2kx+5k \\ 0 &= x^2-2kx+5k-4 \end{aligned}$$

$a=1; \qquad b=-2k; \qquad c=5k-4.$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2-4ac \\ &= (-2k)^2-4(1)(5k-4) \\ &= 4k^2-20k+16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 4k^2-20k+16 \\ &= k^2-5k+4 \\ &= (k-4)(k-1) \\ k &= 4 \text{ of } k=1 \end{aligned}$$

b)

$$\Delta = 4k^2-20k+16$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4k^2-20k+16 \\ 1 &= 4k^2-20k+16 \\ 0 &= 4k^2-20k+15 \end{aligned}$$

Hierdie is nie 'n heelgetal nie. Ons probeer dan 4:

$$\begin{aligned} 4 &= 4k^2-20k+16 \\ 0 &= 4k^2-20k+12 \\ &= k^2-5k+3 \end{aligned}$$

Hierdie is nie 'n heelgetal nie. Ons probeer dan 9:

$$\begin{aligned} 9 &= 4k^2-20k+16 \\ 0 &= 4k^2-20k+5 \end{aligned}$$

Hierdie is nie 'n heelgetal nie. Ons probeer dan 16:

$$\begin{aligned} 16 &= 4k^2-20k+16 \\ 0 &= 4k^2-20k \\ &= k^2-5k \\ k &= 0 \text{ of } k=5 \end{aligned}$$

As $k=0$ of $k=5$, die wortels is rasionaal en ongelyk.

6. a) Bewys dat die wortels van die vergelyking $x^2 - (a+b)x + ab - p^2 = 0$ reëel is vir alle reële waardes van a, b en p.
   b) Wanneer sal die wortels van die vergelyking gelyk wees?

   [IEB, Nov. 2005, HG]

   Oplossing:

   a) Ons moet bewys dat $\Delta \geq 0$.

$$\begin{aligned}\Delta &= (-a-b)^2 - 4(ab - p^2)\\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4p^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 4p^2\\ &= (a-b)^2 + 4p^2\end{aligned}$$

   $\Delta \geq 0$ vir alle reële waardes van a, b en p. Daarom is die wortels reëel vir alle reële waardes van a, b en p.

   b) Die wortels is gelyk as $\Delta = 0$, wat geld wanneer $a = b$ en $p = 0$.

7. Indien b en c slegs die waardes 1, 2 of 3 kan hê, bepaal alle getallepare $(b;\ c)$ sodat $x^2 + bx + c = 0$ reële wortels het.

   [IEB, Nov. 2005, HG]

   Oplossing:

   Ons moet die waardes van a, b en c vind waarvoor $\Delta \geq 0$.

$$\begin{aligned}a &= 1\\ b &= 1{,}2 \text{ of } 3\\ c &= 1{,}2 \text{ of } 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= b^2 - 4(1)c\end{aligned}$$

   Moontlike waardes vir die paar $(b;c)$:
   $(1;1),\ (1;2),\ (1;3),\ (2;1),\ (2;2),\ (2;3),\ (3;1),\ (3;2),\ (3;3)$.
   Ooreenstemmende waardes vir Δ: $(\Delta < 0),\ (\Delta < 0),\ (\Delta < 0),\ (\Delta = 0),\ (\Delta < 0),\ (\Delta < 0),\ (\Delta > 0),\ (\Delta > 0),\ (\Delta < 0)$

   $\Delta \geq 0$ (en daarom is die wortels reëel) vir $(b;c) = (2;1),\ (3;1),\ (3;2)$

2.7 Kwadratiese ongelykhede

Oefening 2 – 8: Oplos van kwadratiese ongelykhede

1. Los die volgende ongelykhede op en wys elke antwoord op 'n getallelyn:

a) $x^2 - x < 12.$

b) $3x^2 > -x + 4$

c) $y^2 < -y - 2$

d) $(3 - t)(1 + t) > 0$

e) $s^2 - 4s > -6$

f) $0 \geq 7x^2 - x + 8$

g) $x \geq -4x^2$

h) $2x^2 + x + 6 \leq 0$

i) $\frac{x}{x-3} < 2, x \neq 3$

j) $\frac{x^2+4}{x-7} \geq 0, x \neq 7$

k) $\dfrac{x+2}{x} - 1 \geq 0, x \neq 0$

Oplossing:

a)

$$x^2 - x - 12 < 0$$
$$(x - 4)(x + 3) < 0$$

Kritiese waardes		$x = -3$		$x = 4$	
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) = (x - 4)(x + 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

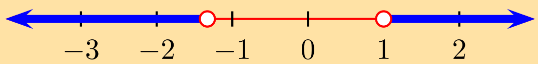
$\therefore -3 < x < 4$

b)

$$3x^2 + x - 4 > 0$$
$$(3x + 4)(x - 1) > 0$$

Kritiese waardes		$x = -\frac{4}{3}$		$x = 1$	
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x + 4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) = (3x + 4)(x - 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore x < -\frac{4}{3}$ of $x > 1$



c)

$$y^2 + y + 2 < 0$$

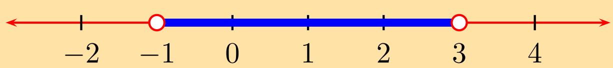
Daar is geen reële oplossing.

d)

$$(3 - t)(1 + t) > 0$$

Kritiese waardes		$t = -1$		$t = 3$	
$3 - t$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$1 + t$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) = (3 - t)(1 + t)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\therefore -1 < t < 3$



e)

$$s^2 - 4s + 6 > 0$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2} \end{aligned}$$

Die oplossing is alle reële waardes van s.

f)

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(7)(8)}}{2(7)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 224}}{14} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-223}}{14} \end{aligned}$$

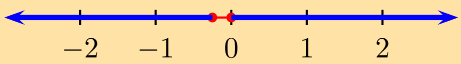
Die oplossing is alle reële waardes van x.

g)

$$\begin{aligned} x &\geq -4x^2 \\ 4x^2 + x &\geq 0 \\ x(4x+1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Kritiese waardes		$x = -\frac{1}{4}$		$x = 0$	
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$4x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) = x(4x+1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\therefore x \leq -\frac{1}{4}$ of $x \geq 0$.



h)

$$2x^2 + x + 6 \leq 0$$

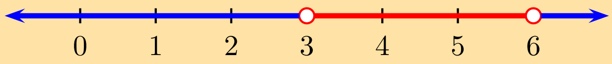
Daar is geen oplossing nie.

i)

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-3} &< 2 \\ \frac{x}{x-3} - 2 &< 0 \\ \frac{x - 2(x-3)}{x-3} &< 0 \\ \frac{x - 2x + 6}{x-3} &< 0 \\ \frac{-x+6}{x-3} &< 0 \\ \frac{-(x-6)}{x-3} &< 0 \\ \frac{x-6}{x-3} &> 0 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Kritiese waardes		$x = 3$		$x = 6$	
$x - 3$	$-$	ongedef	$+$	$+$	$+$
$x - 6$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) = x - 6$	$+$	ongedef	$-$	0	$+$

$\therefore x < 3$ of $x > 6$ en $x \neq 3$.

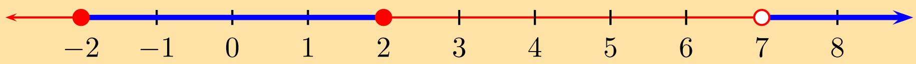


j)

$$\frac{(x+2)(x-2)}{x-7} \geq 0$$

Kritiese waardes		$x = -2$		$x = 2$		$x = 7$	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 7$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	ongedef	$+$
$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-7}$	$-$	0	$+$	0	$-$	ongedef	$+$

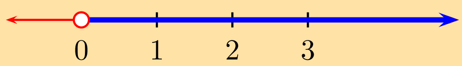
$\therefore -2 \leq x \leq 2$ en $x > 7$ met $x \neq 7$.



k)

$$\frac{x+2}{x} - 1 \geq 0$$
$$\frac{x+2-x}{x} \geq 0$$
$$\frac{2}{x} \geq 0$$
$$\text{Dus } x > 0$$

$\therefore x > 0$ en $x \neq 0$.



2. Teken 'n skets van die volgende ongelykhede en los op vir x:

a) $2x^2 - 18 > 0$

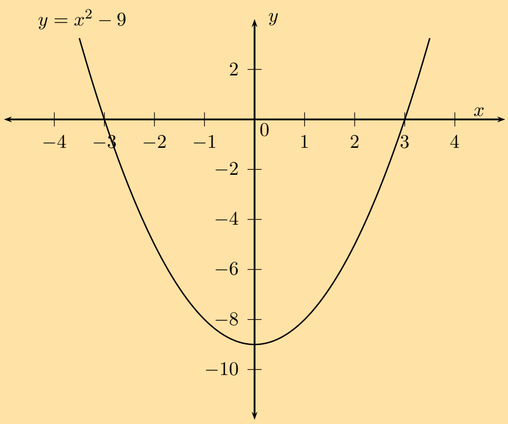
b) $5 - x^2 \leq 0$

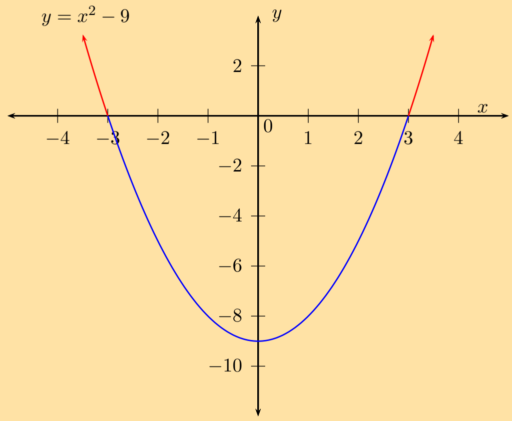
c) $x^2 < 0$

d) $0 \geq 6x^2$

Oplossing:

a)

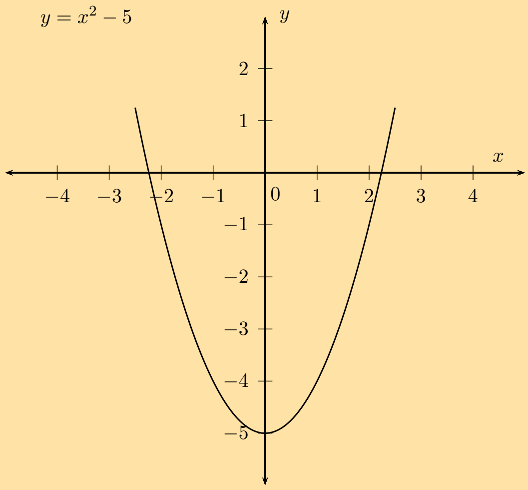


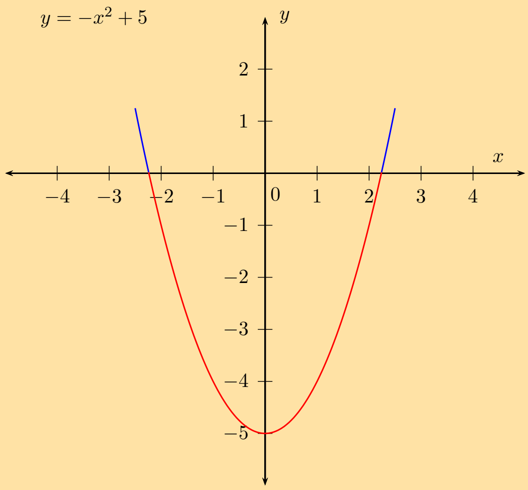


$x < -3$ of $x > 3$.

b)

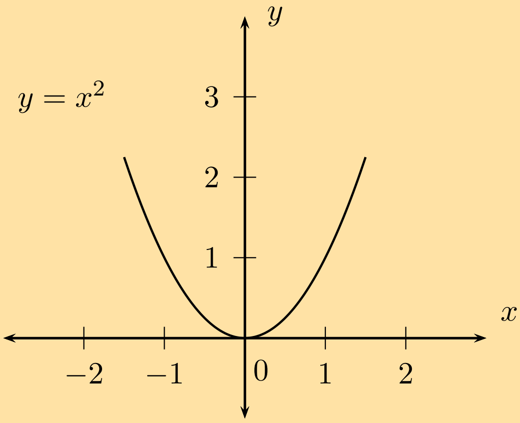
$$5 - x^2 \leq 0$$
$$-(x^2 - 5) \leq 0$$
$$x^2 - 5 \geq 0$$
$$\text{Dus } x > 0$$





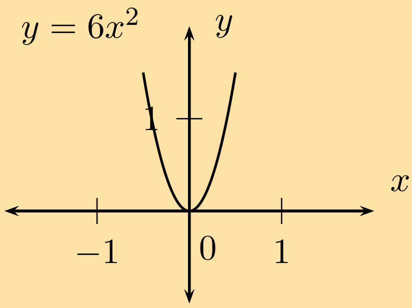
$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$.

c)



Daar is geen oplossing nie.

d) Teken die parabool:



Ons sien dat hierdie parabool nooit die x-as raak nie en altyd positief is. Daarom is die ongelykheid waar vir alle reële waardes van x.

2.8 Gelyktydige vergelykings

Oefening 2 – 9: Oplos van gelyktydige vergelykings

1. Los die volgende stel gelyktydige vergelykings algebraïes op. Gee jou antwoord in wortelvorm waar van toepassing.

   a) $y + x = 5$
   $y - x^2 + 3x - 5 = 0$

   b) $y = 6 - 5x + x^2$
   $y - x + 1 = 0$

   c) $y = \frac{2x+2}{4}$
   $y - 2x^2 + 3x + 5 = 0$

   d) $a - 2b - 3 = 0$; $a - 3b^2 + 4 = 0$

   e) $x^2 - y + 2 = 3x$
   $4x = 8 + y$

   f) $2y + x^2 + 25 = 7x$
   $3x = 6y + 96$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} y + x &= 5 \\ y &= 5 - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - x^2 + 3x - 5 &= 0 \\ y &= x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 - x &= x^2 - 3x + 5 \\ 0 &= x^2 - 2x \\ 0 &= x(x - 2) \\ \therefore x &= 0 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

As $x = 0$:

$$\begin{aligned} y &= 5 - 0 \\ \therefore y &= 5 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(0; 5)$.
As $x = 2$:

$$\begin{aligned} y &= 5 - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(2; 3)$.
$(0; 5)$ en $(2; 3)$

b)

$$y = 6 - 5x + x^2$$

$$\begin{aligned} y - x + 1 &= 0 \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 - 5x + x^2 &= x - 1 \\ x^2 - 6x + 7 &= 0 \\ x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} \\ x &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2} \\ x &= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2} \\ x &= \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ x &= 3 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

As $x = 3 - \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} y &= 3 - \sqrt{2} - 1 \\ \therefore y &= 2 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

As $x = 3 + \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} y &= 3 + \sqrt{2} - 1 \\ &= 2 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$x = 3 \pm \sqrt{2}$ en $y = 2 \pm \sqrt{2}$

c)

$$y = \frac{2x + 2}{4}$$

$$\begin{aligned} y - 2x^2 + 3x + 5 &= 0 \\ y &= 2x^2 - 3x - 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2x+2}{4} &= 2x^2 - 3x - 5 \\ 2x + 2 &= 8x^2 - 12x - 20 \\ 0 &= 8x^2 - 14x - 22 \\ 0 &= 4x^2 - 7x - 11 \\ 0 &= (4x - 11)(x + 1) \\ \therefore x = -1 \text{ of } x &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

As $x = -1$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2(-1) + 2}{4} \\ y &= 0 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(-1; 0)$.
As $x = \frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2(\frac{1}{4}) + 2}{4} \\ y &= \frac{\frac{5}{2}}{4} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(\frac{1}{4}; \frac{5}{8})$.
$(-1; 0)$ en $(\frac{1}{4}; \frac{5}{8})$

d)

$$a = 2b + 3$$

$$\begin{aligned} a - 3b^2 + 4 &= 0 \\ a &= 3b^2 - 4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2b + 3 &= 3b^2 - 4 \\
0 &= 3b^2 - 2b - 7 \\
0 &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-7)}}{2(3)} \\
b &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 84}}{6} \\
b &= \frac{2 \pm \sqrt{88}}{6}
\end{aligned}
$$

As $b = \frac{2+\sqrt{88}}{6}$:

$$
\begin{aligned}
a &= 2\left(\frac{2+\sqrt{88}}{6}\right) + 3 \\
&= \frac{2+\sqrt{88}}{3} + 3 \\
&= \frac{11+\sqrt{88}}{3}
\end{aligned}
$$

As $b = \frac{2-\sqrt{88}}{6}$:

$$
\begin{aligned}
a &= 2\left(\frac{2-\sqrt{88}}{6}\right) + 3 \\
&= \frac{2-\sqrt{88}}{3} + 3 \\
&= \frac{11-\sqrt{88}}{3}
\end{aligned}
$$

$b = \frac{2 \pm \sqrt{88}}{6}$ en $a = \frac{11 \pm \sqrt{88}}{6}$

e)

$$
\begin{aligned}
x^2 + y + 2 &= 3x \\
y &= -x^2 + 3x - 2
\end{aligned}
$$

$$
y = 4x - 8
$$

$$
\begin{aligned}
4x - 8 &= -x^2 + 3x - 2 \\
x^2 + x - 6 &= 0 \\
(x+3)(x-2) &= 0 \\
\therefore x &= -3 \text{ of } x = 2
\end{aligned}
$$

As $x = -3$:

$$
\begin{aligned}
y &= 4(-3) - 8 \\
y &= -20
\end{aligned}
$$

Dit gee die punt $(-3; -20)$.

As $x = 2$:

$$\begin{aligned} y &= 4(2) - 8 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dit gee die punt $(2; 0)$.

$(-3; -20)$ en $(2; 0)$

f)

$$\begin{aligned} 2y + x^2 + 25 &= 7x \\ 2y + x^2 + 25 &= 7x - x^2 + 25 \\ y &= \frac{-x^2 + 7x + 25}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= x - 32 \\ y &= \frac{x - 32}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x - 32}{2} &= \frac{-x^2 + 7x + 25}{2} \\ x - 32 &= -x^2 + 7x + 25 \\ x^2 - 6x - 57 = 0 \\ x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-57)}}{2(1)} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 228}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{264}}{2} \end{aligned}$$

As $x = \frac{6 + \sqrt{264}}{2}$:

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{6 + \sqrt{264}}{2} - 32 \\ y &= \frac{70 + \sqrt{264}}{4} \\ &= \frac{70 + \sqrt{264}}{4} \end{aligned}$$

As $x = \frac{6 - \sqrt{264}}{2}$:

$$\begin{aligned} 2y &= \frac{6 - \sqrt{264}}{2} - 32 \\ y &= \frac{70 - \sqrt{264}}{4} \\ &= \frac{70 - \sqrt{264}}{4} \end{aligned}$$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{264}}{2}$ en $y = \frac{70 \pm \sqrt{264}}{2}$

2. Los die volgende stel gelyktydige vergelykings grafies op. Bevestig jou oplossings deur dit ook algebraïes op te los.

a) $x^2 - 1 - y = 0$
$y + x - 5 = 0$

b) $x + y - 10 = 0$
$x^2 - 2 - y = 0$

c) $xy = 12$
$7 = x + y$

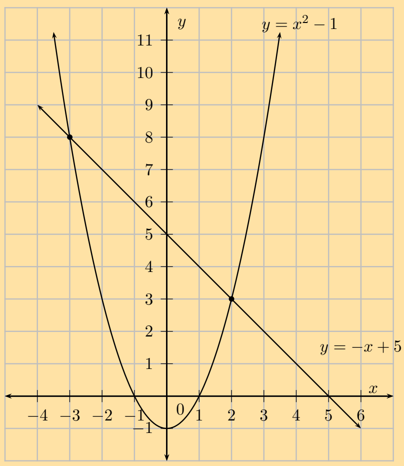
d) $6 - 4x - y = 0$
$12 - 2x^2 - y = 0$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} x^2 - 1 - y &= 0 \\ y &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y + x - 5 &= 0 \\ y &= -x + 5 \end{aligned}$$



Die oplossing is die punte $(-3; 8)$ en $(2; 3)$.

b)

$$\begin{aligned} x + y - 10 &= 0 \\ y &= -x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2 - y &= 0 \\ y &= x^2 - 2 \end{aligned}$$

Die oplossing is die punte $(-4; 14)$ en $(3; 7)$.

c)

$$\begin{aligned} xy &= 12 \\ y &= \frac{12}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 &= x + y \\ y &= 7 - x \end{aligned}$$

Beperkings: $x \neq 0$ en $y \neq 0$

Die oplossing is die punte $(3;4)$ en $(4;3)$.

d)

$$\begin{aligned} 6 - 4x - y &= 0 \\ y &= -4x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 - 2x^2 - y &= 0 \\ y &= -2x^2 + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x + 6 &= -2x^2 + 12 \\ 2x - 3 &= x^2 - 6 \\ x^2 - 2x - 9 &= 0 \\ x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{(4 + 36}}{2} \\ x &= \frac{2 \pm \sqrt{40}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -4\left(\frac{2 \pm \sqrt{40}}{2}\right) + 6 \\ &= -2(2 \pm \sqrt{40}) + 6 \\ &= -4 \pm 2\sqrt{40} + 6 \\ &= 2 \pm 2\sqrt{40} \end{aligned}$$

Probleemoplossing strategie

Oefening 2 – 10:

1. Mr. Tsilatsila bou 'n heining rondom sy reghoekige groentetuin van 8 m^2. Gestel die groentetuin se lengte is dubbeld dié van sy breedte. Bepaal die afmetings van Mr. Tsilatsila se groentetuin.

   Oplossing:

   $A = l \times b$

   $l = 2b$

   $$\begin{aligned} A = 8 &= l \times b \\ &= 2b(b) \\ &= 2b^2 \\ b^2 &= 4 \\ b &= \pm 2 \end{aligned}$$

   $b = 2$ m, $l = 4$ m

2. Kevin speel 'n paar rondtes kegelbal. In die derde rondte het hy 80 meer punte as in die tweede rondte aangeteken. In die eerste rondte het hy 110 punte minder as in die tweede rondte aangeteken. Sy totale puntetelling vir die eerste twee rondtes was 208. As hy 'n gemiddelde telling van 146 wil hê, hoeveel punte moet hy in die vierde rondte aanteken?

   Oplossing:

   Die eerste rondte $= a$, die tweede rondte $= b$, die derde rondte $= c$ en die vierde rondte $= d$:

   $$\begin{aligned} c &= 80 + b \\ a &= c - 110 \\ a + b &= 208 \\ \frac{a+b+c+d}{4} &= 146 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} c &= 80 + b \\ c &= a + 110 \end{aligned}$$

   En $a = 208 - b$

   $$\begin{aligned} 80 + b &= 208 - b + 110 \\ 2b &= 208 + 110 - 80 \\ 2b &= 238 \\ b &= 119 \end{aligned}$$

$$a + b = 208$$
$$a + 119 = 208$$
$$a = 89$$

$$c = 80 + b$$
$$c = 80 + 208$$
$$c = 288$$

$$\frac{a + b + c + d}{4} = 164$$
$$496 + d = 656$$
$$d = 187$$

Kevin moet 187 punte in die vierde rondte aanteken.

3. As 'n voorwerp laat val word of afwaarts gegooi word, word die afstand, d, wat dit val in t sekondes, deur die volgende vergelyking beskryf:

   $s = 5t^2 + v_0 t$

   In hierdie vergelyking is, v_0 die aanvangssnelheid, gegee in m·s^{-1}. Afstand word gemeet in meter, en tyd in sekondes. Gebruik die vergelyking om te bepaal hoe lank dit neem vir 'n tennisbal om die grond te bereik as dit afwaarts gegooi word vanuit 'n warmlugballon wat 500 m hoog is. Die aanvangsnelheid van die bal is 5 m·s^{-1}.

   Oplossing:

$$s = 5t^2 + v_0 t$$
$$500 = 5t^2 + 5t$$
$$t^2 + t - 100 = 0$$
$$t = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(100)}}{2(1)}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 400}}{2}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{401}}{2}$$

   $t = 10{,}5$ s

4. Die tabel hieronder gee die tye wat dit vir Sheila neem om die gegewe afstande te stap.

tyd (minute)	5	10	15	20	25	30
afstand (km)	1	2	3	4	5	6

   Stip die punte.

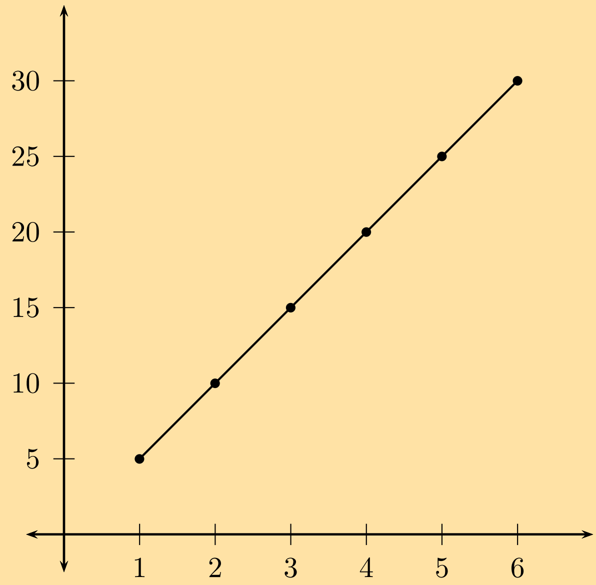
   Indien die verwantskap tussen die afstande en tye lineêr is, kry die vergelyking van die reguitlyn deur enige twee punte te gebruik. Gebruik dan hierdie vergelyking om die volgende vrae te beantwoord:

   a) Hoe lank sal dit Sheila neem om 21 km te stap?

b) Hoe ver sal Sheila stap in 7 minute?

As Sheila die tempo waarteen sy stap sou halveer, hoe sou die grafiek van haar afstande en tye lyk?

Oplossing:



$t = 5d$

$t = 5(21) = 105$ minute

Sheila sal stap $d = \frac{7}{5} = 1{,}4$ kilometre in 7 minute.

Die gradiënt van die grafiek sal twee keer soveel wees as die gradiënt van die eerste grafiek. Die grafiek is steiler en lê nader aan die y-as.

5. Die drywing P (in watt) wat aan 'n stroombaan deur 'n 12 volt battery verskaf word, word gegee deur die formule $P = 12I - 0{,}5I^2$ waar I die stroom in ampere is.

   a) Omdat beide die drywing en die stroom groter moet wees as 0, kry die grense van die stroom wat deur die stroombaan getrek kan word.
   b) Teken 'n grafiek van $P = 12I - 0{,}5I^2$ en gebruik jou antwoord van die eerste vraag om die terrein van die grafiek te bepaal.
   c) Wat is die maksimum stroom wat getrek kan word?
   d) Lees af van jou grafiek hoeveel drywing verskaf word aan die stroombaan as die stroom 10 ampere is. Gebruik die vergelyking om jou antwoord te kontroleer.
   e) By watter waarde van die stroom sal die drywing verskaf 'n maksimum wees?

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} 0 &= 12I - 0{,}5I^2 \\ 0{,}5I^2 - 12I &= 0 \\ I(0{,}5I - 12) &= 0 \\ I &= 0 \text{ of } I = 24 \end{aligned}$$

b)

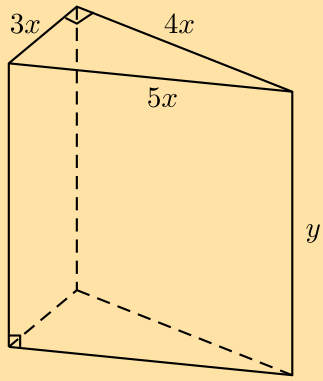
c) Die maksimum stroom is 24 A.

d) Die drywing is 70 W.

$$\begin{aligned} P &= 12(10) - \frac{1}{2}(10)^2 \\ &= 120 - 50 \\ &= 70 \end{aligned}$$

e) 12 A

6. 'n Houtblok word gemaak soos in die diagram gewys. Die eindvlakke is reghoekige driehoeke met kante $3x$, $4x$ en $5x$. Die lengte van die blok is y. Die totale buiteoppervlakte van die blok is 3600 cm^2.



Wys dat

$y = \frac{300-x^2}{x}$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 3600 &= 3xy + 5xy + 4xy + 2\left(\frac{1}{2}(3x)(4x)\right) \\ 3600 &= 12xy + 12x^2 \\ 3600 - 12x^2 &= 12xy \\ \frac{3600 - 12x^2}{12x} &= y \\ \therefore y &= \frac{300 - x^2}{x} \end{aligned}$$

Oefening 2 – 11: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Los op: $x^2 - x - 1 = 0$. Gee jou antwoord korrek tot **twee** desimale plekke.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ x = 1{,}62 &\text{ of } x = -0{,}62 \end{aligned}$$

2. Los op: $16\,(x+1) = x^2\,(x+1)$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 16(x+1) &= x^2(x+1) \\ 16(x+1) - x^2(x+1) &= 0 \\ (16 - x^2)(x+1) &= 0 \\ x^2 &= 16 \text{ of } x = -1 \\ x &= \pm 4 \text{ of } x = -1 \end{aligned}$$

3. Los op: $y^2 + 3 + \frac{12}{y^2+3} = 7$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Laat } y^2 + 3 &= k \\ \text{Beperking: } y^2 + 3 &\neq 0 \\ \text{Dus } k &\neq 0 \\ \therefore k + \frac{12}{k} &= 7 \\ k^2 + 12 &= 7k \\ k^2 - 7k + 12 &= 0 \\ (k-3)(k-4) &= 0 \\ k &= 3 \text{ of } k = 4 \\ \therefore y^2 + 3 &= 3 \text{ of } y^2 + 3 = 4 \\ \therefore y^2 &= 0 \text{ of } y^2 = 1 \\ \therefore y &= 0 \text{ of } y = \pm 1 \end{aligned}$$

4. Los op vir x: $2x^4 - 5x^2 - 12 = 0$

Oplossing:

$$\begin{aligned} 2x^4 - 5x^2 - 12 &= 0 \\ (x^2 - 4)(2x^2 + 3) &= 0 \\ x^2 = 4 \text{ of } x^2 &= -\frac{3}{2} \quad \text{(geen reële oplossing)} \\ \therefore x &= \pm 2 \end{aligned}$$

5. Los op vir x:

   a) $x\,(x - 9) + 14 = 0$

   b) $x^2 - x = 3$ (Gee jou antwoord korrek tot **een** desimale plek.)

   c) $x + 2 = \frac{6}{x}$ (Gee jou antwoord korrek tot **twee** desimale plekke.)

   d) $\frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x-1} = 1$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} x(x - 9) + 14 &= 0 \\ x^2 - 9x + 14 &= 0 \\ (x - 7)(x - 2) &= 0 \\ x = 7 \text{ of } x &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x^2 - x &= 3 \\ x^2 - x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ x = 2{,}3 \text{ of } x &= -1{,}3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x + 2 &= \frac{6}{x} \\ x^2 + 2x - 6 &= 0 \\ x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 24}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{7}}{2} \\ &= -1 \pm \sqrt{7} \\ x = 1{,}65 \text{ of } x &= -3{,}65 \end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+1}+\frac{2x}{x-1} &= 1 \\
(x-1)+2x(x+1) &= (x+1)(x-1) \\
x-1+2x^2+2x &= x^2-1 \\
x^2+3x &= 0 \\
x(x+3) &= 0 \\
x &= 0 \text{ of } x=-3
\end{aligned}
$$

6. Los op vir x in terme van p deur vierkantsvoltooiing: $x^2-px-4=0$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x^2-px-4 &= 0 \\
x^2-px+\frac{p^2}{4} &= 4+\frac{p^2}{4} \\
\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{16+p^2}{4} \\
x-\frac{p}{2} &= \sqrt{\frac{16+p^2}{4}} \\
x &= \frac{\sqrt{16+p^2}}{2}-\frac{p}{2} \\
&= \frac{\sqrt{16+p^2}-2}{2}
\end{aligned}
$$

7. Die vergelyking $ax^2+bx+c=0$ het wortels $x=\frac{2}{3}$ en $x=-4$. Kry een stel moontlike waardes vir a, b en c.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(3x-2)(x+4) &= 0 \\
3x^2+12x-2x-8 &= 0 \\
3x^2+10x-8 &= 0 \\
\therefore a &= 3 \\
b &= 10 \\
c &= -8
\end{aligned}
$$

8. Die twee wortels van die vergelyking $4x^2+px-9=0$ verskil met 5. Bereken die waarde van p.

   Oplossing:

$$4x^2+px-9=0$$

   Gebruik kwadraatsvoltooiing:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4(4)(-9)}}{8} \\
&= \pm\frac{\sqrt{144+p^2}}{8}
\end{aligned}
$$

$$\therefore x_1 = \frac{-p + \sqrt{144 + p^2}}{8} \text{ en } x_2 = \frac{-p - \sqrt{144 + p^2}}{8}$$

$$x_1 - x_2 = 5$$

$$\therefore \frac{-p + \sqrt{144 + p^2}}{8} - \frac{-p - \sqrt{144 + p^2}}{8} = 5$$

$$-p + \sqrt{144 + p^2} + p + \sqrt{144 + p^2} = 40$$

$$\sqrt{p^2 + 144} = 20$$

$$p^2 + 144 = 400$$

$$p^2 = 256$$

$$\therefore p = \pm 16$$

9. 'n Vergelyking van die vorm $x^2 + bx + c = 0$ word op die bord geskryf. Saskia en Sven skryf dit verkeerd af. Saskia het 'n fout gemaak in die konstante term en kry die oplossings -4 en 2. Sven het 'n fout gemaak in die koëffisiënt van x en kry die oplossings van 1 en -15. Bepaal die korrekte vergelyking wat op die bord geskryf was.

   Oplossing:

   Saskia:

$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ en } b = 2$$

   Sven:

$$(x - 1)(x + 15) = 0$$

$$x^2 + 14x - 15 = 0$$

$$\therefore c = -15$$

   Korrekte vergelyking:

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$(x + 5)(x - 3) = 0$$

$$\therefore \text{ korrekte wortels is } x = -5 \text{ en } x = 3$$

10. Vir watter waardes van b is uitdrukking $\frac{b^2-5b+6}{b+2}$

    a) ongedefiniëerd?

    b) gelyk aan nul?

    Oplossing:

    a) Die uitdrukking is ongedefiniëerd vir $b = -2$

    b)

$$\frac{b^2 - 5b + 6}{b + 2} = 0$$

$$\frac{(b - 2)(b - 3)}{b + 2} = 0$$

Oplossing: $b = 2$ of $b = 3$
Beperkings: $b = -2$

11. Gegee $\frac{(x^2-6)(2x+1)}{x+2} = 0$. Los op vir x as:

   a) x 'n reële getal is.
   b) x 'n rasionale getal is.
   c) x 'n irrasionale getal is.
   d) x 'n heelgetal is.

   Oplossing:

   Beperkings: $x \neq -2$.

$$(x^2 - 6)(2x + 1) = 0$$
$$x = \frac{-1}{2} \text{ of } x = \pm\sqrt{6}$$

   a) Die drie oplossings is reëel.
   b) $x = \frac{-1}{2}$
   c) $x = \pm\sqrt{6}$
   d) Daar is geen heelgetal oplossing.

12. Gegee: $\frac{(x-6)^{\frac{1}{2}}}{x^2+3}$. Vir watter waarde(s) van x is die vergelyking:

   a) gelyk aan nul?
   b) ongedefiniëerd?

   Oplossing:

   a) Gelyk aan nul: $x = 6$
   b) Ongedefiniëerd: $x = \pm\sqrt{3}$

13. Los op vir a as $\frac{\sqrt{8-2a}}{a-3} \geq 0$.

   Oplossing:

   Beperkings: $a \neq 3$.

$$\sqrt{8-2a} = 0$$
$$8 - 2a = 0$$
$$a = 4$$

   Tabel van waardes:

Kritiese waardes		$a = 3$		$a = 4$	
$a - 3$	$-$	ongedef	$+$	$+$	$+$
$a - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$-$	ongedef	$-$	0	$+$

   Oplossing: $a \geq 4$

14. Abdoul het in 'n buitelandse handboek afgekom op die volgende formule om die kwadratiese vergelyking $ax^2 + bx + c = 0$ op te los:

$$x = \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

a) Gebruik hierdie formule om die volgende vergelyking op te los: $2x^2 + x - 3 = 0$.

b) Los die vergelyking weereens op, deur faktorisering, om te sien of die gegewe formule werk vir hierdie vergelyking.

c) Abdoul het probeer om hierdie formule af te lei ten einde te bewys dat dit altyd werk. Hy het egter vasgesteek op 'n punt. Hier is sy poging:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 && \\
a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} &= 0 && \text{Deel deur } x^2 \text{ waar } x \neq 0 \\
\frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a &= 0 && \text{Herrangskik} \\
\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \frac{a}{c} &= 0 && \text{Deel deur } c \text{ waar } c \neq 0 \\
\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} &= -\frac{a}{c} && \text{Trek } \tfrac{a}{c} \text{ weerskante af} \\
\therefore \frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \ldots & && \text{Steek vas}
\end{aligned}$$

Voltooi sy afleiding.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
x &= \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \\
&= \frac{2(-3)}{-(1) \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-3)}} \\
&= \frac{-6}{-1 \pm \sqrt{25}} \\
&= \frac{-6}{-1 \pm 5}
\end{aligned}$$

$$x = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \text{ of } x = \frac{-6}{-6} = 1$$

b)

$$\begin{aligned}
2x^2 + x - 3 &= 0 \\
(2x + 3)(x - 1) &= 0 \\
x &= -\frac{3}{2} \text{ of } x = 1
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= 0 \\
a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} &= 0 \\
\frac{c}{x^2} + \frac{b}{x} + a &= 0 \\
\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \frac{a}{c} &= 0 \\
\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} &= -\frac{a}{c} \\
\frac{1}{x^2} + \frac{b}{cx} + \frac{b^2}{4c^2} &= -\frac{a}{c} + \frac{b^2}{4c^2} \\
\left(\frac{1}{x} + \frac{b}{2c}\right)^2 &= \frac{-4ac + b^2}{4c^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4c^2} \\
\frac{1}{x} + \frac{b}{2c} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4c^2}} \\
\frac{1}{x} &= -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4c^2}} \\
\frac{1}{x} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \\
\therefore x &= \frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}
\end{aligned}$$

15. Los op vir x:

a) $\frac{4}{x-3} \leq 1$

b) $\frac{4}{(x-3)^2} < 1$

c) $\frac{2x-2}{x-3} > 3$

d) $\frac{-3}{(x-3)(x+1)} < 0$

e) $(2x - 3)^2 < 4$

f) $2x \leq \frac{15-x}{x}$

g) $\frac{x^2+3}{3x-2} \leq 0$

h) $x - 2 \geq \frac{3}{x}$

i) $\frac{x^2+3x-4}{5+x^4} \leq 0$

j) $\frac{x-2}{3-x} \geq 1$

Oplossing:

a) $x < 3$ or $x \geq 7$

b) $x < 1$ or $x > 5$

c) $3 < x < 7$

d) $x < -1$ of $x > 3$

e) $0{,}5 < x < 2{,}5$

f) $x \leq -3$ of $0 < x \leq \frac{5}{2}$

g) $x < \frac{2}{3}$

h) $-1 \leq x < 0$ of $x \geq 3$

i) $-4 \leq x \leq 1$

j) $2\frac{1}{2} \leq x < 3$

16. Los die volgende stel gelyktydige vergelykings algebraïes op. Gee jou antwoord in wortelvorm waar van toepassing.

a) $y - 2x = 0$
$y - x^2 - 2x + 3 = 0$

b) $a - 3b = 0$
$a - b^2 + 4 = 0$

c) $y - x^2 - 5x = 0$
$10 = y - 2x$

d) $p = 2p^2 + q - 3$
$p - 3q = 1$

e) $a - b^2 = 0$
$a - 3b + 1 = 0$

f) $a - 2b + 1 = 0$
$a - 2b^2 - 12b + 4 = 0$

g) $y + 4x - 19 = 0$
$8y + 5x^2 - 101 = 0$

h) $a + 4b - 18 = 0$
$2a + 5b^2 - 57 = 0$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} y - 2x &= 0 \\ y &= 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - x^2 - 2x + 3 &= 0 \\ y &= x^2 + 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x &= x^2 + 2x - 3 \\ 0 &= x^2 - 3 \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

As $x = \sqrt{3}$:

$$y = 2\sqrt{3}$$

Dit gee die punt $(\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.
As $x = -\sqrt{3}$:

$$y = -2(\sqrt{3})$$

Dit gee die punt $(-\sqrt{3}; -2\sqrt{3})$.
Oplossing: $x = \pm\sqrt{3}$ en $y = \pm 2\sqrt{3}$.

b)

$$\begin{aligned} a - 3b &= 0 \\ a &= 3b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - b^2 + 4 &= 0 \\ a &= b^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3b &= b^2 - 4 \\ 0 &= b^2 - 3b - 4 \\ (b-4)(b+1) &= 0 \\ b &= 4 \text{ of } b = -1 \end{aligned}$$

As $b = 4$:

$$a = 12$$

As $b = -1$:

$$a = -3$$

Oplossing: $a = -3$ en $b = -1$ of $a = 12$ en $b = 4$.

c)

$$\begin{aligned} y - x^2 - 5x &= 0 \\ y &= x^2 + 5x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10 &= y - 2x \\ y &= 2x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 5x &= 2x + 10 \\ x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ (x+5)(x-2) &= 0 \\ x &= -5 \text{ of } x = 2 \end{aligned}$$

As $x = -5$:

$$\begin{aligned} y &= 2(-5) + 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

As $x = 2$:

$$\begin{aligned} y &= 2(2) + 10 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Oplossing: $x = -5$ en $y = 0$ of $x = 2$ en $y = 14$.

d)

$$\begin{aligned} p &= 2p^2 + q - 3 \\ q &= -2p^2 + p + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p - 3q &= 1 \\ q &= \frac{p-1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2p^2 + p + 3 &= \frac{p-1}{3} \\ -6p^2 + 3p + 9 &= p - 1 \\ 6p^2 - 4p - 10 &= 0 \\ 3p^2 - 2p - 5 &= 0 \\ (3p-5)(p+1) &= 0 \\ p &= \frac{5}{3} \text{ of } p = -1 \end{aligned}$$

As $p = \frac{5}{3}$:

$$\begin{aligned} q &= \frac{\frac{5}{3} - 1}{3} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

As $p = -1$:

$$\begin{aligned} q &= \frac{(-1) - 1}{3} \\ &= \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

Oplossing: $p = \frac{5}{3}$ en $q = \frac{2}{9}$ of $p = -1$ en $q = \frac{-2}{3}$.

e)

$$\begin{aligned} a - b^2 &= 0 \\ a &= b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - 3b + 1 &= 0 \\ a &= 3b - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= 3b - 1 \\ b^2 - 3b + 1 &= 0 \\ b &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

As $b = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$:

$$\begin{aligned} a &= 3\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

As $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$:

$$\begin{aligned} a &= 3\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Oplossing: $b = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ en $a = \frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$.

f)

$$\begin{aligned} a - 2b + 1 &= 0 \\ a &= 2b - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a - 2b^2 - 12b + 4 &= 0 \\ a &= 2b^2 + 12b - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2b - 1 &= 2b^2 + 12b - 4 \\ 2b^2 + 10b - 5 &= 0 \\ b &= \frac{-(10) \pm \sqrt{(10)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} \\ &= \frac{-10 \pm \sqrt{140}}{4} \end{aligned}$$

As $b = \frac{-10+\sqrt{140}}{4}$:

$$\begin{aligned} a &= 2\left(\frac{-10 + \sqrt{140}}{4}\right) - 1 \\ &= \frac{-24 + 2\sqrt{140}}{4} \\ &= \frac{-12 + \sqrt{140}}{2} \end{aligned}$$

As $b = \frac{-10-\sqrt{140}}{4}$:

$$\begin{aligned} a &= 2\left(\frac{-10 - \sqrt{140}}{4}\right) - 1 \\ &= \frac{-24 - 2\sqrt{140}}{4} \\ &= \frac{-12 - \sqrt{140}}{2} \end{aligned}$$

Oplossing: $b = \frac{-10\pm\sqrt{140}}{4}$ en $a = \frac{-12\pm\sqrt{140}}{2}$.

g)

$$\begin{aligned} y + 4x - 19 &= 0 \\ y &= -4x + 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8y + 5x^2 - 101 &= 0 \\ 8y &= -5x^2 + 101 \\ y &= \frac{-5x^2 + 101}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x + 19 &= \frac{-5x^2 + 101}{8} \\ -32x + 152 &= -5x^2 + 101 \\ 5x^2 - 32x + 51 &= 0 \\ x &= \frac{-(-32) \pm \sqrt{(-32)^2 - 4(5)(51)}}{2(5)} \\ &= \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 1020}}{10} \\ &= \frac{32 \pm \sqrt{4}}{10} \end{aligned}$$

$x = 3{,}4$ of $x = 3$

As $x = 3{,}4$:

$$\begin{aligned} y &= -4(3{,}4) + 19 \\ &= 5{,}4 \end{aligned}$$

As $x = 3$:

$$\begin{aligned} y &= -4(3) + 19 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Oplossing: $x = 3{,}4$ en $y = 5{,}4$ of $x = 3$ en $y = 5$.

h)

$$\begin{aligned} a + 4b - 18 &= 0 \\ a &= -4b + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2a + 5b^2 - 57 &= 0 \\ 2a &= -5b^2 + 57 \\ a &= \frac{-5b^2 + 57}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4b + 18 &= \frac{-5b^2 + 57}{2} \\ -8x + 36 &= -5b^2 + 57 \\ 5b^2 - 8x - 21 &= 0 \\ b &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(5)(-21)}}{2(5)} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64 + 420}}{10} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{484}}{10} \\ b = 3 &\text{ of } b = -1{,}4 \end{aligned}$$

As $b = 3$:

$$\begin{aligned} a &= -4(3) + 18 \\ &= 6 \end{aligned}$$

As $b = -1{,}4$:

$$\begin{aligned} y &= -4(-1{,}4) + 18 \\ &= 23{,}6 \end{aligned}$$

Oplossing: $b = -1{,}4$ en $a = 23{,}6$ of $b = 3$ en $a = 6$.

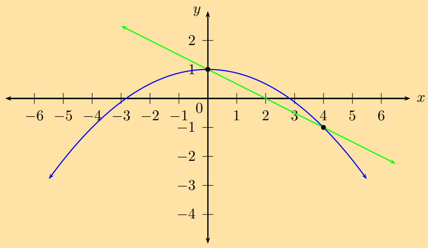
17. Los die volgende stelsel van vergelykings grafies op:

a) $2y + x - 2 = 0$
$8y + x^2 - 8 = 0$

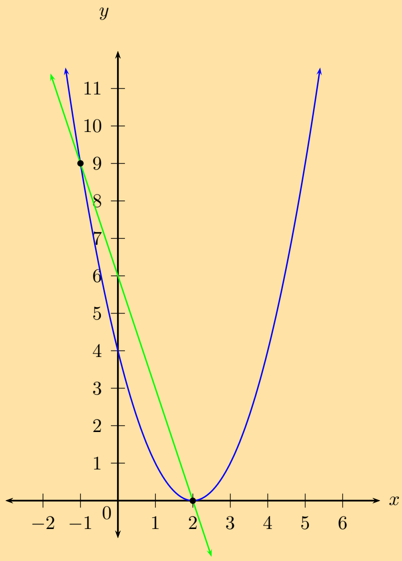
b) $y + 3x - 6 = 0$
$y = x^2 + 4 - 4x$

Oplossing:

a)



b)



18. 'n Klip word vertikaal opwaarts gegooi en sy hoogte bo die grond (in meter) in tyd t (in sekondes) word gegee deur:

    $h\left(t\right) = 35 - 5t^2 + 30t$

    Bepaal die oorspronklike hoogte bo die grond.

    Oplossing:

    Laat $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= 35 - 5t^2 + 30t \\
h(0) &= 35 - 5(0)^2 + 30(0) \\
&= 35 \text{ m}
\end{aligned}
$$

19. 'n Vervoermaatskapy het, nadat hulle navorsing daaroor gedoen het, bepaal dat die koers waarteen petrol verbruik word deur een van sy groot voertuie, wat teen 'n gemiddelde spoed van x km per uur reis, gegee word deur:

$$
P(x) = \frac{55}{2x} + \frac{x}{200} \quad \text{liters per kilometer}
$$

    Neem aan dat die petrol R 4,00 per liter kos en dat die drywer R 18,00 per uur (reistyd) verdien. Lei nou af dat die totale koste, C, in rand, vir 'n tog van 2000 km gegee word deur:

$$
C(x) = \frac{256\ 000}{x} + 40x
$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}C(x) &= 4 \times 2000 \times \left(\frac{55}{2x} + \frac{x}{200}\right) + 18 \times \frac{2000}{x}\\ &= \frac{220\ 000}{x} + 40x + \frac{36\ 000}{x}\\ &= \frac{256\ 000}{x} + 40x\end{aligned}$$

20. Los die volgende kwadratiese vergelykings op deur fakortisering, kwadraatsvoltooiing óf die kwadratiese formule:

 - Probeer altyd om eers te faktoriseer, en gebruik die formule as die drieterm nie kan faktoriseer nie.
 - Los party van die vergelykings op deur vierkantsvoltooiing.

 a) $-4y^2 - 41y - 45 = 0$
 b) $16x^2 + 20x = 36$
 c) $42p^2 + 104p + 64 = 0$
 d) $21y + 3 = 54y^2$
 e) $36y^2 + 44y + 8 = 0$
 f) $12y^2 - 14 = 22y$
 g) $16y^2 + 0y - 81 = 0$
 h) $3y^2 + 10y - 48 = 0$
 i) $63 - 5y^2 = 26y$
 j) $2x^2 - 30 = 2$
 k) $2y^2 = 98$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}-4y^2 - 41y - 45 &= 0\\ 4y^2 + 41y + 45 &= 0\\ (4y+5)(y+9) &= 0\\ y &= -\frac{5}{4} \text{ of } y = -9\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}16x^2 + 20x - 36 &= 0\\ 4x^2 + 5x - 9 &= 0\\ (4x+9)(x-1) &= 0\\ x &= -\frac{9}{4} \text{ of } x = 1\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}42p^2 + 104p + 64 &= 0\\ 21p^2 + 52p + 32 &= 0\\ (7p+8)(3p+4) &= 0\\ p &= -\frac{8}{7} \text{ of } p = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}-54y^2 + 21y + 3 &= 0\\ 18y^2 - 7y - 1 &= 0\\ (9y+1)(2y-1) &= 0\\ y &= -\frac{1}{9} \text{ of } y = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}36y^2 + 44y + 8 &= 0\\ 9y^2 + 11y + 2 &= 0\\ (9y+2)(y+1) &= 0\\ y &= -\frac{2}{9} \text{ of } y = -1\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}12y^2 - 22y - 14 &= 0\\ 6y^2 - 11y - 7 &= 0\\ (3y-7)(2y+1) &= 0\\ y &= \frac{7}{3} \text{ of } y = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}16y^2 + 0y - 81 &= 0\\ (4y-9)(4y+9) &= 0\\ y &= \frac{9}{4} \text{ of } y = -\frac{9}{4}\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}3y^2 + 10y - 48 &= 0\\ (3y-8)(y+6) &= 0\\ y &= \frac{8}{3} \text{ of } y = -6\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}-5y^2 - 26y + 63 &= 0\\ 5y^2 + 26y - 63 &= 0\\ (5y-9)(y+7) &= 0\\ y &= \frac{9}{5} \text{ of } y = -7\end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned}2x^2 - 30 &= 2\\ 2x^2 - 32 &= 0\\ x^2 - 16 &= 0\\ (x-4)(x+4) &= 0\\ x &= \pm 4\end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned}2y^2 - 98 &= 0\\ y^2 - 49 &= 0\\ (y-7)(y+7) &= 0\\ y &= \pm 7\end{aligned}$$

21. Een wortel van die vergelyking $9y^2 + 32 = ky$ is 8. Bepaal die waarde van k en van die ander wortel.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 9(8)^2 - 8k + 32 &= 0 \\ 576 - 8k + 32 &= 0 \\ 8k &= 608 \\ k &= 76 \end{aligned}$$

Die wortels is:

$$\begin{aligned} 9y^2 - 76y + 32 &= 0 \\ (9y - 4)(y - 8) &= 0 \\ y &= \frac{4}{9} \text{ of } y = 8 \end{aligned}$$

22. a) Los op vir x in $x^2 - x = 6$.
    b) Hieruit, los op vir y in $(y^2 - y)^2 - (y^2 - y) - 6 = 0$.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ (x - 3)(x + 2) &= 0 \\ x &= 3 \text{ of } x = -2 \end{aligned}$$

b) Laat $x = y^2 - y$, en ons kry die vergelyking $x^2 - x = 6$:

$$\begin{aligned} y^2 - y &= 3 \\ y^2 - y - 3 &= 0 \\ y &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y^2 - y &= -2 \\ y^2 - y + 2 &= 0 \\ y &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \end{aligned}$$

$x = -2$ gee geen reële oplossing vir y.

23. Los op vir x: $x = \sqrt{8 - x} + 2$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt{8-x}+2 \\
x-2 &= \sqrt{8-x} \\
(x-2)^2 &= 8-x \\
x^2-4x+4 &= 8-x \\
x^2-3x-4 &= 8-x \\
(x-4)(x+1) &= 0 \\
x &= 4 \text{ of } x=-1
\end{aligned}
$$

24. a) Los op vir y in $-4y^2+8y-3=0$.
    b) Hieruit, los op vir p in $4(p-3)^2-8(p-3)+3=0$.

Oplossing:

a)

$$
\begin{aligned}
4y^2-8y+3 &= 0 \\
(2y-3)(2y-1) &= 0 \\
y &= \frac{3}{2} \text{ of } y=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b) Laat $y=p-3$, en ons kry die vergelyking $4y^2-8y-3=0$:

$$
\begin{aligned}
p-3 &= \frac{3}{2} \\
p &= \frac{3}{2}+3 \\
p &= \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p-3 &= \frac{1}{2} \\
p &= \frac{1}{2}+3 \\
p &= \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

25. Los op vir x: $2(x+3)^{\frac{1}{2}}=9$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
2(x+3)^{\frac{1}{2}} &= 9 \\
(x+3)^{\frac{1}{2}} &= \frac{9}{2} \\
(x+3) &= \frac{81}{4} \\
x &= \frac{81}{4}-3 \\
&= \frac{69}{4}
\end{aligned}
$$

26. a) Sonder om die vergelyking $x + \frac{1}{x} = 3$ op te los, bepaal die waarde van $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

b) Los nou $x + \frac{1}{x} = 3$ op en gebruik die resultaat om jou antwooord in die vraag hierbo te kontoleer.

Oplossing:

7

27. Los op vir y: $5(y-1)^2 - 5 = 19 - (y-1)^2$

Oplossing:

Laat $k = (y-1)^2$:

$$\begin{aligned} 5k - 5 &= 19 - k \\ 6k &= 24 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

Los op vir y:

$$\begin{aligned} (y-1)^2 &= 4 \\ y^2 - 2y + 2 &= 4 \\ y^2 - 2y - 2 &= 0 \\ y &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} \end{aligned}$$

28. Los op vir t: $2t(t - \frac{3}{2}) = \frac{3}{2t^2 - 3t} + 2$

Oplossing:

$t = \frac{1}{2}, t = 1$ of $t = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$

HOOFSTUK 3

Getalpatrone

3 Getalpatrone

- Bespreek terminologie.
- Beklemtoon die verband tussen lineêre funksies (algemene term) en lineêre rye.
- Moenie die formule vir rekenkundige reekse gebruik nie.
- Beklemtoon die verband tussen kwadratiese furnksies (algemene term) en kwadratiese rye.
- Sleutelaktiwiteit in die wiskundige beskrywing van 'n patroon: vind die verwantskap tussen die nommer van die term en die waarde van die term.

3.1 Hersiening

Oefening 3 – 1: Lineêre rye

1. Skryf die volgende drie terme neer in die ry: $45; 29; 13; -3; \ldots$

   Oplossing:

   $-19; -35; -51$

2. Die algemene term word gegee deur die ry hieronder. Bereken die ontbrekende terme.

   a) $-4; -9; -14; \ldots; -24$
   $T_n = 1 - 5n$

   b) $6; \ldots; 24; \ldots; 42$
   $T_n = 9n - 3$

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned} T_4 &= 1 - 5(4) \\ &= 1 - 20 \\ &= -19 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} T_2 &= 9(2) - 3 \\ &= 18 - 3 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_4 &= 9(4) - 3 \\ &= 36 - 3 \\ &= 33 \end{aligned}$$

3. Vind die algemene term vir die volgende rye en vind dan T_{10}, T_{15} en T_{30}:

   a) $13; 16; 19; 22; \ldots$
   b) $18; 24; 30; 36; \ldots$
   c) $-10; -15; -20; -25; \ldots$

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 16 - 13 \\ &= 3 \\ \therefore T_n &= 10 + 3n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= 10 + 3n \\ \therefore T_{10} &= 10 + 3(10) \\ &= 40 \\ \therefore T_{15} &= 10 + 3(15) \\ &= 55 \\ \therefore T_{30} &= 10 + 3(30) \\ &= 100 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 24 - 18 \\ &= 6 \\ \therefore T_n &= 12 + 6n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= 12 + 6n \\ \therefore T_{10} &= 12 + 6(10) \\ &= 72 \\ \therefore T_{15} &= 12 + 6(15) \\ &= 102 \\ \therefore T_{30} &= 12 + 6(30) \\ &= 192 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= -15 - (-10) \\ &= -5 \\ \therefore T_n &= -5 - 5n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= -5 - 5n \\ \therefore T_{10} &= -5 - 5(10) \\ &= -55 \\ \therefore T_{15} &= -5 - 5(15) \\ &= -80 \\ \therefore T_{30} &= -5 - 5(30) \\ &= -155 \end{aligned}$$

4. Die sitplekke in 'n klaskamer is gerangskik sodat die eerste ry 20 lessenaars het, die tweede ry 22 lessenaars, die derde ry 24 lessenaars, ensovoorts. Bereken hoeveel lessenaars in die ninth ry is.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} d &= T_2 - T_1 \\ &= 22 - 20 \\ &= 2 \\ \therefore T_n &= 18 + 2n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_n &= 18 + 2n \\ \therefore T_9 &= 18 + 2(9) \\ &= 18 + 18 \\ &= 36 \end{aligned}$$

5. a) Voltooi die volgende:

$$\begin{aligned} 13 + 31 &= \ldots \\ 24 + 42 &= \ldots \\ 38 + 83 &= \ldots \end{aligned}$$

   b) Kyk na die getalle aan die linkerkant: wat let jy op van die ene-syfer en die tiene-syfer?

   c) Ondersoek die patroon deur van ander voorbeelde van 2-syfer getalle gebruik te maak.

   d) Formuleer 'n vermoede van die patroon wat jy gesien het.

   e) Bewys die vermoede.

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned} 13 + 31 &= 44 \\ 24 + 42 &= 66 \\ 38 + 83 &= 121 \end{aligned}$$

   b) Die ene-syfer en die tiene-syfer het posisies geruil.

   c)

$$\begin{aligned} 45 + 54 &= 99 \\ 71 + 17 &= 88 \end{aligned}$$

   d) Die som van die twee getalle sal altyd 11 keer die som van die twee syfers wees.

e) Laat die eerste nommer $a + 10b$ wees en laat die tweede nommer $b + 10a$ wees:

$$\begin{aligned}
\text{Nommer } 1 : &= a + 10b \\
\text{Nommer } 2 : &= b + 10a \\
\text{Nommer } 1 + 2 : &= a + b + 10a + 10b \\
&= 11a + 11b \\
&= 11(a + b)
\end{aligned}$$

3.2 Kwadratiese rye

Oefening 3 – 2: Kwadratiese rye

1. Bepaal die tweede verskil tussen die terme van die volgende rye:

a) $5; 20; 45; 80; \ldots$

b) $6; 11; 18; 27; \ldots$

c) $1; 4; 9; 16; \ldots$

d) $3; 0; -5; -12; \ldots$

e) $1; 3; 7; 13; \ldots$

f) $0; -6; -16; -30; \ldots$

g) $-1; 2; 9; 20; \ldots$

h) $1; -3; -9; -17; \ldots$

i) $3a+1; 12a+1; 27a+1; 48a+1 \ldots$

j) $2; 10; 24; 44; \ldots$

k) $t - 2; 4t - 1; 9t; 16t + 1; \ldots$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\text{Eerste verskil: } &= 15; 25; 35 \\
\text{Tweede verskil: } &= 10
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{Eerste verskille: } &= 5; 7; 9 \\
\text{Tweede verskil: } &= 2
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\text{Eerste verskille: } &= 3; 5; 7 \\
\text{Tweede verskil: } &= 2
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\text{Eerste verskille: } &= -3; -5; -7 \\
\text{Tweede verskil: } &= -2
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\text{Eerste verskille: } &= 2; 4; 6 \\
\text{Tweede verskil: } &= 2
\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= -6; -10; -14 \\ \text{Tweede verskil: } &= -4 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 3; 7; 11 \\ \text{Tweede verskil: } &= 4 \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= -4; -6; -8 \\ \text{Tweede verskil: } &= -2 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 9a; 15a; 21a \\ \text{Tweede verskil: } &= 6a \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 8; 14; 20 \\ \text{Tweede verskil: } &= 6 \end{aligned}$$

k)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 3t + 1; 5t + 1; 7t + 1 \\ \text{Tweede verskil: } &= 2t \end{aligned}$$

2. Voltooi die ry deur die ontbrekende term in te vul

a) $11; 21; 35; \ldots; 75$

b) $20; \ldots; 42; 56; 72$

c) $\ldots; 37; 65; 101$

d) $3; \ldots; -13; -27; -45$

e) $24; 35; 48; \ldots; 80$

f) $\ldots; 11; 26; 47$

Oplossing:

a)

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$
T_n	11		21		35		**53**
1ste verskil		10		14		18	
2de verskil			4		4		

b)

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$
T_n	20		**30**		42		56
1ste verskil		10		12		14	
2de verskil			2		2		

c)

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$
T_n	**17**		37		65		101
1ste verskil		20		28		36	
2de verskil			8		8		

d)

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$
T_n	3		**-3**		-13		-27
1ste verskil		-6		-10		-14	
2de verskil			-4		-4		

e)

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$
T_n	24		35		48		**63**
1ste verskil		11		13		15	
2de verskil			2		2		

f)

	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$
T_n	**2**		11		26		47
1ste verskil		9		15		21	
2de verskil			6		6		

3. Gebruik die algemene term om die eerste vier opeenvolgende terme in die ry te bereken:

   a) $T_n = n^2 + 3n - 1$
   b) $T_n = -n^2 - 5$
   c) $T_n = 3n^2 - 2n$
   d) $T_n = -2n^2 + n + 1$

   Oplossing:

   a) $3; 9; 17; 27$
   b) $-6; -9; -14; -21$
   c) $1; 8; 21; 40$
   d) $0; -5; -14; -27$

Oefening 3 – 3: Kwadratiese rye

1. Bereken die gemeenskaplike tweede verskil vir elk van die volgende kwadratiese

rye:

a) $3;\ 6;\ 10;\ 15;\ 21;\ \ldots$

b) $4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ \ldots$

c) $7;\ 17;\ 31;\ 49;\ 71;\ \ldots$

d) $2;\ 10;\ 26;\ 50;\ 82;\ \ldots$

e) $31;\ 30;\ 27;\ 22;\ 15;\ \ldots$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 3; 4; 5; 6\\ \text{Tweede verskil: } &= 1\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 5; 7; 9; 11\\ \text{Tweede verskil: } &= 2\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 10; 14; 18; 22\\ \text{Tweede verskil: } &= 4\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 8; 16; 24; 32\\ \text{Tweede verskil: } &= 8\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= -1; -3; -5; -7\\ \text{Tweede verskil: } &= -2\end{aligned}$$

2. Bepaal die eerste vyf terme van die kwadratiese ry wat deur die volgende formule voorgestel word: $T_n = 5n^2 + 3n + 4$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}T_n &= 5n^2 + 3n + 4\\ T_1 &= 5(1)^2 + 3(1) + 4\\ &= 12\\ T_2 &= 5(2)^2 + 3(2) + 4\\ &= 30\\ T_3 &= 5(3)^2 + 3(3) + 4\\ &= 58\\ T_4 &= 5(4)^2 + 3(4) + 4\\ &= 96\\ T_5 &= 5(5)^2 + 3(5) + 4\\ &= 144\end{aligned}$$

$12; 30; 58; 96; 144$

3. Gegee dat $T_n = 4n^2 + 5n + 10$, bepaal T_9.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 4n^2 + 5n + 10 \\
T_9 &= 4(9)^2 + 5(9) + 10 \\
&= 379
\end{aligned}
$$

4. Gegee $T_n = 2n^2$, vir watter waarde van n is $T_n = 32$?

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
T_n &= 2n^2 \\
32 &= 2n^2 \\
16 &= n^2 \\
4 &= n
\end{aligned}
$$

5. a) Skryf die volgende twee terme van die kwadratiese ry neer: $16; 27; 42; 61; \ldots$

   b) Bepaal die algemene formule vir die kwadratiese ry hierbo.

Oplossing:

a)

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & n=1 & & n=2 & & n=3 & & n=4 \\
T_n & 16 & & 27 & & 42 & & 61 \\
1^{\text{ste}} \text{ verskil} & & 11 & & 15 & & 19 & \\
2^{\text{de}} \text{ verskil} & & & 4 & & 4 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Tweede verskil: } &= 4 \\
\text{Eerste verskille: } &= 11; 15; 19; 23; 27 \\
\therefore T_5 &= 61 + 23 \\
&= 84 \\
\therefore T_6 &= 84 + 27 \\
&= 111
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
T_n &= an^2 + bn + c \\
T_1 &= a + b + c \\
T_2 &= 4n^2 + 2n + c \\
T_3 &= 9n^2 + 3n + c
\end{aligned}
$$

$$\therefore a + b + c = 16$$
$$\therefore c = 16 - a - b$$
$$4a + 2b + c = 27$$
$$4a + 2b + (16 - a - b) = 27$$
$$3a + b = 11$$
$$\text{En } 9a + 3b + c = 42$$
$$\therefore 9a + 3b + (16 - a - b) = 42$$
$$8a + 2b = 26$$
$$4a + b = 13$$
$$\therefore b = 13 - 4a$$

$$\therefore 3a + b = 11$$
$$3a + (13 - 4a) = 11$$
$$-a = -2$$
$$\therefore a = 2$$
$$b = 13 - 4(2)$$
$$\therefore b = 5$$
$$\text{En } c = 16 - a - b$$
$$\therefore c = 16 - 2 - 5$$
$$= 9$$
$$\therefore T_n = 2n^2 + 5n + 9$$

3.3 Opsomming

Oefening 3 – 4: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Bepaal die eerste vyf terme van die kwadratiese ry wat voorgestel word deur: $T_n = n^2 + 2n + 1$

   Oplossing:

   $-4; 9; 16; 25; 36$

2. Bepaal watter van die volgende rye is:

   - 'n lineêre ry,
   - 'n kwadratiese ry,
   - nie een van die twee nie.

a) $6; 9; 14; 21; 30; \ldots$
b) $1; 7; 17; 31; 49; \ldots$
c) $8; 17; 32; 53; 80; \ldots$
d) $9; 26; 51; 84; 125; \ldots$
e) $2; 20; 50; 92; 146; \ldots$
f) $5; 19; 41; 71; 109; \ldots$
g) $2; 6; 10; 14; 18; \ldots$
h) $3; 9; 15; 21; 27; \ldots$
i) $1; 2{,}5; 5; 8{,}5; 13; \ldots$
j) $10; 24; 44; 70; 102; \ldots$
k) $2\frac{1}{2}; 6; 10\frac{1}{2}; 16; 22\frac{1}{2}; \ldots$
l) $3p^2; 6p^2; 9p^2; 12p^2; 15p^2; \ldots$
m) $2k; 8k; 18k; 32k; 50k; \ldots$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 3; 5; 7; 9; \\ \text{Tweede verskil: } &= 2\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

b)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 6; 10; 14; 18 \\ \text{Tweede verskil: } &= 4\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

c)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 9; 15; 21; 27 \\ \text{Tweede verskil: } &= 6\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

d)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 17; 25; 33; 41 \\ \text{Tweede verskil: } &= 8\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

e)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 18; 30; 42; 54 \\ \text{Tweede verskil: } &= 12\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

f)

$$\begin{aligned}\text{Eerste verskille: } &= 14; 22; 30; 38 \\ \text{Tweede verskil: } &= 8\end{aligned}$$

Kwadratiese ry

g)

$$\text{Eerste verskil: } = 4$$

Lineêre ry

h)

$$\text{Eerste verskil: } = 6$$

Lineêre ry

i)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 1{,}5;\ 2{,}5;\ 3{,}5;\ 4{,}5 \\ \text{Tweede verskil: } &= 1 \end{aligned}$$

Kwadratiese ry

j)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 14; 20; 26; 32 \\ \text{Tweede verskil: } &= 16 \end{aligned}$$

Kwadratiese ry

k)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 3{,}5;\ 4{,}5;\ 5{,}5;\ 6{,}5 \\ \text{Tweede verskil: } &= 1 \end{aligned}$$

Kwadratiese ry

l)

$$\text{Eerste verskille: } = 3p^2$$

Lineêre ry

m)

$$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 6k; 10k; 14k; 18k \\ \text{Tweede verskil: } &= 4k \end{aligned}$$

Kwadratiese ry

3. Gegee die patroon: $16; x; 46; \ldots$, bepaal die waarde van x indien die patroon lineêr is.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} x - 16 &= 46 - x \\ 2x &= 62 \\ \therefore x &= 31 \end{aligned}$$

4. Gegee: $T_n = 2n^2$, vir watter waarde van n is $T_n = 242$?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 2n^2 &= 242 \\ n^2 &= 121 \\ \therefore n &= 11 \end{aligned}$$

5. Gegee: $T_n = 3n^2$, bepaal T_{11}.

Oplossing:

$$\begin{aligned} T_n &= 3n^2 \\ \therefore T_1 1 &= 3(11)^2 \\ &= 363 \end{aligned}$$

6. Gegee: $T_n = n^2 + 4$, vir watter waarde van n is $T_n = 85$?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} n^2 + 4 &= 85 \\ n^2 &= 81 \\ \therefore n &= 9 \end{aligned}$$

7. Gegee: $T_n = 4n^2 + 3n - 1$, bepaal T_5.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} T_n &= 4n^2 + 3n - 1 \\ \therefore T_5 &= 4(5)^2 + 3(5) - 1 \\ &= 100 + 15 - 1 \\ &= 114 \end{aligned}$$

8. Gegee: $T_n = \frac{3}{2}n^2$, vir watter waarde van n is $T_n = 96$?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}n^2 &= 96 \\ n^2 &= 96 \times \frac{2}{3} \\ &= 64 \\ \therefore n &= 8 \end{aligned}$$

9. Vir elk van die volgende patrone, bepaal:

   - die volgende term in die patroon,
   - die algemene term,
   - die tenth term die patroon.

   a) $3; 7; 11; 15; \ldots$
   b) $17; 12; 7; 2; \ldots$
   c) $\frac{1}{2}; 1; 1\frac{1}{2}; 2; \ldots$
   d) $a; a+b; a+2b; a+3b; \ldots$
   e) $1; -1; -3; -5; \ldots$

   Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
d &= 7 - 3 \\
&= 4 \\
T_5 &= 15 + 4 \\
&= 19 \\
T_n &= 4n - 1 \\
T_{10} &= 4(10) - 1 \\
&= 39
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
d &= 12 - 17 \\
&= -5 \\
T_5 &= 2 - 5 \\
&= -3 \\
T_n &= 22 - 5n \\
T_{10} &= 22 - 5(10) \\
&= -28
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
d &= 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \\
T_5 &= 2 + \frac{1}{2} \\
&= 2\frac{1}{2} \\
T_n &= \frac{1}{2}n \\
T_{10} &= \frac{1}{2}(10) \\
&= 5
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
d &= a + b - a \\
&= b \\
T_5 &= a + 3b + b \\
&= a + 4b \\
T_n &= a - b + bn \\
T_{10} &= a - b + b(10) \\
&= a + 9b
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
d &= -1 - 1 \\
&= -2 \\
T_5 &= -5 - 2 \\
&= -7 \\
T_n &= 3 - 2n \\
T_{10} &= 3 - 2(10) \\
&= -17
\end{aligned}$$

10. Vir elk van die volgende rye, bepaal die vergelyking van die algemene term en gebruik dan die vergelyking om T_{100} te bepaal.

    a) $4; 7; 12; 19; 28; \ldots$
    b) $2; 8; 14; 20; 26; \ldots$
    c) $7; 13; 23; 37; 55; \ldots$
    d) $5; 14; 29; 50; 77; \ldots$

    Oplossing:

    a)

	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$
T_n	4		7		12		19
1ste verskil		3		5		7	
2de verskil			2		2		

$$\begin{aligned}
T_n &= an^2 + bn + c \\
\text{Tweede verskil: } 2a &= 2 \\
\therefore a &= 1 \\
3a + b &= 3 \\
b &= 3 - 3(1) \\
\therefore b &= 0 \\
a + b + c &= 4 \\
\therefore c &= 4 - a - b \\
&= 4 - 1 \\
\therefore c &= 3 \\
\therefore T_n = n^2 + 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_n &= n^2 + 3 \\
\therefore T_{100} &= (10)^2 + 3 \\
&= 10\ 003
\end{aligned}$$

    b)

$$\begin{aligned}
d &= 8 - 2 \\
&= 6 \\
\therefore T_n &= 6n - 4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_n &= 6n - 4 \\
\therefore T_{100} &= 6(100) - 4 \\
&= 596
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & n=1 & & n=2 & & n=3 & & n=4 \\
T_n & 7 & & 13 & & 23 & & 37 \\
1^{\text{ste}} \text{ verskil} & & 6 & & 10 & & 14 & \\
2^{\text{de}} \text{ verskil} & & & 4 & & 4 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
T_n &= an^2 + bn + c \\
\text{Tweede verskil: } 2a &= 4 \\
\therefore a &= 2 \\
3a + b &= 6 \\
b &= 6 - 3(2) \\
\therefore b &= 0 \\
a + b + c &= 7 \\
\therefore c &= 7 - a - b \\
&= 7 - 2 \\
\therefore c &= 5 \\
\therefore T_n &= 2n^2 + 5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_n &= 2n^2 + 5 \\
\therefore T_{100} &= 2(10)^2 + 5 \\
&= 20\ 005
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & n=1 & & n=2 & & n=3 & & n=4 \\
T_n & 5 & & 14 & & 29 & & 50 \\
1^{\text{ste}} \text{ verskil} & & 9 & & 15 & & 21 & \\
2^{\text{de}} \text{ verskil} & & & 6 & & 6 & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
T_n &= an^2 + bn + c \\
\text{Tweede verskil: } 2a &= 6 \\
\therefore a &= 3 \\
3a + b &= 9 \\
b &= 9 - 3(3) \\
\therefore b &= 0 \\
a + b + c &= 5 \\
\therefore c &= 5 - a - b \\
&= 5 - 3 \\
\therefore c &= 2 \\
\therefore T_n &= 3n^2 + 2
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} T_n &= 3n^2 + 2 \\ \therefore T_{100} &= 3(10)^2 + 2 \\ &= 30\ 002 \end{aligned}$$

11. Gegee: $T_n = 3n - 1$

    a) Skryf die eerste vyf terme van die ry neer.

    b) Wat kom jy agter oor die verskil tussen enige twee opeenvolgende terme?

    c) Sal dit altyd die geval wees vir 'n lineêre ry?

    Oplossing:

    a) $2; 5; 8; 11; 14$

    b) Konstante verskil, $d = 3$

    c) Ja

12. Gegee die volgende ry: $-15; -11; -7; \ldots; 173$

    a) Bepaal die vergelyking vir die algemene term.

    b) Bereken hoeveel terme daar in die ry is.

    Oplossing:

    a)

    $$\begin{aligned} d &= -11 - (-15) \\ &= 4 \\ T_n &= 4n - 19 \end{aligned}$$

    b)

    $$\begin{aligned} T_n &= 4n - 19 \\ 173 &= 4n - 19 \\ 192 &= 4n \\ \therefore 48 &= n \end{aligned}$$

13. Gegee $3; 7; 13; 21; 31; \ldots$

    a) Thabang bepaal dat die algemene term $T_n = 4n - 1$ is. Is hy reg? Verduidelik.

    b) Cristina bepaal dat die algemene term $T_n = n^2 + n + 1$ is. Is sy reg? Verduidelik.

    Oplossing:

    a)

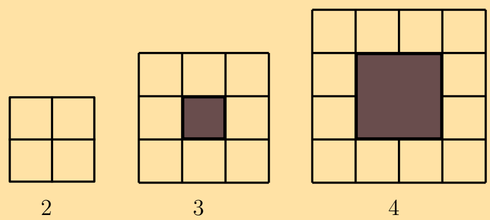
    $$\begin{aligned} \text{Eerste verskille: } &= 4; 6; 8; 10 \\ \text{Tweede verskil: } &= 2 \end{aligned}$$

    Thabang se algemene term $T_n = 4n - 1$ beskryf 'n lineêre ry en hierdie is 'n kwadratiese ry.

b)

$$\begin{aligned} T_n &= an^2 + bn + c \\ \text{Tweede verskil: } 2a &= 2 \\ \therefore a &= 1 \\ 3a + b &= 4 \\ b &= 4 - 3(1) \\ \therefore b &= 1 \\ a + b + c &= 3 \\ \therefore c &= 3 - a - b \\ &= 3 - 1 - 1 \\ \therefore c &= 1 \\ \therefore T_n &= n^2 + n + 1 \end{aligned}$$

14. Gegee die volgende patroon van blokke:



a) Teken patroon 5.

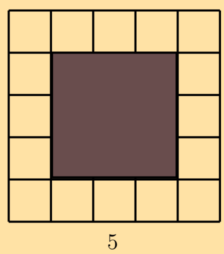
b) Voltooi onderstaande tabel:

patroonnommer (n)	2	3	4	5	10	250	n
aantal wit blokke (w)	4	8					

c) Is hierdie 'n lineêre of kwadratiese ry?

Oplossing:

a)

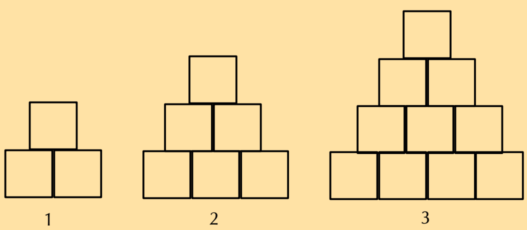


b)

patroonnommer (n)	2	3	4	5	10	250	n
aantal wit blokke (w)	4	8	12	16	36	996	$4n - 4$

c) Lineêr

15. Kubusse van 1 cm^3 word op mekaar gestapel om 'n toring te vorm:



a) Voltooi die tabel vir die toring se hoogte:

toringnommer (n)	1	2	3	4	10	n
hoogte van die toring (h)	2					

b) Watter tipe ry is dit?

c) Beskou nou die aantal kubusse in elke toring en voltooi dan die onderstaande tabel:

toringnommer (n)	1	2	3	4
aantal kubusse (c)	3			

d) Watter tipe ry is dit?

e) Bepaal die algemene term vir hierdie ry.

f) Hoeveel kubusse word benodig vir toring nommer 21?

g) Hoe hoog sal 'n toring met 496 kubusse wees?

Oplossing:

a)

toringnommer (n)	1	2	3	4	10	n
hoogte van die toring (h)	2	3	4	5	11	$n+1$

b) Lineêr

c)

toringnommer (n)	1	2	3	4
aantal kubusse (c)	3	6	10	15

d) Kwadraties

e)

$$\begin{aligned} T_n &= an^2 + bn + c \\ \text{Tweede verskil: } 2a &= 1 \\ \therefore a &= \frac{1}{2} \\ 3a + b &= 3 \\ b &= 3 - 3(\frac{1}{2}) \\ \therefore b &= \frac{3}{2} \\ a + b + c &= 3 \\ \therefore c &= 3 - a - b \\ &= 3 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\ \therefore c &= 1 \\ \therefore T_n &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \\ \therefore T_{21} &= \frac{1}{2}(21)^2 + \frac{3}{2}(21) + 1 \\ &= \frac{441}{2} + \frac{63}{2} + \frac{2}{2} \\ &= 253 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \\
496 &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \\
0 &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 495 \\
&= n^2 + 3n - 990 \\
&= (n-30)(n+33) \\
\therefore n &= 30 \text{ of } n = -33 \\
\therefore n &= 30 \\
\text{En } h &= n + 1 \\
&= 30 + 1 \\
&= 31 \text{ cm}
\end{aligned}$$

16. 'n Kwadratiese ry het 'n tweede term van 1, 'n derde term van -6 en 'n vierde term van -14.

a) Bepaal die tweede verskil vir hierdie ry.

b) Bepaal nou die eerste term van die patroon.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
T_3 - T_2 &= -6 - (1) \\
&= -7 \\
T_4 - T_3 &= -14 - (-6) \\
&= -8 \\
\therefore \text{Tweede verskil} &= -1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1 + 6 \\
&= 7
\end{aligned}$$

17. Daar is 15 skole wat kompeteer in die O16 dogtershokkiekampioenskap en elke span moet twee wedstryde speel: een tuiswedstryd en een wegwedstryd.

a) Gebruik die gegewe inligting om die tabel te voltooi:

aantal skole	aantal wedstryde
1	0
2	
3	
4	
5	

b) Bereken die tweede verskil.

c) Bepaal die algemene term vir die ry.

d) Hoeveel wedstryde sal gespeel word indien daar 15 skole in die kampioenskap speel?

e) Indien 600 wedstryde gespeel moet word, hoeveel skole kompeteer in die kampioenskap?

Oplossing:

a)

aantal skole	aantal wedstryde
1	0
2	2
3	6
4	12
5	20

b)

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= 2 - 0 \\ &= 2 \\ T_3 - T_2 &= 6 - 2 \\ &= 4 \\ T_4 - T_3 &= 12 - 6 \\ &= 6 \\ T_5 - T_4 &= 20 - 12 \\ &= 8 \\ \therefore \text{Tweede verskil} &= 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} T_n &= an^2 + bn + c \\ \text{Tweede verskil: } 2a &= 2 \\ \therefore a &= 1 \\ 3a + b &= 2 \\ b &= 2 - 3(1) \\ \therefore b &= -1 \\ a + b + c &= 0 \\ \therefore c &= -a - b \\ &= -1 - (-1) \\ \therefore c &= 0 \\ \therefore T_n &= n^2 - n \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} T_n &= n^2 - n \\ T_{15} &= (15)^2 - 15 \\ &= 225 - 15 \\ &= 210 \end{aligned}$$

e)

$$
\begin{aligned}
T_n &= n^2 - n \\
600 &= n^2 - n \\
0 &= n^2 - n - 600 \\
&= (n-25)(n+24) \\
\therefore n = 25 &\text{ of } n = -24 \\
\therefore n &= 25
\end{aligned}
$$

18. Die eerste term van 'n kwadratiese ry is 4, die derde term is 34 en die gemeenskaplike tweede verskil is 10. Bepaal die eerste ses terme in die ry.

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{Laat } T_2 &= x \\
\therefore T_2 - T_1 &= x - 4 \\
\text{En } T_3 - T_2 &= 34 - x \\
\text{Tweede verskil } &= (T_3 - T_2) - (T_2 - T_1) \\
&= (34 - x) - (x - 4) \\
\therefore 10 &= 38 - 2x \\
2x &= 28 \\
\therefore x &= 14
\end{aligned}
$$

$4; 14; 34; 64; 104; 154$

19. Uitdaging:

Gegewe dat die algemene term vir 'n kwadratiese ry $T_n = an^2 + bn + c$ is, laat d die eerste verskil en D die gemeenskaplike tweede verskil wees.

a) Wys dat $a = \frac{D}{2}$.

b) Wys dat $b = d - \frac{3}{2}D$.

c) Wys dat $c = T_1 - d + D$.

d) Gevolglik, wys dat $T_n = \frac{D}{2}n^2 + \left(d - \frac{3}{2}D\right)n + (T_1 - d + D)$.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
T_n &= an^2 + bn + c \\
T_1 &= a(1)^2 + b(1) + c \\
&= a + b + c \\
T_2 &= a(2)^2 + b(2) + c \\
&= 4a + 2b + c \\
T_3 &= a(3)^2 + b(3) + c \\
&= 9a + 6b + c \\
\text{Eerste verskil } d &= T_2 - T_1 \\
\therefore d &= (4a + 2b + c) - (a + b + c) \\
&= 3a + b \\
\therefore b &= d - 3a \\
\text{Tweede verskil } D &= (T_3 - T_2) - (T_2 - T_1) \\
\therefore D &= (5a + b) - (3a + b) \\
&= 2a \\
\therefore a &= \frac{D}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
a &= \frac{D}{2} \\
b &= d - 3a \\
\therefore b &= d - 3\left(\frac{D}{2}\right) \\
&= d - \frac{3}{2}D
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
T_1 &= a + b + c \\
\therefore c &= T_1 - a - b \\
&= T_1 - \left(\frac{D}{2}\right) - \left(d - \frac{3}{2}D\right) \\
&= T_1 - \frac{D}{2} - d + \frac{3}{2}D \\
&= T_1 - d + D
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
T_n &= an^2 + bn + c \\
\therefore T_n &= \frac{D}{2}n^2 + \left(d - \frac{3}{2}D\right)n + (T_1 - d + D)
\end{aligned}$$

HOOFSTUK 4

Analitiese meetkunde

- Integreer kennis van Euklidiese Meetkunde met Analitiese Meetkunde.
- Beklemtoon die waarde en belangrikheid daarvan om sketse te maak.
- Beklemtoon die belangrikheid daarvan om die koördinate vir die afstandsformule en vir gradiënt konsekwent (in ooreenstemmende volgorde) te skryf.
- Bespreek en verduidelik:
  - dat ewewydige lyne gelyke gradiënte en gelyke inklinasiehoeke het.
  - dat die produk van die gradiënte van loodregte lyne gelyk is aan -1.
  - dat die gradiënt van 'n horisontale lyn gelyk is aan zero.
  - dat die gradiënt van 'n vertikale lyn ongedefinieërd is.
- Hersien die eienskappe van die verskillende vierhoeke aangesien hierdie kennis benodig word in baie van die oefeninge.
- Verduidelik dat die inklinasiehoek nooit groter as $180°$ is nie.

4.1 Hersiening

Oefening 4 – 1: Hersiening

1. Bepaal die lengte van die lynsegment tussen die volgende punte:

   a) $P(-3;5)$ en $Q(-1;-5)$

   b) $R(0{,}75;3)$ en $S(0{,}75;-4)$

   c) $T(2x;y-2)$ en $U(3x+1;y-2)$

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\
&= \sqrt{(-1+3)^2+(-5-5)^2} \\
&= \sqrt{(2)^2+(-10)^2} \\
&= \sqrt{4+100} \\
&= \sqrt{104} \\
&= 2\sqrt{26} \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
RS &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(0{,}75 - 0{,}75)^2 + (-4 - 3)^2} \\
&= \sqrt{(0)^2 + (-7)^2} \\
&= \sqrt{49} \\
&= 7 \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
TU &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(3x + 1 - 2x)^2 + (y - 2 - y + 2)^2} \\
&= \sqrt{(x + 1)^2 + (0)^2} \\
&= \sqrt{(x + 1)^2} \\
&= x + 1 \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

2. Gegewe $Q(4;1), T(p;3)$ en lengte $QT = \sqrt{8}$ eenhede, bepaal die waarde van p.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
QT &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
\sqrt{8} &= \sqrt{(p - 4)^2 + (3 - 1)^2} \\
\left(\sqrt{8}\right)^2 &= (p - 4)^2 + (2)^2 \\
8 &= p^2 - 8p + 16 + 4 \\
0 &= p^2 - 8p + 16 + 4 - 8 \\
&= p^2 - 8p + 12 \\
&= (p - 6)(p - 2) \\
\therefore p &= 6 \text{ of } p = 2
\end{aligned}$$

3. Bepaal die gradiënt van die lyn AB as:

a) $A(-5;3)$ en $B(-7;4)$

b) $A(3;-2)$ en $B(1;-8)$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{4 - 3}{-7 + 5} \\
&= \frac{1}{-2} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-8+2}{1-3} \\ &= \frac{-6}{-2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

4. Bewys dat die lyn PQ, met $P(0;3)$ en $Q(5;5)$, parallel is aan die lyn $5y+5 = 2x$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 5y + 5 &= 2x \\ 5y &= 2x - 5 \\ y &= \frac{2}{5}x - 1 \\ \therefore m &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5-3}{5-0} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

5. Gegewe die punte $A(-1;-1)$, $B(2;5)$, $C(-1;-\frac{5}{2})$ en $D(x;-4)$ en $AB \perp CD$, bepaal die waarde van x.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{5+1}{2+1} \\
&= \frac{6}{3} \\
&= 2 \\
m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-4+\frac{5}{2}}{x+1} \\
&= \frac{-\frac{3}{2}}{x+1} \\
&= -\frac{3}{2(x+1)} \\
\text{en as } AB &\perp CD \\
\text{dan } m_{AB} \times m_{CD} &= -1 \\
-\frac{3}{2(x+1)} \times 2 &= -1 \\
\frac{3}{x+1} &= 1 \\
3 &= x+1 \\
\therefore x &= 2
\end{aligned}$$

6. Bereken die koördinate van die middelpunt $P(x;y)$ van die lynsegment tussen die punte:

   a) $M(3;5)$ en $N(-1;-1)$
   b) $A(-3;-4)$ en $B(2;3)$

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{3-1}{2}; \frac{5-1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{2}; \frac{4}{2}\right) \\
&= (1;2)
\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-3+2}{2}; \frac{-4+3}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-1}{2}; \frac{-1}{2}\right)
\end{aligned}$$

7. Die lyn wat $A(-2;4)$ en $B(x;y)$ verbind, het die middelpunt $C(1;3)$. Bepaal die waardes van x en y.

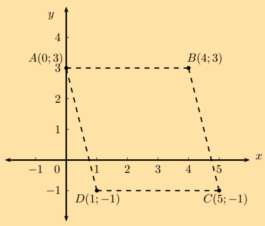
Oplossing:

$$\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)\\
C(1;3) &= \left(\frac{-2+x}{2};\frac{4+y}{2}\right)\\
\therefore 1 &= \frac{-2+x}{2}\\
2 &= -2+x\\
\therefore 4 &= x\\
\text{en } 3 &= \frac{4+y}{2}\\
6 &= 4+y\\
\therefore 2 &= y
\end{aligned}$$

8. Gegewe die vierhoek $ABCD$ met hoekpunte $A(0;3)$, $B(4;3)$, $C(5;-1)$ en $D(1;-1)$.

   a) Bepaal die vergelyking van lyn AD en van lyn BC.
   b) Toon aan dat $AD \parallel BC$.
   c) Bereken die lengtes van AD en BC.
   d) Bepaal die vergelyking van die diagonaal BD.
   e) Watter soort vierhoek is $ABCD$?

Oplossing:

a) 

$$\begin{aligned}
m_{AD} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
&= \frac{-1-3}{1-0}\\
&= \frac{-4}{1}\\
&= -4\\
y &= mx+c\\
y &= -4x+c\\
\text{Substitueer } (0;3) \quad 3 &= -4(0)+c\\
\therefore c &= 3\\
y &= -4x+3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1-3}{5-4} \\ &= \frac{-4}{1} \\ &= -4 \\ y &= mx + c \\ y &= -4x + c \\ \text{Substitueer } (4;3) \quad 3 &= -4(4) + c \\ \therefore c &= 19 \\ y &= -4x + 19 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} m_{AD} &= -4 \\ m_{BC} &= -4 \\ \therefore m_{AD} &= m_{BC} \\ \therefore AD &\parallel BC \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1-0)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{1 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{17} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(5-4)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{1 + (-4)^2} \\ &= \sqrt{17} \text{ eenhede} \end{aligned}$$

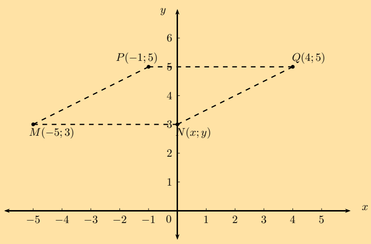
d)

$$
\begin{aligned}
m_{BD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-1-3}{1-4} \\
&= \frac{-4}{-3} \\
&= \frac{4}{3} \\
y &= mx + c \\
y &= \frac{4}{3}x + c \\
\text{Substitueer } (4;3) \quad 3 &= \frac{4}{3}(4) + c \\
&= 3 - \frac{16}{3} \\
\therefore c &= -\frac{7}{3} \\
y &= \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}
\end{aligned}
$$

e) Parallelogram (teenoorstaande sye gelyk en ewewydig)

9. $MPQN$ is 'n parallelogram met punte $M(-5;3)$, $P(-1;5)$ en $Q(4;5)$. Teken 'n skets en bepaal die koördinate van $N(x;y)$.

Oplossing:



$MPQN$ is 'n parallelogram, dus $PQ = MN$ en $PQ \parallel MN$:

$$
\begin{aligned}
m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{5-5}{4+1} \\
&= 0 \\
\therefore m_{MN} &= 0 \\
\therefore y &= 3 \\
PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(4+1)^2 + (5-5)^2} \\
&= \sqrt{(5)^2} \\
&= 5 \\
\text{Dus } x &= -5 + 5 \\
\therefore x &= 0 \\
\therefore N(x;y) &= (0;3)
\end{aligned}
$$

10. $PQRS$ is 'n vierhoek met punte $P(-3;1)$, $Q(1;3)$, $R(6;1)$ en $S(2;-1)$ in die Cartesiese vlak.

a) Bepaal die lengtes van PQ en SR.

b) Bepaal die middelpunt van PR.

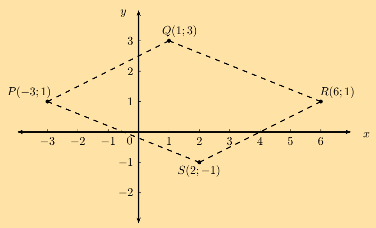
c) Toon aan dat $PQ \parallel SR$.

d) Bepaal die vergelykings van lyn PS en van lyn SR.

e) Is $PS \perp SR$? Verduidelik jou antwoord.

f) Watter soort vierhoek is $PQRS$?

Oplossing:

a) 

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1+3)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{(4)^2 + (2)^2} \\ &= \sqrt{16+4} \\ &= \sqrt{20} \\ SR &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2-6)^2 + (-1-1)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{16+4} \\ &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

b) Laat die middelpunt van PR $M(x;y)$ wees.

$$\begin{aligned} M(x;y) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{-3+6}{2}; \frac{1+1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}; 1\right) \end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
m_{PQ} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{3 - 1}{1 + 3} \\
&= \frac{2}{4} \\
&= \frac{1}{2} \\
m_{SR} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-1 - 1}{2 - 6} \\
&= \frac{-2}{-4} \\
&= \frac{1}{2} \\
\text{Dus } m_{PQ} &= m_{SR} \\
\therefore PQ &\parallel SR
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
m_{PS} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-1 - 1}{2 + 3} \\
&= \frac{-2}{5} \\
y &= mx + c \\
y &= -\frac{2}{5}x + c \\
\text{Substitueer } (-3; 1) \quad 1 &= -\frac{2}{5}(-3) + c \\
1 &= \frac{6}{5} + c \\
\therefore -\frac{1}{5} &= c \\
y &= -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{SR} &= \frac{1}{2} \\
y &= mx + c \\
y &= \frac{1}{2}x + c \\
\text{Substitueer } (6; 1) \quad 1 &= \frac{1}{2}(6) + c \\
1 &= 3 + c \\
\therefore -2 &= c \\
y &= \frac{1}{2}x - 2
\end{aligned}
$$

e) Nee; $m_{PS} \times m_{SR} \neq -1$.

f) Parallelogram

4.2 Vergelyking van 'n lyn

Die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking

Oefening 4 – 2: Die twee-punt vorm van die reguitlynvergelyking

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn deur die punte:

1. $(3;7)$ en $(-6;1)$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
\frac{y-7}{x-3} &= \frac{1-7}{-6-3} \\
\frac{y-7}{x-3} &= \frac{-6}{-9} \\
\frac{y-7}{x-3} &= \frac{2}{3} \\
y-7 &= \frac{2}{3}(x-3) \\
y &= \frac{2}{3}x-2+7 \\
\therefore y &= \frac{2}{3}x+5
\end{aligned}$$

2. $(1;-\frac{11}{4})$ en $(\frac{2}{3};-\frac{7}{4})$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
\frac{y+\frac{11}{4}}{x-1} &= \frac{-\frac{7}{4}+\frac{11}{4}}{\frac{2}{3}-1} \\
\frac{y+\frac{11}{4}}{x-1} &= \frac{1}{-\frac{1}{3}} \\
\frac{y+\frac{11}{4}}{x-1} &= -3 \\
y+\frac{11}{4} &= -3(x-1) \\
y &= -3x+3-\frac{11}{4} \\
\therefore y &= -3x+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3. $(-2;1)$ en $(3;6)$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
\frac{y-1}{x+2} &= \frac{6-1}{3+2}\\
\frac{y-1}{x+2} &= \frac{5}{5}\\
y-1 &= x+2\\
\therefore y &= x+3
\end{aligned}
$$

4. $(2;3)$ en $(3;5)$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
\frac{y-3}{x-2} &= \frac{5-3}{3-2}\\
\frac{y-3}{x-2} &= 2\\
y-3 &= 2(x-2)\\
y &= 2x-4+3\\
\therefore y &= 2x-1
\end{aligned}
$$

5. $(1;-5)$ en $(-7;-5)$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
\frac{y+5}{x-1} &= \frac{-5+5}{-7-1}\\
\frac{y+5}{x-1} &= 0\\
y+5 &= 0\\
\therefore y &= -5
\end{aligned}
$$

6. $(-4;0)$ en $(1;\frac{15}{4})$

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\
\frac{y-0}{x+4} &= \frac{\frac{15}{4}-0}{1+4}\\
\frac{y}{x+4} &= \frac{\frac{15}{4}}{5}\\
\frac{y}{x+4} &= \frac{15}{20}\\
y &= \frac{3}{4}(x+4)\\
\therefore y &= \frac{3}{4}x+3
\end{aligned}
$$

7. $(s;t)$ en $(t;s)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
\frac{y-t}{x-s} &= \frac{s-t}{t-s} \\
\frac{y-t}{x-s} &= \frac{-(t-s)}{t-s} \\
\frac{y-t}{x-s} &= -1 \\
y-t &= -(x-s) \\
y &= -x+s+t
\end{aligned}$$

8. $(-2;-8)$ en $(1;7)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
\frac{y+8}{x+2} &= \frac{7+8}{1+2} \\
\frac{y+8}{x+2} &= \frac{15}{3} \\
\frac{y+8}{x+2} &= 5 \\
y+8 &= 5(x+2) \\
y+8 &= 5x+10 \\
y &= 5x+2
\end{aligned}$$

9. $(2p;q)$ en $(0;-q)$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{y-y_1}{x-x_1} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\
\frac{y-q}{x-2p} &= \frac{-q-q}{0-2p} \\
\frac{y-q}{x-2p} &= \frac{-2q}{-2p} \\
\frac{y-q}{x-2p} &= \frac{q}{p} \\
y-q &= \frac{q}{p}(x-2p) \\
y-q &= \frac{q}{p}x-2q \\
\therefore y &= \frac{q}{p}x-q
\end{aligned}$$

Oefening 4 – 3: Gradiënt–punt vorm van die reguitlynvergelyking

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn:

1. gaan deur die punt $(-1; \frac{10}{3})$ en met $m = \frac{2}{3}$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - \frac{10}{3} &= \frac{2}{3}(x + 1) \\
y - \frac{10}{3} &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \\
y &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{10}{3} \\
\therefore y &= \frac{2}{3}x + 4
\end{aligned}
$$

2. met $m = -1$ en gaan deur die punt $(-2; 0)$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 0 &= -(x + 2) \\
\therefore y &= -x - 2
\end{aligned}
$$

3. gaan deur die punt $(3; -1)$ en met $m = -\frac{1}{3}$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y + 1 &= -\frac{1}{3}(x - 3) \\
y + 1 &= -\frac{1}{3}x + 1 \\
\therefore y &= -\frac{1}{3}x
\end{aligned}
$$

4. parallel aan die x-as en gaan deur die punt $(0; 11)$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 11 &= 0(x - 0) \\
\therefore y &= 11
\end{aligned}
$$

5. gaan deur die punt $(1; 5)$ en met $m = -2$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 5 &= -2(x - 1) \\ y - 5 &= -2x + 2 \\ \therefore y &= -2x + 7 \end{aligned}$$

6. loodreg op die x-as en gaan deur die punt $(-\frac{3}{2}; 0)$.

   Oplossing: $x = -\frac{3}{2}$

7. met $m = -0{,}8$ en gaan deur die punt $(10; -7)$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 7 &= -\frac{4}{5}(x - 10) \\ y + 7 &= -\frac{4}{5}x + 8 \\ \therefore y &= -\frac{4}{5}x + 1 \end{aligned}$$

8. met ongedefiniëerde gradiënt en gaan deur die punt $(4; 0)$.

   Oplossing: $x = 4$

9. met $m = 3a$ en gaan deur die punt $(-2; -6a + b)$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-6a + b) &= 3a(x + 2) \\ y + 6a - b &= 3ax + 6a \\ \therefore y &= 3ax + b \end{aligned}$$

Die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking

Oefening 4 – 4: Die gradiënt–afsnit vorm van die reguitlynvergelyking

Bepaal die vergelyking van die reguitlyn:

1. gaan deur die punt $(\frac{1}{2}; 4)$ en met $m = 2$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
y &= 2x + c \\
4 &= 2\left(\frac{1}{2}\right) + c \\
4 &= 1 + c \\
\therefore c &= 3 \\
\therefore y &= 2x + 3
\end{aligned}
$$

2. gaan deur die punte $(\frac{1}{2}; -2)$ en $(2; 4)$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
-2 &= m\left(\frac{1}{2}\right) + c \\
\text{Vermenigvuldig met } 2: \quad -4 &= m + 2c \ldots (1) \\
4 &= 2m + c \\
\text{Vermenigvuldig met } 2: \quad 8 &= 4m + 2c \ldots (2) \\
(2) - (1): \quad 8 + 4 &= 4m - m \\
12 &= 3m \\
\therefore 4 &= m \\
\therefore c &= 4 - 2(4) \\
&= -4 \\
\therefore y &= 4x - 4
\end{aligned}
$$

3. gaan deur die punte $(2; -3)$ en $(-1; 0)$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
-3 &= 2m + c \ldots (1) \\
0 &= -m + c \ldots (2) \\
(1) - (2): \quad -3 &= 2m + m \\
-3 &= 3m \\
\therefore -1 &= m \\
\therefore c &= -1 \\
\therefore y &= -x - 1
\end{aligned}
$$

4. gaan deur die punt $(2; -\frac{6}{7})$ en met $m = -\frac{3}{7}$.

   Oplossing:

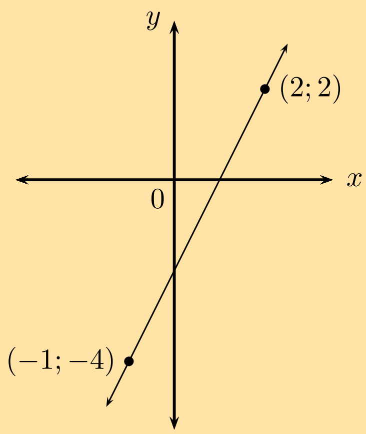
$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
y &= -\frac{3}{7}x + c \\
-\frac{6}{7} &= -\frac{3}{7}(2) + c \\
-\frac{6}{7} + \frac{6}{7} &= +c \\
\therefore c &= 0 \\
\therefore y &= -\frac{3}{7}x
\end{aligned}
$$

5. wat die y-as by $y = -\frac{1}{5}$ sny en met $m = \frac{1}{2}$.

   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
y &= mx - \frac{1}{5} \\
\therefore y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

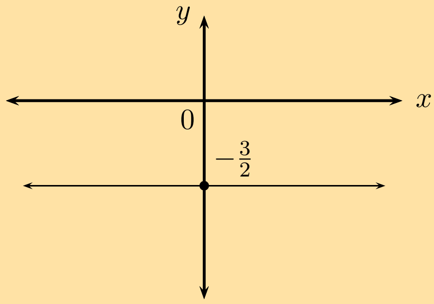
6.



   Oplossing:

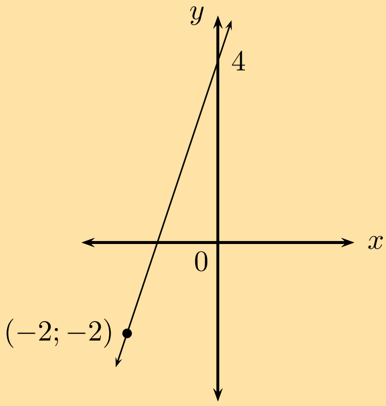
$$
\begin{aligned}
y &= mx + c \\
2 &= 2m + c \ldots (1) \\
-4 &= -m + c \ldots (2) \\
(1) - (2) \quad 2 + 4 &= 2m + m \\
6 &= 3m \\
\therefore m &= 2 \\
\therefore c &= -4 + 2 \\
&= -2 \\
\therefore y &= 2x - 2
\end{aligned}
$$

7.



Oplossing: $y = -\frac{3}{2}$

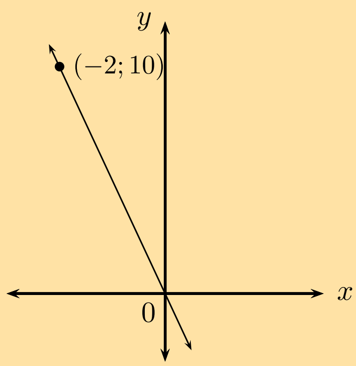
8.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
c &= 4 \\
y &= mx + c \\
y &= mx + 4 \\
\text{Substitueer } (-2;-2) \quad -2 &= -2m + 4 \\
-2m &= -6 \\
m &= 3 \\
\therefore y &= 3x + 4
\end{aligned}
$$

9.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
c &= 0 \\
y &= mx + c \\
y &= mx + 0 \\
\text{Substitueer } (-2;10) \quad 10 &= -2m \\
-2m &= 10 \\
\therefore m &= -5 \\
\therefore y &= -5x
\end{aligned}
$$

4.3 Inklinasie van 'n lyn

Oefening 4 – 5: Inklinasiehoek

1. Bepaal die gradiënt (korrek tot 1 desimale plek) vir elk van die volgende reguitlyne, gegewe dat die inklinasiehoek gelyk is aan:

a) $60°$

b) $135°$

c) $0°$

d) $54°$

e) $90°$

f) $45°$

g) $140°$

h) $180°$

i) $75°$

Oplossing:

a)

$$
\begin{aligned}
m &= \tan\theta \\
&= \tan 60° \\
\therefore m &= 1{,}7
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
m &= \tan\theta \\
&= \tan 135° \\
\therefore m &= -1
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
m &= \tan\theta \\
&= \tan 0° \\
\therefore m &= 0
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
m &= \tan\theta \\
&= \tan 54° \\
\therefore m &= 1{,}4
\end{aligned}
$$

e)

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ &= \tan 90° \\ \therefore m &\text{ is ongedefiniëerd} \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ &= \tan 45° \\ \therefore m &= 1 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ &= \tan 140° \\ \therefore m &= -0{,}8 \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ &= \tan 180° \\ \therefore m &= 0 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} m &= \tan\theta \\ &= \tan 75° \\ \therefore m &= 3{,}7 \end{aligned}$$

2. Bepaal die inklinasiehoek (korrek tot 1 desimale plek) vir elkeen van die volgende:

   a) ’n lyn met $m = \dfrac{3}{4}$
   b) $2y - x = 6$
   c) die lyn gaan deur die punte $(-4; -1)$ en $(2; 5)$
   d) $y = 4$
   e) $x = 3y + \frac{1}{2}$
   f) $x = -0{,}25$
   g) die lyn gaan deur die punte $(2; 5)$ en $(\frac{2}{3}; 1)$
   h) ’n lyn met ’n gradiënt gelyk aan $0{,}577$

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned} \tan\theta &= m \\ &= \frac{3}{4} \\ \theta &= \tan^{-1}(0{,}75) \\ \therefore \theta &= 36{,}8° \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2y - x &= 6 \\ 2y &= x + 6 \\ y &= \frac{1}{2}x + 3 \\ \tan\theta &= m \\ &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \tan^{-1}(0{,}5) \\ \therefore \theta &= 26{,}6^{\circ} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5+1}{2+4} \\ &= \frac{6}{6} \\ \therefore m &= 1 \\ \tan\theta &= 1 \\ \theta &= \tan^{-1}(1) \\ \therefore \theta &= 45^{\circ} \end{aligned}$$

d) Horisontale lyn

e)

$$\begin{aligned} x &= 3y + \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} &= 3y \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} &= y \\ \therefore m &= \frac{1}{3} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \therefore \theta &= 18{,}4^{\circ} \end{aligned}$$

f) Vertikale lyn

g)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1-5}{\frac{2}{3} - 2} \\ &= \frac{-4}{-\frac{4}{3}} \\ \therefore m &= 3 \\ \theta &= \tan^{-1}(3) \\ \therefore \theta &= 71{,}6^{\circ} \end{aligned}$$

h)

$$m = 0{,}577$$
$$\theta = \tan^{-1}(0{,}577)$$
$$\therefore \theta = 30°$$

Oefening 4 – 6: Inklinasie van 'n reguitlyn

1. Bepaal die inklinasiehoek vir elkeen van die volgende:

   a) 'n lyn met $m = \frac{4}{5}$

   b) $x + y + 1 = 0$

   c) 'n lyn met $m = 5{,}69$

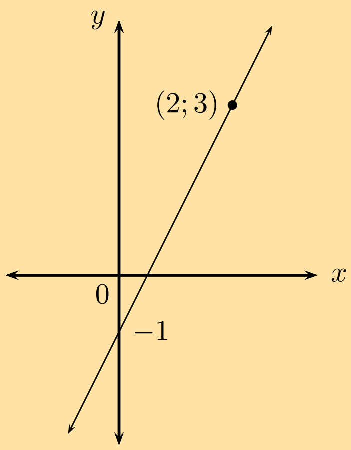
   d) die lyn wat deur $(1; 1)$ en $(-2; 7)$ gaan

   e) $3 - 2y = 9x$

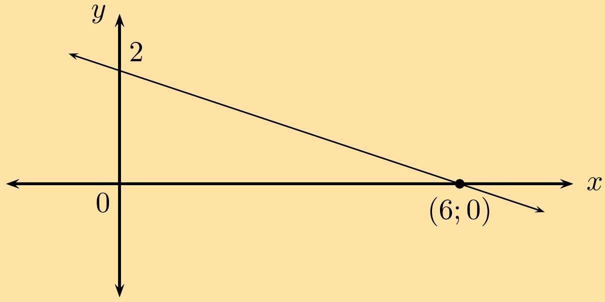
   f) die lyn wat deur $(-1; -6)$ en $(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{2})$ gaan

   g) $5 = 10y - 15x$

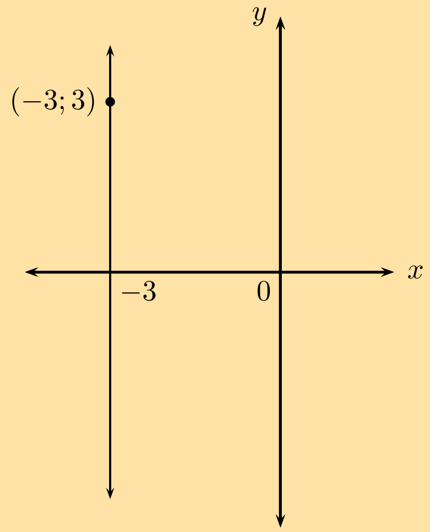
   h)



   i)



   j)



Oplossing:

a)

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{4}{5} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \\
\therefore \theta &= 38{,}7^{\circ}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
x + y + 1 &= 0 \\
y &= -x - 1 \\
m &= -1 \\
\theta &= \tan^{-1}(-1) \\
&= -45^{\circ} \\
\therefore \theta &= 180^{\circ} - 45^{\circ} \\
\therefore \theta &= 135^{\circ}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
m &= 5{,}69 \\
\theta &= \tan^{-1}(5{,}69) \\
\therefore \theta &= 80^{\circ}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{7 - 1}{-2 - 1} \\
&= \frac{6}{-3} \\
\therefore m &= -2 \\
\theta &= \tan^{-1}(-2) \\
&= -63{,}4^{\circ} \\
\therefore \theta &= 180^{\circ} - 63{,}4^{\circ} \\
\therefore \theta &= 80^{\circ}
\end{aligned}
$$

e)

$$\begin{aligned} 3-2y &= 9x \\ 3-9x &= 2y \\ \frac{3}{2}-\frac{9}{2}x &= y \\ \therefore m &= -\frac{9}{2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{9}{2}\right) \\ &= -77{,}5^\circ \\ \therefore \theta &= 180^\circ - 77{,}5^\circ \\ \therefore \theta &= 102{,}5^\circ \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{-\frac{11}{2}+6}{-\frac{1}{2}+1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \\ \therefore m &= 1 \\ \theta &= \tan^{-1}(1) \\ \therefore \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} 5 &= 10y-15x \\ 5+15x &= 10y \\ \frac{1}{2}+\frac{3}{2}x &= y \\ \therefore m &= \frac{3}{2} \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) \\ \therefore \theta &= 56{,}3^\circ \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{3+1}{2-0} \\ &= \frac{4}{2} \\ \therefore m &= 2 \\ \theta &= \tan^{-1}(2) \\ \therefore \theta &= 63{,}4^\circ \end{aligned}$$

i)

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{2 - 0}{0 - 6} \\
&= \frac{2}{-6} \\
\therefore m &= -\frac{1}{3} \\
\theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \\
\therefore \theta &= -18{,}4^\circ \\
\therefore \theta &= 180^\circ - 18{,}4^\circ \\
\therefore \theta &= 161{,}6^\circ
\end{aligned}
$$

j) Gradiënt ongedefiniëerd

2. Bepaal die skerphoek tussen die lyn wat deur die punte $A(-2; \frac{1}{5})$ en $B(0; 1)$ gaan en die lyn wat deur punte $C(1; 0)$ en $D(-2; 6)$ gaan.

Oplossing:

Laat die inklinasiehoek vir lyn AB β wees en laat die inklinasiehoek vir lyn CD α wees. Laat die hoek tussen die twee lyne θ wees.

$$
\begin{aligned}
m_{AB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{5}}{0 + 2} \\
&= \frac{\frac{4}{5}}{2} \\
\therefore m &= \frac{4}{10} \\
&= \frac{2}{5} \\
\beta &= \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \\
\therefore \beta &= 21{,}8^\circ \\
m_{CD} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{6 - 0}{-2 - 1} \\
&= \frac{6}{-3} \\
\therefore m &= -2 \\
\alpha &= \tan^{-1}(-2) \\
\therefore \alpha &= -63{,}4^\circ \\
\therefore \alpha &= 180^\circ - 63{,}4^\circ \\
\therefore \alpha &= 116{,}6^\circ \\
\text{en } \theta &= \beta + (180^\circ - \alpha) \quad \text{(buite } \angle \text{ van } \triangle\text{)} \\
\therefore \theta &= 21{,}8^\circ + (180^\circ - 116{,}6^\circ) \\
&= 85{,}2^\circ
\end{aligned}
$$

3. Bepaal die hoek tussen die lyn $y + x = 3$ en die lyn $x = y + \frac{1}{2}$.

Oplossing:

Laat die inklinasiehoek vir die lyn $y + x = 3$ α wees en laat die inklinasiehoek vir die lyn $x = y + \frac{1}{2}$ β wees. Laat die hoek tussen die twee lyne θ wees.

$$\begin{aligned}
y &= -x + 3 \\
\therefore m &= -1 \\
\alpha &= \tan^{-1}(-1) \\
\therefore \alpha &= -45^\circ \\
\therefore \alpha &= 180^\circ - 45^\circ \\
\therefore \alpha &= 135^\circ \\
x &= y + \frac{1}{2} \\
x - \frac{1}{2} &= y \\
\therefore m &= 1 \\
\beta &= \tan^{-1}(1) \\
\therefore \beta &= 45^\circ \\
\text{en } \theta &= \beta + (180^\circ - \alpha) \quad (\text{buite } \angle \text{ van } \triangle) \\
\therefore \theta &= 45^\circ + (180^\circ - 135^\circ) \\
&= 90^\circ
\end{aligned}$$

4. Vind die hoek tussen die lyn $y = 2x$ en die lyn wat deur die punte $(-1; \frac{7}{3})$ en $(0; 2)$ gaan.

Oplossing:

Laat die inklinasiehoek vir die lyn $y = 2x$ β wees en laat die inklinasiehoek vir die ander lyn α wees. Laat die hoek tussen die twee lyne θ wees.

$$\begin{aligned}
y &= 2x \\
\therefore m &= 2 \\
\beta &= \tan^{-1}(2) \\
\therefore \beta &= 63{,}4^\circ \\
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{2 - \frac{7}{3}}{0 + 1} \\
&= \frac{-\frac{1}{3}}{1} \\
\therefore m &= -\frac{1}{3} \\
\therefore \alpha &= -18{,}4^\circ \\
\therefore \alpha &= 180^\circ - 18{,}4^\circ \\
\therefore \alpha &= 161{,}6^\circ \\
\text{en } \theta &= \beta + (180^\circ - \alpha) \quad (\text{buite } \angle \text{ van } \triangle) \\
\therefore \theta &= 63{,}4^\circ + (180^\circ - 161{,}6^\circ) \\
&= 81{,}8^\circ
\end{aligned}$$

4.4 Ewewydige lyne

Oefening 4 – 7: Ewewydige lyne

1. Bepaal of die volgende twee lyne ewewydig is of nie:

   a) $y + 2x = 1$ en $-2x + 3 = y$
   b) $\frac{y}{3} + x + 5 = 0$ en $2y + 6x = 1$
   c) $y = 2x - 7$ en die lyn wat deur $(1; -2)$ en $(\frac{1}{2}; -1)$ gaan
   d) $y + 1 = x$ en $x + y = 3$
   e) Die lyn wat deur punte $(-2; -1)$ en $(-4; -3)$ gaan en die lyn $-y + x - 4 = 0$
   f) $y - 1 = \frac{1}{3}x$ en die lyn wat deur punte $(-2; 4)$ en $(1; 5)$ gaan

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} y + 2x &= 1 \\ y &= -2x + 1 \\ \therefore m_1 &= -2 \\ -2x + 3 &= y \\ \therefore m_2 &= -2 \\ \therefore m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Ewewydige lyne.

b)

$$\begin{aligned} \frac{y}{3} + x + 5 &= 0 \\ \frac{y}{3} &= -x - 5 \\ y &= -3x - 15 \\ \therefore m_1 &= -3 \\ 2y + 6x &= 1 \\ 2y &= -6x + 1 \\ y &= -3x + \frac{1}{3} \\ \therefore m_2 &= -3 \\ \therefore m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Ewewydige lyne.

c)

$$\begin{aligned} y &= 2x - 7 \\ \therefore m_1 &= 2 \\ m_2 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-1 + 2}{\frac{1}{2} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\ \therefore m_2 &= 2 \\ \therefore m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Ewewydige lyne.

d)

$$\begin{aligned} y + 1 &= x \\ y &= x - 1 \\ \therefore m_1 &= 1 \\ x + y &= 3 \\ y &= -x + 3 \\ \therefore m_2 &= - \\ \therefore m_1 &\neq m_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Nie-ewewydige lyne.

e)

$$\begin{aligned} -y + x - 4 &= 0 \\ y &= x - 4 \\ \therefore m_1 &= 1 \\ m_2 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-3 + 1}{-4 + 2} \\ &= \frac{-2}{-2} \\ \therefore m_2 &= 1 \\ \therefore m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Ewewydige lyne.

f)

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{1}{3}x \\ y &= \frac{1}{3}x + 1 \\ \therefore m_1 &= \frac{1}{3} \\ m_2 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{5-4}{1+2} \\ &= \frac{1}{3} \\ \therefore m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

$\therefore$ Ewewydige lyne.

2. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(1; -5)$ gaan en ewewydig is aan die lyn $y + 2x - 1 = 0$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} y + 2x - 1 &= 0 \\ y &= -2x + 1 \\ \therefore m &= -2 \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 5 &= -2(x - 1) \\ y &= -2x + 2 - 5 \\ \therefore y &= -2x - 3 \end{aligned}$$

3. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; -6)$ gaan en ewewydig is aan die lyn $2y + 1 = 6x$.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} 2y + 1 &= 6x \\ 2y &= 6x - 1 \\ y &= 3x - \frac{1}{2} \\ \therefore m &= 3 \\ y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y + 6 &= 3(x + 2) \\ y &= 3x + 6 - 6 \\ \therefore y &= 3x \end{aligned}$$

4. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; -2)$ gaan en ewewydig is aan die lyn met 'n inklinasiehoek van $\theta = 56{,}31°$.

   Oplossing:

$$\theta = 56{,}31^\circ$$
$$\therefore m = \tan\theta$$
$$= \tan 56{,}31^\circ$$
$$\therefore m = 1{,}5$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 2 = \frac{3}{2}(x + 2)$$
$$y = \frac{3}{2}x + 3 - 2$$
$$\therefore y = \frac{3}{2}x + 1$$

5. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; \frac{2}{5})$ gaan en ewewydig is aan die lyn met 'n inklinasiehoek van $\theta = 145^\circ$.

Oplossing:

$$\theta = 145^\circ$$
$$\therefore m = \tan\theta$$
$$= \tan 145^\circ$$
$$\therefore m = -0{,}7$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \frac{2}{5} = -\frac{7}{10}(x + 2)$$
$$y = -\frac{7}{10}x - \frac{7}{5} + \frac{2}{5}$$
$$\therefore y = -\frac{7}{10}x - 1$$

4.5 Loodregte lyne

Oefening 4 – 8: Loodregte lyne

1. Bepaal of die volgende twee lyne loodreg op mekaar is of nie.

   a) $y - 1 = 4x$ en $4y + x + 2 = 0$
   b) $10x = 5y - 1$ en $5y - x - 10 = 0$
   c) $x = y - 5$ en die lyn wat deur $(-1; \frac{5}{4})$ en $(3; -\frac{11}{4})$ gaan
   d) $y = 2$ en $x = 1$
   e) $\frac{y}{3} = x$ en $3y + x = 9$
   f) $1 - 2x = y$ en die lyn wat deur $(2; -1)$ en $(-1; 5)$ gaan
   g) $y = x + 2$ en $2y + 1 = 2x$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} y - 1 &= 4x \\ y &= 4x + 1 \\ \therefore m_1 &= 4 \\ 4y + x + 2 &= 0 \\ 4y &= -x - 2 \\ y &= -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \\ \therefore m_2 &= -\frac{1}{4} \\ \therefore m_1 \times m_2 &= -\frac{1}{4} \times 4 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\therefore$ Loodregte lyne.

b)

$$\begin{aligned} 10x &= 5y - 1 \\ 10x + 1 &= 5y \\ 2x + \frac{1}{5} &= y \\ \therefore m_1 &= 2 \\ 5y - x - 10 &= 0 \\ 5y &= -x + 10 \\ y &= -\frac{1}{5}x + 2 \\ \therefore m_2 &= -\frac{1}{5} \\ \therefore m_1 \times m_2 &= -\frac{1}{5} \times 2 \\ &\neq -1 \end{aligned}$$

$\therefore$ Nie-loodregte lyne.

c)

$$\begin{aligned} x &= y - 5 \\ x + 5 &= y \\ \therefore m_1 &= 1 \\ m_2 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-\frac{11}{4} - \frac{5}{4}}{3 + 1} \\ &= \frac{-4}{4} \\ \therefore m_2 &= -1 \\ \therefore m_1 \times m_2 &= -1 \times 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\therefore$ Loodregte lyne.

d) Loodreg: horisontale en vertikale lyne.

e)

$$\begin{aligned}
\frac{y}{3} &= x \\
y &= 3x \\
\therefore m_1 &= 3 \\
3y + x &= 9 \\
3y &= -x + 9 \\
y &= -\frac{1}{3}x + 3 \\
\therefore m_2 &= -\frac{1}{3} \\
\therefore m_1 \times m_2 &= -\frac{1}{3} \times 3 \\
&= -1
\end{aligned}$$

$\therefore$ Loodregte lyne.

f)

$$\begin{aligned}
1 - 2x &= y \\
\therefore m_1 &= -2 \\
m_2 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{5 + 1}{-1 - 2} \\
&= \frac{6}{-3} \\
\therefore m_2 &= -2 \\
\therefore m_1 \times m_2 &= -2 \times -2 \\
&\neq -1
\end{aligned}$$

$\therefore$ Nie-loodregte lyne.

g)

$$\begin{aligned}
y &= x + 2 \\
\therefore m_1 &= 1 \\
2y + 1 &= 2x \\
2y &= 2x - 1 \\
y &= x - \frac{1}{2} \\
\therefore m_2 &= 1 \\
\therefore m_1 \times m_2 &= 1 \times 1 \\
&\neq -1
\end{aligned}$$

$\therefore$ Nie-loodregte lyne.

2. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; -4)$ gaan en loodreg op die lyn $y + 2x = 1$ is.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
y &= -2x + 1 \\
\therefore m_1 &= -2 \\
\text{Vir } \perp: m_1 \times m_2 &= -1 \\
-2 \times m_2 &= -1 \\
\therefore m_2 &= \frac{1}{2} \\
y &= mx + c \\
y &= \frac{1}{2}x + c \\
\text{Substitueer } (-2;-4): \quad -4 &= \frac{1}{2}(-2) + c \\
-4 &= -1 + c \\
\therefore c &= -3 \\
\therefore y &= \frac{1}{2}x - 3
\end{aligned}$$

3. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(2;-7)$ gaan en loodreg op die lyn $5y - x = 0$ is.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
5y - x &= 0 \\
5y &= x \\
y &= \frac{1}{5}x \\
\therefore m_1 &= \frac{1}{5} \\
\text{Vir } \perp: m_1 \times m_2 &= -1 \\
\frac{1}{5} \times m_2 &= -1 \\
\therefore m_2 &= -5 \\
y &= mx + c \\
y &= -5x + c \\
\text{Substitueer } (2;7): \quad -7 &= -5(2) + c \\
-7 &= -10 + c \\
\therefore c &= 3 \\
\therefore y &= -5x + 3
\end{aligned}$$

4. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(3;-1)$ gaan en loodreg is op die lyn met 'n inklinasiehoek van $\theta = 135°$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\theta &= 135^\circ \\
\therefore m &= \tan\theta \\
&= \tan 135^\circ \\
\therefore m &= -1 \\
y &= mx + c \\
y &= -x + c \\
\text{Substitueer } (3;-1): \quad -1 &= -(3) + c \\
\therefore c &= 2 \\
\therefore y &= -x + 2
\end{aligned}$$

5. Bepaal die vergelyking van die reguitlyn wat deur die punt $(-2; \frac{2}{5})$ gaan en loodreg is op die lyn $y = \frac{4}{3}$.

Oplossing:

$x = -2$

4.6 Opsomming

Oefening 4 – 9: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Bepaal die vergelyking van die lyn:

   a) deur die punte $(-1; 3)$ en $(1; 4)$
   b) deur die punte $(7; -3)$ en $(0; 4)$
   c) ewewydig aan $y = \frac{1}{2}x + 3$ en wat deur $(-2; 3)$ gaan
   d) loodreg op $y = -\frac{1}{2}x + 3$ en wat deur $(-1; 2)$ gaan
   e) loodreg op $3y + x = 6$ en wat deur die oorsprong gaan

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{4-3}{1+1} \\
\therefore m &= \frac{1}{2} \\
y &= mx + c \\
\therefore y &= \frac{1}{2}x + c \\
\text{Substitueer } (1;4): \quad 4 &= \frac{1}{2}(1) + c \\
\therefore c &= 3\frac{1}{2} \\
\therefore y &= \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{4+3}{0-7} \\
&= \frac{7}{-7} \\
\therefore m &= -1 \\
y &= mx + c \\
\therefore y &= -x + c \\
\text{Substitueer } (0;4): \quad 4 &= -1(0) + c \\
\therefore c &= 4 \\
\therefore y &= -x + 4
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\therefore m &= \frac{1}{2} \\
y &= mx + c \\
\therefore y &= \frac{1}{2}x + c \\
\text{Substitueer } (-2;3): \quad 3 &= \frac{1}{2}(-2) + c \\
\therefore c &= 4 \\
\therefore y &= \frac{1}{2}x + 4
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\therefore m &= 2 \\
y &= mx + c \\
\therefore y &= 2x + c \\
\text{Substitueer } (-1;2): \quad 2 &= 2(-1) + c \\
\therefore c &= 4 \\
\therefore y &= 2x + 4
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
3y + x &= 6 \\
y &= -\frac{1}{3}x + 2 \\
\therefore m &= 3 \\
y &= mx + c \\
\therefore y &= 3x + c \\
\text{Substitueer } (0;0): \quad 0 &= 3(0) + c \\
\therefore c &= 0 \\
\therefore y &= 3x
\end{aligned}$$

2. Bepaal die inklinasiehoeke van die volgende lyne:

   a) $y = 2x - 3$

b) $y = \frac{1}{3}x - 7$

c) $4y = 3x + 8$

d) $y = -\frac{2}{3}x + 3$

e) $3y + x - 3 = 0$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\therefore m &= 2 \\
\tan\theta &= m \\
\tan\theta &= 2 \\
\therefore \theta &= \tan^{-1} 2 \\
\theta &= 63{,}4^\circ
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\therefore m &= \frac{1}{3} \\
\tan\theta &= m \\
\tan\theta &= \frac{1}{3} \\
\therefore \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \\
\theta &= 18{,}4^\circ
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
4y &= 3x + 8 \\
y &= \frac{3}{4}x + 2 \\
\therefore m &= \frac{3}{4} \\
\tan\theta &= m \\
\tan\theta &= \frac{3}{4} \\
\therefore \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \\
\theta &= 36{,}9^\circ
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\therefore m &= -\frac{2}{3} \\
\tan\theta &= m \\
\tan\theta &= -\frac{2}{3} \\
\therefore \theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) \\
\theta &= -33^\circ + 180^\circ \\
\therefore \theta &= 146{,}3^\circ
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} 3y + x - 3 &= 0 \\ y &= -\frac{1}{3} + 1 \\ \therefore m &= -\frac{1}{3} \\ \tan\theta &= m \\ \tan\theta &= -\frac{1}{3} \\ \therefore \theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) \\ \theta &= -18{,}4^\circ + 180^\circ \\ \therefore \theta &= 161{,}6^\circ \end{aligned}$$

3. $P(2;3)$, $Q(-4;0)$ en $R(5;-3)$ is die hoekpunte van $\triangle PQR$ in die Cartesiese vlak. PR sny die x-as by S. Bepaal die volgende:

   a) die vergelyking van die lyn PR
   b) die koördinate van punt S
   c) die inklinasiehoek van PR (korrek tot twee desimale plekke)
   d) die gradiënt van lyn PQ
   e) $Q\hat{P}R$
   f) die vergelyking van die lyn loodreg op PQ en wat deur die oorsprong gaan
   g) die middelpunt M van QR
   h) die vergelyking van die lyn ewewydig aan PR en wat deur punt M gaan

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{-3-3}{5-2} \\ &= \frac{-6}{3} \\ \therefore m &= -2 \\ y &= mx + c \\ \therefore y &= -2x + c \\ \text{Substitueer } (2;3): \quad 3 &= -2(2) + c \\ \therefore c &= 7 \\ \therefore y &= -2x + 7 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y &= -2x + 7 \\ 0 &= -2x + 7 \\ \therefore x &= \frac{7}{2} \\ \therefore S&\left(\frac{7}{2};0\right) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\therefore m &= -2 \\
\tan\theta &= m \\
\tan\theta &= -2 \\
\therefore \theta &= \tan^{-1}(-2) \\
\theta &= -63{,}4^\circ + 180^\circ \\
\therefore \theta &= 116{,}6^\circ
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{3-0}{2+4} \\
&= \frac{3}{6} \\
\therefore m &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e) $Q\hat{P}R = 90^\circ$

f)

$$\begin{aligned}
m_{PQ} &= \frac{1}{2} \\
\therefore m_\perp &= -2 \\
y &= -2x + c \\
c &= 0 \\
\therefore y &= -2x
\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-4+5}{2}; \frac{0-3}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
m &= -2 \\
y &= mx + c \\
y &= -2x + c \\
\text{Substitueer } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right): \quad -\frac{3}{2} &= -2\left(\frac{1}{2}\right) + c \\
c &= -\frac{1}{2} \\
y &= -2x - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

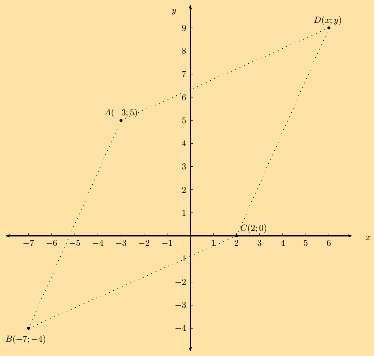
4. Punte $A(-3;5)$, $B(-7;-4)$ en $C(2;0)$ is gegee.

a) Stip die punte op die Cartesiese vlak.

b) Bepaal die koördinate van D as $ABCD$ 'n parallelogram is.

c) Bewys dat $ABCD$ 'n rombus is.

Oplossing:

a) 

b)

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{-4-0}{-7-2} \\ &= \frac{4}{9} \\ \therefore m_{AD} &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

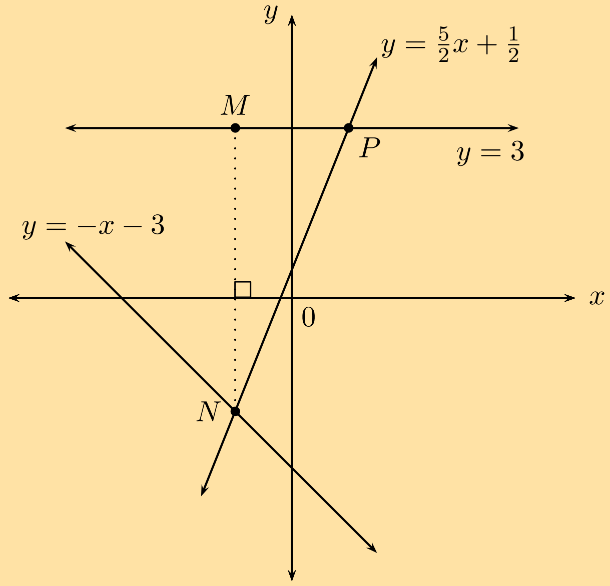
$\therefore$ vanaf $A(-3;5)$: 9 eenhede na regs en 4 eenhede opwaarts

c)

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-7-(-3))^2+(-4-5)^2} \\ &= \sqrt{(-4)^2+(-9)^2} \\ &= \sqrt{16+81} \\ &= \sqrt{97} \\ AD &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(-3-6)^2+(5-9)^2} \\ &= \sqrt{(-9)^2+(-4)^2} \\ &= \sqrt{81+16} \\ &= \sqrt{97} \\ \therefore AB &= AD \end{aligned}$$

$\therefore$ parallelogram $ABCD$ is 'n rombus (aangr. sye gelyk)

5.



Beskou die skets hierbo, met die volgende lyne wat aangetoon word:

$y = -x - 3$

$y = 3$

$y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$

a) Bepaal die koördinate van die punt N.

b) Bepaal die koördinate van die punt P.

c) Bepaal die vergelyking van die vertikale lynstuk MN.

d) Bepaal die lengte van die vertikale lyn MN.

e) Bepaal die grootte van $M\hat{N}P$.

f) Bepaal die vergelyking van die lyn ewewydig aan NP en wat deur die punt M gaan.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2}x + \frac{1}{2} &= -x - 3 \\
\frac{5}{2}x + x &= -3 - \frac{1}{2} \\
\frac{7}{2}x &= -\frac{7}{2} \\
\therefore x &= -1 \\
\therefore y &= -(-1) - 3 \\
&= -2 \\
&\therefore N\,(-1; -2)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
y &= \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \\
y &= \frac{5}{2}(3) + \frac{1}{2} \\
&= 8 \\
\therefore &P\,(8; 3)
\end{aligned}$$

c) $x = -1$

d)

$$\begin{aligned} MN &= 2 + 3 \\ &= 5 \text{ eenhede} \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \text{Laat } M\hat{P}N &= \theta \\ y &= \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \\ \tan\theta &= m \\ \tan\theta &= \frac{5}{2} \\ \therefore \theta &= 68{,}2^\circ \\ \text{In } \triangle MNP \quad M\hat{N}P &= 180^\circ - 90^\circ - 68{,}2^\circ \\ \therefore M\hat{N}P &= 21{,}8^\circ \end{aligned}$$

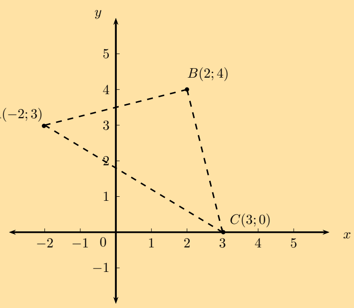
f)

$$\begin{aligned} m &= \frac{5}{2} \\ y &= mx + c \\ y &= \frac{5}{2}x + c \\ \text{Substitueer } M(-1;3): \quad 3 &= \frac{5}{2}(-1) + c \\ \therefore c &= 3 + \frac{5}{2} \\ &= \frac{11}{2} \\ \therefore y &= \frac{5}{2}x + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

6. Die volgende punte is gegee: $A(-2;3)$, $B(2;4)$, $C(3;0)$.

   a) Stip die punte op die Cartesiese vlak.
   b) Bewys dat $\triangle ABC$ 'n reghoekige gelykbenige driehoek is.
   c) Bepaal die vergelyking van lyn AB.
   d) Bepaal die koördinate van D as $ABCD$ 'n vierkant is.
   e) Bepaal die koördinate van E, die middelpunt van BC.

Oplossing:

a) 

b)

$$\begin{aligned}
BC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(3-2)^2 + (0-4)^2} \\
&= \sqrt{(1)^2 + (4)^2} \\
&= \sqrt{1+16} \\
&= \sqrt{17} \\
AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(2+2)^2 + (4-3)^2} \\
&= \sqrt{(4)^2 + (1)^2} \\
&= \sqrt{16+1} \\
&= \sqrt{17} \\
\therefore BC &= AB \\
\therefore \triangle ABC & \text{ is gelykbenig} \\
AC &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(3+2)^2 + (0-3)^2} \\
&= \sqrt{(5)^2 + (-3)^2} \\
&= \sqrt{25+9} \\
&= \sqrt{34} \\
\text{en } BC^2 + AB^2 &= 17 + 17 \\
&= 34 \\
&= AC^2 \\
\therefore \triangle ABC & \text{ is reghoekig}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{4-3}{2+2} \\
&= \frac{1}{4} \\
y &= mx + c \\
y &= \frac{1}{4}x + c \\
\text{Substitueer } M(-2;3): \quad 3 &= \frac{1}{4}(-2) + c \\
\therefore c &= \frac{7}{2} \\
\therefore y &= \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

d) $D(-1;-1)$

e)

$$\begin{aligned}E(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)\\ &= \left(\frac{2+3}{2};\frac{4+0}{2}\right)\\ &= \left(\frac{5}{2};2\right)\end{aligned}$$

7. Gegewe punte $S(2;5)$, $T(-3;-4)$ en $V(4;-2)$.

   a) Bepaal die vergelyking van die lyn ST.

   b) Bepaal die grootte van $T\hat{S}V$.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\\ &= \frac{-4-5}{-3-2}\\ &= \frac{-9}{-6}\\ &= \frac{3}{2}\\ y &= mx+c\\ y &= \frac{3}{2}x+c\\ \text{Substitueer } M(2;5):\quad 5 &= \frac{3}{2}(2)+c\\ \therefore c &= 2\\ \therefore y &= \frac{3}{2}x+2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}m_{ST} &= \frac{3}{2}\\ \tan\beta &= \frac{3}{2}\\ \therefore \beta &= \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\\ &= 49{,}6^\circ\\ m_{SV} &= \frac{5+2}{2-4}\\ &= \frac{7}{-2}\\ \tan\theta &= -\frac{7}{2}\\ \therefore \theta &= \tan^{-1}\left(-\frac{7}{2}\right)\\ &= -74{,}1^\circ + 180^\circ\\ &= 105{,}9^\circ\\ \therefore T\hat{S}V &= 105{,}9^\circ - 56{,}3^\circ\\ &= 49{,}6^\circ\end{aligned}$$

8. Beskou die driehoek FGH met hoekpunte $F(-1;3)$, $G(2;1)$ en $H(4;4)$.

a) Skets $\triangle FGH$ op die Cartesiese vlak.

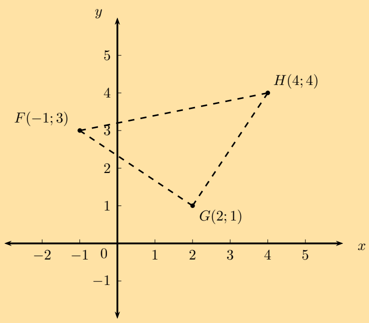
b) Wys dat $\triangle FGH$ 'n gelykbenige driehoek is.

c) Bepaal die vergelyking van die lyn PQ, loodregte halveerlyn van FH.

d) Lê G op die lyn PQ?

e) Bepaal die vergelyking van die lyn ewewydig aan GH en wat deur punt F gaan.

Oplossing:



a)

b)

$$\begin{aligned}
FG &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\
&= \sqrt{(-1-2)^2+(3-1)^2}\\
&= \sqrt{(-3)^2+(2)^2}\\
&= \sqrt{9+4}\\
&= \sqrt{13}\\
GH &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\
&= \sqrt{(4-2)^2+(4-1)^2}\\
&= \sqrt{(2)^2+(3)^2}\\
&= \sqrt{4+9}\\
&= \sqrt{13}\\
\therefore FG &= GH
\end{aligned}$$

$\therefore \triangle FGH$ is 'n gelykbenige driehoek

c)

$$\begin{aligned} Q(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right) \\ &= \left(\frac{4-1}{2};\frac{4+3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right) \\ m &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{4-3}{4+1} \\ &= \frac{1}{5} \\ \therefore m_{\perp} &= -5 \\ y &= mx+c \\ y &= -5x+c \\ \text{Substitueer } Q\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right): \quad \frac{7}{2} &= -5\left(\frac{3}{2}\right)+c \\ \therefore c &= 11 \\ \therefore y &= -5x+11 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} y &= -5x+11 \\ G(2;1) \therefore \text{substitueer } x=2: \quad y &= -5(2)+11 \\ &= -10+11 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ja, G lê op die lyn PQ

e)

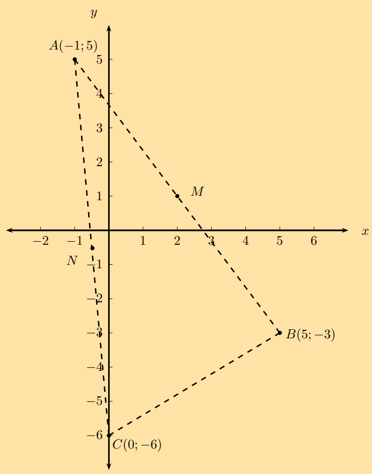
$$\begin{aligned} m_{GH} &= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ &= \frac{4-1}{4-2} \\ &= \frac{3}{2} \\ y &= mx+c \\ y &= \frac{3}{2}x+c \\ \text{Substitueer } F(-1;3): \quad 3 &= \frac{3}{2}(-1)+c \\ \therefore c &= \frac{9}{2} \\ \therefore y &= \frac{3}{2}x+\frac{9}{2} \end{aligned}$$

9. Gegewe die punte $A(-1;5)$, $B(5;-3)$ en $C(0;-6)$. M is die middelpunt van AB en N is die middelpunt van AC.

   a) Teken 'n skets op die Cartesiese vlak.
   b) Toon aan dat die koördinate van M en N, onderskeidelik $(2;1)$ en $(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ en is.

c) Gebruik analitiese meetkundige metodes om die middelpuntstelling te bewys. (Bewys dat $NM \parallel CB$ en $NM = \frac{1}{2}CB$.)

Oplossing:

a) 

b)

$$
\begin{aligned}
M(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)\\
&= \left(\frac{-1+5}{2};\frac{5-3}{2}\right)\\
&= \left(\frac{4}{2};\frac{2}{2}\right)\\
&= (2;1)\\
N(x;y) &= \left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)\\
&= \left(\frac{-1+0}{2};\frac{5-6}{2}\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned}
m_{NM} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{1 + \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} \\
&= \frac{3}{5} \\
m_{CB} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{-3 + 6}{5 - 0} \\
&= \frac{3}{5} \\
m_{NM} &= m_{CB} \\
\therefore NM &\parallel CB \\
NM &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(2 + \frac{1}{2})^2 + (1 + \frac{1}{2})^2} \\
&= \sqrt{(\frac{5}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} \\
&= \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{9}{4}} \\
&= \sqrt{\frac{34}{4}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{34} \\
CB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
&= \sqrt{(5 - 0)^2 + (-3 + 6)^2} \\
&= \sqrt{(5)^2 + (3)^2} \\
&= \sqrt{25 + 9} \\
&= \sqrt{34} \\
\therefore NM &= \frac{1}{2}CB
\end{aligned}$$

HOOFSTUK 5

Funksies

- Leerders moet in staat wees om die vergelyking van 'n funksie te bepaal vanaf die grafiek.
- Bespreek en verduidelik die eienskappe van funksies: gebied, terrein, as-afsnitte, maksimum- en minimumwaardes, simmetrie, ens.
- Beklemtoon by leerders die belangrikheid daarvan om die vergelyking van 'n funksie goed te bestudeer en die vorm van die grafiek te antisipeer.
- Bespreek die verskillende funksies en die invloed van die parameters in algemene terme.

5.1 Kwadratiese funksies

Hersiening

Funksies van die vorm $y = ax^2 + q$

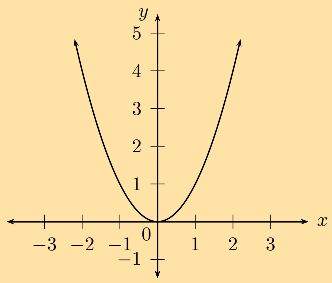
Oefening 5 – 1: Hersiening

1. Op aparte assestelsels, trek akkurate grafieke van die volgende funksies.
   - Gebruik tabelle indien nodig.
   - Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

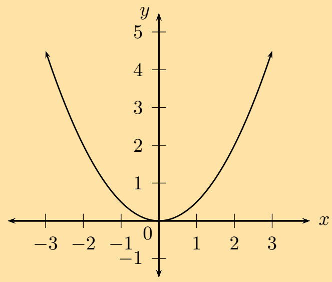
   a) $y_1 = x^2$
   b) $y_2 = \frac{1}{2}x^2$
   c) $y_3 = -x^2 - 1$
   d) $y_4 = -2x^2 + 4$

   Oplossing:

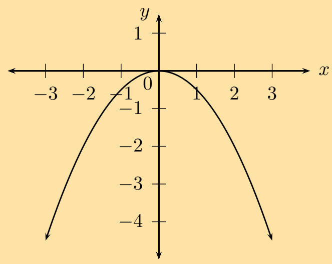
   a)



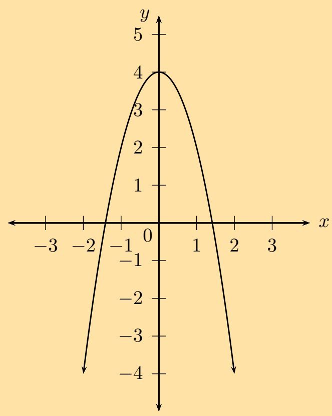
   b)



c)



d)



2. Gebruik jou sketsgrafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi (die eerste kolom is reeds ingevul as ’n voorbeeld):

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$			
effek van q	$y_{\text{afsnit}} = 0$			
waarde van a	$a = 1$			
effek van a	standaard parabool			
draaipunt	$(0; 0)$			
simmetrie-as	$x = 0$ (y-as)			
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$			
terrein	$\{y : y \geq 0\}$			

Oplossing:

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$	$q = 0$	$q = -1$	$q = 4$
uitwerking van q	$y_{\text{afsnit}} = 0$	$y_{\text{afsnit}} = 0$	$y_{\text{afsnit}} = -1$, skuif 1 eenheid afwaards	$y_{\text{afsnit}} = 4$, skuif 4 eenhede opwaarts
waarde van a	$a = 1$	$a = \frac{1}{2}$	$a = -1$	$a = -2$
uitwerking van a	standard parabola	glimlag, min. draaipunt	frons, maks. draaipunt	frons, maks. draaipunt
draaipunt	$(0; 0)$	$(0; 0)$	$(0; -1)$	$(0; 4)$
simmetrie-as	$x = 0$ (y-as)	$x = 0$ (y-as)	$x = 0$ (y-as)	$x = 0$ (y-as)
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$
terrein	$\{y : y \geq 0\}$	$\{y : y \geq 0\}$	$\{y : y \leq -1\}$	$\{y : y \leq 4\}$

Funksies van die vorm $y = a(x+p)^2 + q$

Ontdek die eienskappe

Oefening 5 – 2: Gebied en terrein

Gee die gebied en terrein vir elk van die volgende funksies:

1. $f(x) = (x-4)^2 - 1$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \geq -1, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

2. $g(x) = -(x-5)^2 + 4$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \leq 4, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

3. $h(x) = x^2 - 6x + 9$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} h(x) &= x^2 - 6x + 9 \\ &= (x-3)^2 \\ \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

4. $j(x) = -2(x+1)^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \leq 0, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

5. $k(x) = -x^2 + 2x - 3$

Oplossing:

$$\begin{aligned} k(x) &= -x^2 + 2x - 3 \\ &= -(x-1)^2 - 2 \\ \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \leq 2, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Oefening 5 – 3: Afsnitte

Bepaal die x- en y-afsnitte vir elk van die volgende funksies:

1. $f(x) = (x+4)^2 - 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Vir } x = 0 \quad y &= (0+4)^2 - 1 \\ &= 16 - 1 \\ &\therefore (0; 15) \\ \text{Vir } y = 0 \quad 0 &= (x+4)^2 - 1 \\ &= x^2 + 8x + 16 - 1 \\ &= x^2 + 8x + 15 \\ &= (x+5)(x+3) \\ x = -5 &\text{ of } x = -3 \\ \therefore (-5; 0) &\text{ en } (-3; 0) \end{aligned}$$

2. $g(x) = 16 - 8x + x^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Vir } x = 0 \quad y &= 16 \\ &\therefore (0;16) \\ \text{Vir } y = 0 \quad 0 &= 16 - 8x + x^2 \\ &= x^2 - 8x + 16 \\ &= (x-4)^2 \\ \therefore x &= 4 \\ &\therefore (4;0) \end{aligned}$$

3. $h(x) = -x^2 + 4x - 3$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Vir } x = 0 \quad y &= -3 \\ &\therefore (0;-3) \\ \text{Vir } y = 0 \quad 0 &= -x^2 + 4x - 3 \\ &= -(x^2 - 4x + 3) \\ &= -(x-3)(x-1) \\ x = 3 \text{ of } x &= 1 \\ \therefore (1;0) \text{ en } &(3;0) \end{aligned}$$

4. $j(x) = 4(x-3)^2 - 1$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Vir } x = 0 \quad y &= 4(0-3)^2 - 1 \\ &= 36 - 1 \\ &\therefore (0;35) \\ \text{Vir } y = 0 \quad 0 &= 4(x-3)^2 - 1 \\ &= 4(x^2 - 6x + 9) - 1 \\ &= 4x^2 - 24x + 36 - 1 \\ &= 4x^2 - 36x + 35 \\ &= (2x+5)(2x+7) \\ x = -\frac{5}{2} \text{ of } x &= -\frac{7}{2} \\ \therefore (-\frac{5}{2};0) \text{ en } &(-\frac{7}{2};0) \end{aligned}$$

5. $k(x) = 4(x-3)^2 + 1$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Vir } x = 0 \quad y &= 4(0-3)^2 + 1 \\
&= 36 + 1 \\
&\therefore (0; 37) \\
\text{Vir } y = 0 \quad 0 &= 4(x-3)^2 + 1 \\
&= 4(x^2 - 6x + 9) + 1 \\
&= 4x^2 - 24x + 36 + 1 \\
&= 4x^2 - 36x + 37 \\
\therefore x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(4)(37)}}{2(4)} \\
&= \frac{576 \pm \sqrt{576 - 592}}{8} \\
&= \frac{576 \pm \sqrt{-16}}{8} \\
&\therefore \text{geen reële oplossing}
\end{aligned}$$

6. $l(x) = 2x^2 - 3x - 4$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Vir } x = 0 \quad y &= -4 \\
&\therefore (0; -4) \\
\text{Vir } y = 0 \quad 0 &= 2x^2 - 3x - 4 \\
&= 2x^2 - 3x - 4 \\
\therefore x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-4)}}{2(2)} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{4} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{41}}{4} \\
x = \frac{3 - \sqrt{41}}{4} &\text{ of } x = \frac{3 + \sqrt{41}}{4} \\
\therefore (-0{,}85; 0) &\text{ en } (2{,}35; 0)
\end{aligned}$$

Oefening 5 – 4: Draaipunte

Bepaal die draaipunt van elk van die volgende:

1. $y = x^2 - 6x + 8$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 8 \\ &= (x-3)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 8 \\ &= (x-3)^2 - 1 \\ \therefore \text{draaipunt } &= (3;-1) \end{aligned}$$

2. $y = -x^2 + 4x - 3$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x - 3 \\ &= -(x^2 - 4x + 3 \\ &= -\left((x-2)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 3\right) \\ &= -(x-2)^2 + 1 \\ \therefore \text{draaipunt } &= (2;1) \end{aligned}$$

3. $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1 \\ \therefore \text{draaipunt } &= (-2;-1) \end{aligned}$$

4. $y = 2x^2 + 2x + 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 2x + 1 \\ &= 2\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \\ \therefore \text{draaipunt } &= (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

5. $y = 18 + 6x - 3x^2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= -3x^2 + 6x + 18 \\ &= -3(x^2 - 2x - 6) \\ &= -3\left((x-1)^2 - 7\right) \\ &= -3(x-1)^2 + 21 \\ \therefore \text{draaipunt } &= (1;21) \end{aligned}$$

6. $y = -2[(x+1)^2 + 3]$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= -2[(x+1)^2 + 3] \\
y &= -2(x+1)^2 - 6 \\
\therefore \text{draaipunt } &= (-1; -6)
\end{aligned}
$$

Oefening 5 – 5: As van simmetrie

1. Bepaal die as van simmetrie van elk van die volgende:

   a) $y = 2x^2 - 5x - 18$
   b) $y = 3(x-2)^2 + 1$
   c) $y = 4x - x^2$

   Oplossing:

   a)

$$
\begin{aligned}
y &= 2x^2 - 5x - 18 \\
&= 2(x^2 - \frac{5}{2}x - 9) \\
&= 2\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{16} - 9\right) \\
&= 2\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{169}{16}\right) \\
&= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{169}{8} \\
\text{simmetrie-as: } x &= \frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

   b)

$$
\begin{aligned}
y &= 3(x-2)^2 + 1 \\
\text{simmetrie-as: } x &= 2
\end{aligned}
$$

   c)

$$
\begin{aligned}
y &= 4x - x^2 \\
&= -(x^2 - 4x) \\
&= -(x-2)^2 + 4 \\
\text{simmetrie-as: } x &= 2
\end{aligned}
$$

2. Skryf die vergelyking neer van 'n parabool waar die y-as die as van simmetrie is.

   Oplossing: $y = ax^2 + q$

Skets die grafiek van die vorm $f(x) = a(x+p)^2 + q$

Oefening 5 – 6: Skets parabole

1. Skets grafieke van die volgende funksies. Bepaal:
   - as-afsnitte
   - draaipunt
   - asse van simmetrie
   - gebied en terrein

   a) $y = -x^2 + 4x + 5$

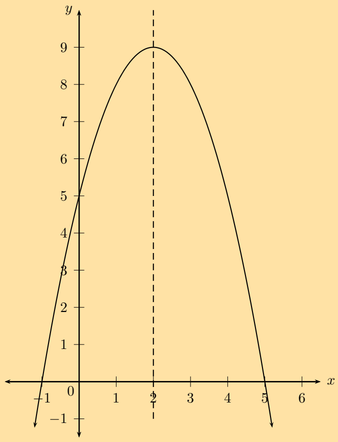
   b) $y = 2(x+1)^2$

   c) $y = 3x^2 - 2(x+2)$

   d) $y = 3(x-2)^2 + 1$

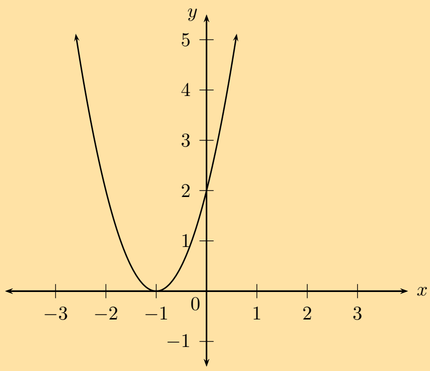
Oplossing:

a)



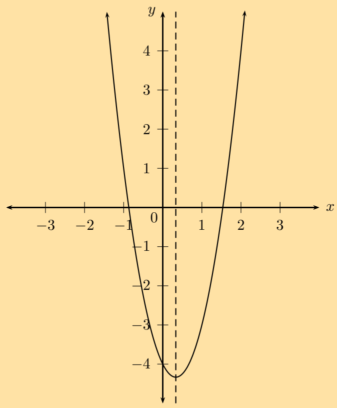
afsnitte: $(-1;0), (5;0), (0;5)$
draaipunt: $(2;9)$
simmetrie-asse: $x = 2$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \leq 9, y \in \mathbb{R}\}$

b)



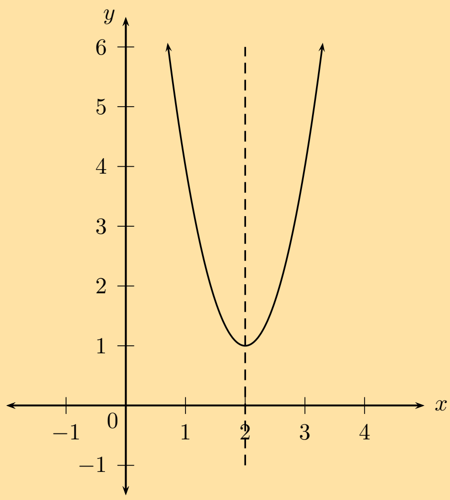
Afsnitte: $(-1;0), (0;2)$
draaipunt: $(-1;0)$
simmetrie-asse: $x = -1$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \geq 0, y \in \mathbb{R}\}$

c)



Afsnitte: $(-0{,}87;0), (1{,}54;0), (0;-4)$
draaipunt: $(0{,}33;-4{,}33)$
simmetrie-asse: $x = -0{,}33$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \geq 4{,}33, y \in \mathbb{R}\}$

d)



Afsnitte: $(0;13)$
draaipunt: $(2;1)$
simmetrie-asse: $x = 2$
Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$
Terrein: $\{y : y \geq 1, y \in \mathbb{R}\}$

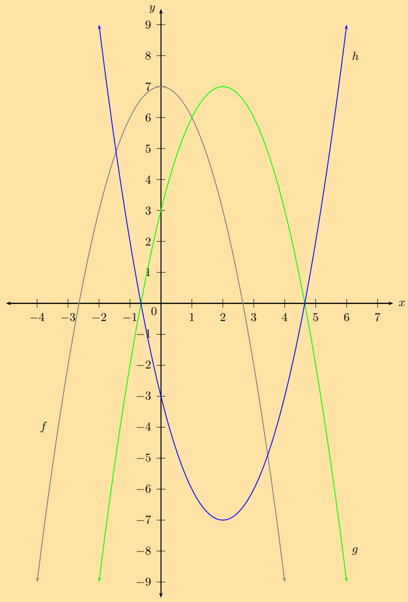
2. Trek die volgende grafieke op dieselfde assestelsel:

$f(x) = -x^2 + 7$

$g(x) = -(x-2)^2 + 7$

$h(x) = (x-2)^2 - 7$

Oplossing:

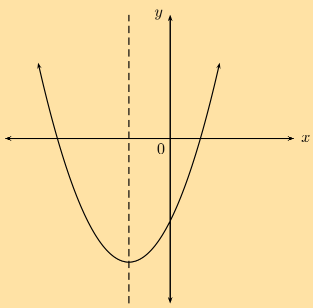


3. Trek 'n skets van elk van die volgende grafieke:

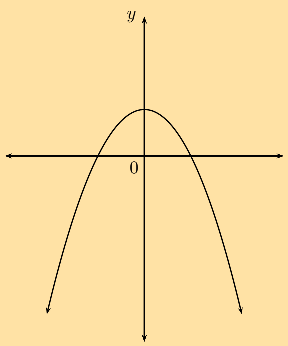
   a) $y = ax^2 + bx + c$ as $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$.
   b) $y = ax^2 + bx + c$ as $a < 0$, $b = 0$, $c > 0$.
   c) $y = ax^2 + bx + c$ as $a < 0$, $b < 0$, $b^2 - 4ac < 0$.
   d) $y = (x + p)^2 + q$ as $p < 0$, $q < 0$ en die x-afsnitte het verskillende tekens.
   e) $y = a(x + p)^2 + q$ as $a < 0$, $p < 0$, $q > 0$ en een wortel is nul.
   f) $y = a(x + p)^2 + q$ as $a > 0$, $p = 0$, $b^2 - 4ac > 0$.

Oplossing:

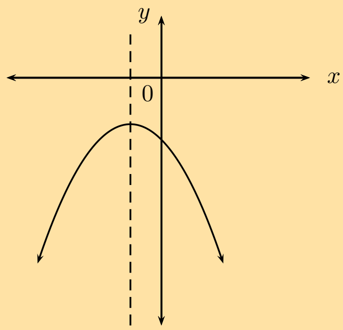
a)



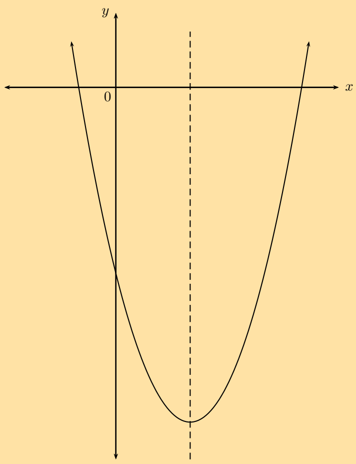
b)



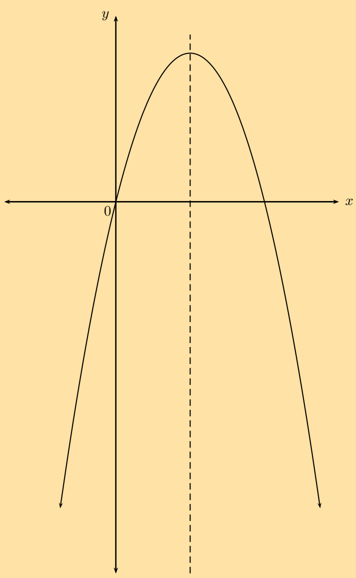
c)



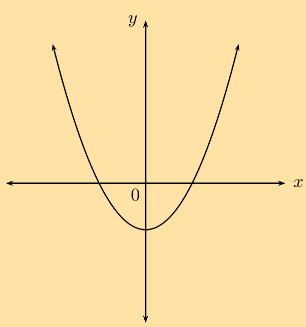
d)



e)



f)



4. Bepaal die nuwe vergelyking (in die vorm $y = ax^2 + bx + c$) as:

a) $y = 2x^2 + 4x + 2$ met 3 eenhede links geskuif word.

b) $y = -(x+1)^2$ met 1 eenheid opgeskuif word.

c) $y = 3(x-1)^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ met 2 eenhede regs geskuif word.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x + 2 \\ x &\Rightarrow x + 3 \\ y_{\text{geskuif}} &= 2(x+3)^2 + 4(x+3) + 2 \\ &= 2(x^2 + 6x + 9) + 4x + 12 + 2 \\ &= 2x^2 + 12x + 18 + 4x + 12 + 2 \\ &= 2x^2 + 16x + 32 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 + 4x + 2 \\ y &\Rightarrow y - 1 \\ y_{\text{geskuif}} &= -(x+1)^2 + 1 \\ &= -(x^2 + 2x + 1) + 1 \\ &= -x^2 - 2x - 1 + 1 \\ &= -x^2 - 2x \end{aligned}$$

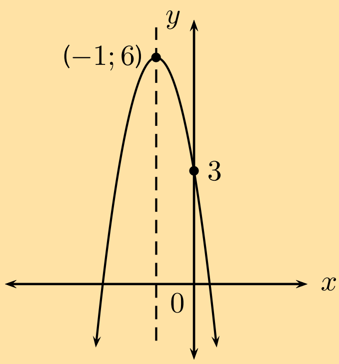
c)

$$\begin{aligned} y &= 3(x-1)^2 + 2\left(x - \frac{1}{2}\right) \\ x &\Rightarrow x - 2 \\ y_{\text{geskuif}} &= 3(x-2-1)^2 + 2\left(x - 2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 3(x-3)^2 + 2\left(x - \frac{5}{2}\right) \\ &= 3(x^2 - 6x + 9) + 2x - 5 \\ &= 3x^2 - 18x + 27 + 2x - 5 \\ &= 3x^2 - 16x + 22 \end{aligned}$$

Oefening 5 – 7: Vind die vergelyking

Bepaal die vergelykings van die volgende grafieke. Skryf jou antwoorde in die vorm $y = a(x+p)^2 + q$.

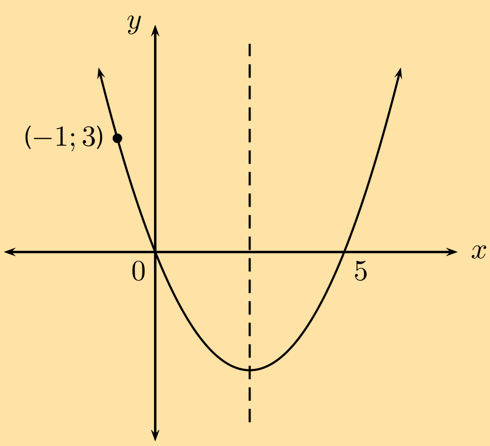
1.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= a(x+p)^2 + q \\
\text{Substitueer } (-1;6) & \\
y &= a(x+1)^2 + 6 \\
&= ax^2 + 2ax + a + 6 \\
y - \text{afsnit: } &= (0;3) \\
3 &= 0 + 0 + a + 6 \\
\therefore 3 &= a + 6 \\
a &= -3 \\
y = -3(x+1)^2 + 6 &\text{ of } y = -3x^2 - 6x + 3
\end{aligned}
$$

2.



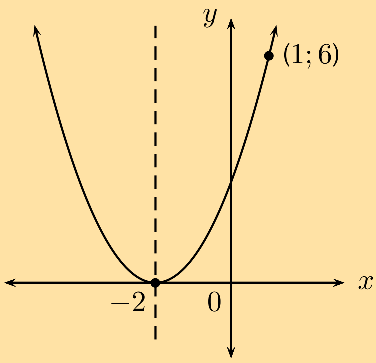
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= a(x+p)^2 + q \\
y &= a(x-0)(x-5) \\
&= ax^2 - 5ax
\end{aligned}
$$

Substitueer $(-1;3)$

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 - 5ax \\
3 &= a(-1)^2 - 5a(-1) \\
3 &= a + 5a \\
3 &= 6a \\
\therefore a &= \frac{1}{2} \\
\therefore y &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x
\end{aligned}
$$

3.



Oplossing:

$$
y = a(x+p)^2 + q
$$

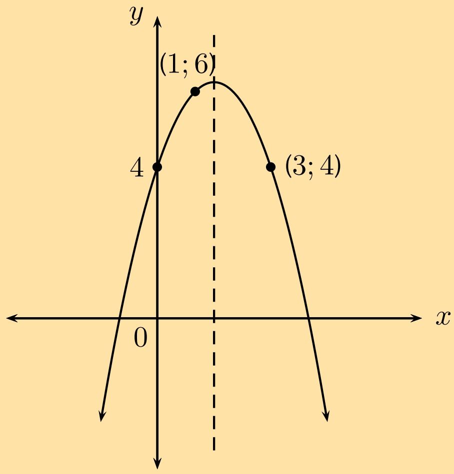
Substitueer $= (-2;0)$

$$
\begin{aligned}
y &= a(x+2)^2 \\
&= ax^2 + 4ax + 4a
\end{aligned}
$$

Substitueer $(1;6)$

$$
\begin{aligned}
6 &= a + 4a + 4a \\
6 &= 9a \\
\therefore a &= \frac{2}{3} \\
\therefore y &= \frac{2}{3}(x+2)^2
\end{aligned}
$$

4.



Oplossing:

$$\begin{aligned}
& y = ax^2 + bx + c \\
& y = ax^2 + bx + 4 \\
\text{Substitueer } (1;6): \quad & 6 = a + b + 4 \ldots (1) \\
\text{Vergelyking } (1) \times 5: \quad & 30 = 5a + 5b + 20 \ldots (3) \\
\text{Substitueer } (1;6): \quad & -6 = 25a + 5b + 4 \ldots (2) \\
(2) - (3) \quad & -36 = 20a - 16 \\
& 20a = -20 \\
& a = -1 \\
& b = 3 \\
& c = 4 \\
& \therefore y = -x^2 + 3x + 4
\end{aligned}$$

5.2 Gemiddelde gradiënt

Oefening 5 – 8:

1. a) Bepaal die gemiddelde gradiënt van die kromme $f(x) = x(x+3)$ tussen $x = 5$ en $x = 3$.

   b) Sê vervolgens wat jy kan aflei oor die funksie f tussen $x = 5$ en $x = 3$.

   Oplossing:

   a) 11

   b)

2. $A(1;3)$ is 'n punt op $f(x) = 3x^2$.

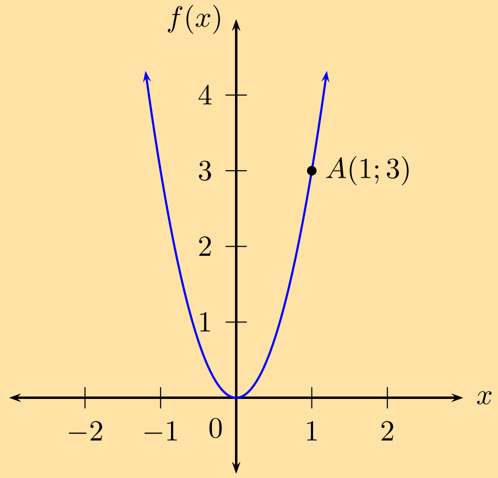
   a) Teken 'n skets van $f(x)$ en benoem punt A.

   b) Bepaal die gradiënt van die kromme by die punt A.

c) Bepaal die vergelyking van die raaklyn by A.

Oplossing:

a)



b) 6

c) $y = 6x - 3$

3. Gegee: $g(x) = -x^2 + 1$.

a) Teken 'n skets van $g(x)$.

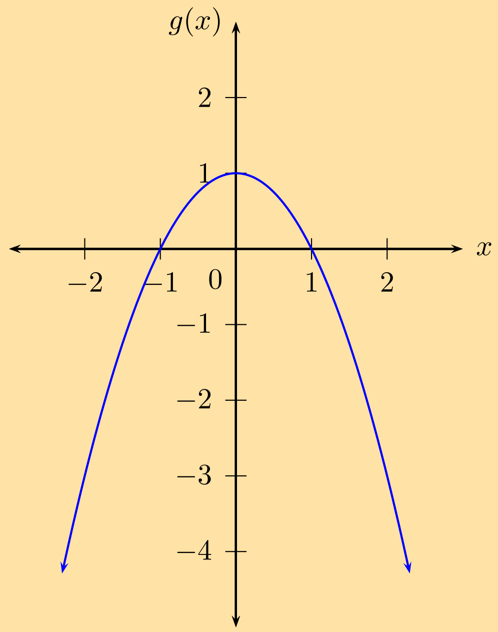
b) Bepaal die gemiddelde gradiënt van die kromme tussen $x = -2$ en $x = 1$.

c) Bepaal die gradiënt van g by $x = 2$.

d) Bepaal die gradiënt van g by $x = 0$.

Oplossing:

a)



b) 1

c) 4

d) 0

5.3 Hiperboliese funksies

Hersiening

Funksies van die vorm $y = \frac{a}{x} + q$

Oefening 5 – 9: Hersiening

1. Beskou die volgende hiperboliese funksies:

   - $y_1 = \frac{1}{x}$
   - $y_2 = -\frac{4}{x}$
   - $y_3 = \frac{4}{x} - 2$
   - $y_4 = -\frac{4}{x} + 1$

   Voltooi die tabel om die eienskappe van die hiperboliese funksie op te som:

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$			
effek van q	geen vertikale skuif			
waarde van a	$a = 1$			
effek van a	lê in kwadrant I en III			
asimptote	y-as, $x = 0$ x-as, $y = 0$			
simmetrie-asse	$y = x$ $y = -x$			
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$			
terrein	$\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$			

Oplossing:

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$	$q = 0$	$q = -2$	$q = 1$
uitwerking van q	geen vertikale skuif	geen vertikale skuif	skuif 2 eenhede afwaarts	skuif 1 eenheid opwaarts
waarde van a	$a = 1$	$a = -1$	$a = 4$	$a = -4$
uitwerking van a	lê in kwadrant I en III	lê in kwadrant II en IV	lê in kwadrant I en III	lê in kwadrant II en IV
asimptote	y-as, $x = 0$ x-as, $y = 0$	y-as, $x = 0$ x-as, $y = 0$	y-as, $x = 0$ $y = -2$	y-as, $x = 0$ $y = 1$
simmetrie-asse	$y = x$ $y = -x$	$y = x$ $y = -x$	$y = x - 2$ $y = -x - 2$	$y = x + 1$ $y = -x + 1$
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$
terrein	$\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$	$\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$	$\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq -2\}$	$\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 1\}$

Ontdek die eienskappe

Oefening 5 – 10: Gebied en terrein

Bepaal die gebied en terrein vir elk van die volgende funksies:

1. $y = \frac{1}{x} + 1$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 1\} \end{aligned}$$

2. $g(x) = \frac{8}{x-8} + 4$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 8\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 4\} \end{aligned}$$

3. $y = -\frac{4}{x+1} - 3$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \in \mathbb{R}, y \neq -3\} \end{aligned}$$

4. $x = \frac{2}{3-y} + 5$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{3-y} + 5 \\ x - 5 &= \frac{2}{3-y} \\ (x-5)(3-y) &= 2 \\ 3 - y &= \frac{2}{3x-5} \\ -y &= \frac{2}{x-5} - 3 \\ \therefore y &= -\frac{2}{x-5} + 3 \\ \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 5\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 3\} \end{aligned}$$

5. $(y-2)(x+2)=3$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(y-2)(x+2)&=3\\ y-2&=\frac{3}{x+2}\\ \therefore y&=\frac{3}{x+2}+2\\ \text{Gebied: }&\{x: x\in\mathbb{R}, x\neq -2\}\\ \text{Terrein: }&\{y: y\in\mathbb{R}, y\neq 2\}\end{aligned}$$

Oefening 5 – 11: Afsnitte

Bepaal die x- en y-afsnitte vir elk van die volgende funksies:

1. $f(x)=\frac{1}{x+4}-2$

Oplossing:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{x+4}-2\\ \text{Laat } x&=0\\ f(0)&=\frac{1}{4}-2\\ \therefore y_{\text{afsnit}}&=(0;-1\frac{3}{4})\\ \text{Laat } y&=0\\ 0&=\frac{1}{x+4}-2\\ 2&=\frac{1}{x+4}\\ 2(x+4)&=1\\ 2x+8&=1\\ 2x&=-7\\ \therefore x&=-\frac{7}{2}\\ \therefore x_{\text{afsnit}}&=\left(-3\frac{1}{2};0\right)\end{aligned}$$

2. $g(x)=-\frac{5}{x}+2$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= -\frac{5}{x} + 2 \\
\text{Laat } x &= 0 \\
\therefore g(x) &\text{is ongedefiniëer} \\
\therefore \text{ geen } x &- \text{afsnitte} \\
\text{Laat } y &= 0 \\
0 &= -\frac{5}{x} + 2 \\
-2 &= -\frac{5}{x} \\
2x &= 5 \\
\therefore x &= \frac{5}{2} \\
\therefore x_{\text{afsnit}} &= \left(\frac{5}{2}; 0\right)
\end{aligned}
$$

3. $j(x) = \frac{2}{x-1} + 3$

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
j(x) &= \frac{2}{x-1} + 3 \\
\text{Laat } x &= 0 \\
j(0) &= \frac{2}{-1} + 3 \\
&= 1 \\
\therefore y_{\text{afsnit}} &= (0; 1) \\
\text{Laat } y &= 0 \\
0 &= \frac{2}{x-1} + 3 \\
-3 &= \frac{2}{x-1} \\
-3(x-1) &= 2 \\
-3x + 3 &= 2 \\
-3x &= -1 \\
\therefore x &= \frac{1}{3} \\
\therefore x_{\text{afsnit}} &= \left(\frac{1}{3}; 0\right)
\end{aligned}
$$

4. $h(x) = \frac{3}{6-x} + 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
h(x) &= \frac{3}{6-x} + 1 \\
\text{Laat } x &= 0 \\
h(0) &= \frac{3}{6} + 1 \\
&= \frac{3}{2} \\
\therefore y_{\text{afsnit}} &= \left(0; \frac{3}{2}\right) \\
\text{Laat } y &= 0 \\
0 &= \frac{3}{6-x} + 1 \\
-1 &= \frac{3}{6-x} \\
-(6-x) &= 3 \\
-6 + x &= 3 \\
-3x &= -1 \\
\therefore x &= \frac{1}{3} \\
\therefore x_{\text{afsnit}} &= \left(\frac{1}{3}; 0\right)
\end{aligned}$$

5. $k(x) = \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
k(x) &= \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2} \\
\text{Laat } x &= 0 \\
k(0) &= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 2 \\
\therefore y_{\text{afsnit}} &= (0; 2) \\
\text{Laat } y &= 0 \\
0 &= \frac{5}{x+2} - \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} &= \frac{5}{x+2} \\
x + 2 &= 5(2) \\
x &= 10 - 2 \\
\therefore x &= 8 \\
\therefore x_{\text{afsnit}} &= (8; 0)
\end{aligned}$$

Oefening 5 – 12: Asimptote

Bepaal die asimptote vir elk van die volgende funksies:

1. $y = \frac{1}{x+4} - 2$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} \text{vertikale asimptoot: } y &= -2 \\ \text{horisontale asimptoot: } x &= -4 \end{aligned}$$

2. $y = -\frac{5}{x}$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} \text{vertikale asimptoot: } y &= 0 \\ \text{horisontale asimptoot: } x &= 0 \end{aligned}$$

3. $y = \frac{3}{2-x} + 1$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2-x} + 1 \\ &= \frac{3}{-(x-2)} + 1 \\ &= -\frac{3}{x-2} + 1 \end{aligned}$$

   $$\begin{aligned} \text{vertikale asimptoot: } y &= 1 \\ \text{horisontale asimptoot: } x &= 2 \end{aligned}$$

4. $y = \frac{1}{x} - 8$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} \text{vertikale asimptoot: } y &= -8 \\ \text{horisontale asimptoot: } x &= 0 \end{aligned}$$

5. $y = -\frac{2}{x-2}$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} \text{vertikale asimptoot: } y &= 0 \\ \text{horisontale asimptoot: } x &= 2 \end{aligned}$$

Oefening 5 – 13: Asse van simmetrie

1. Voltooi die volgende vir $f(x)$ en $g(x)$:

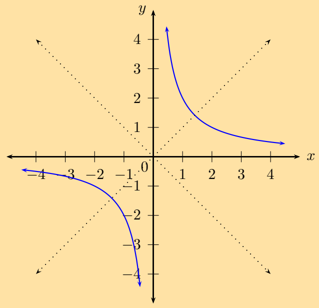
   - Skets die grafiek.
   - Bepaal $(-p; q)$.
   - Vind die asse van simmetrie.

   Vergelyk $f(x)$ en $g(x)$ asook hulle asse van simmetrie. Wat let jy op?

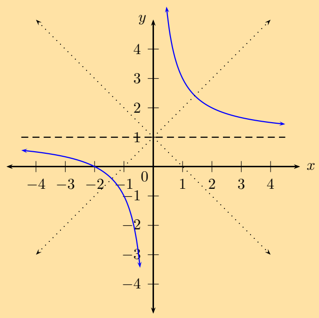
   a) $f(x) = \frac{2}{x}$
      $g(x) = \frac{2}{x} + 1$
   b) $f(x) = -\frac{3}{x}$
      $g(x) = -\frac{3}{x+1}$
   c) $f(x) = \frac{5}{x}$
      $g(x) = \frac{5}{x-1} - 1$

Oplossing:

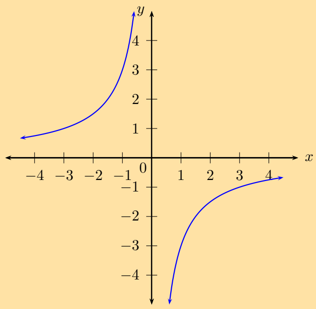
a)



$$(-p; q) = (0; 0)$$
$$y_1 = x$$
$$\therefore y_2 = -x$$

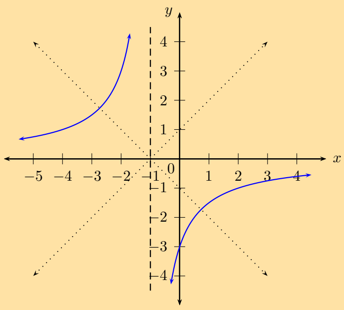


$$(-p;q) = (0;1)$$
$$\text{Laat } y_1 = x + c_1$$
$$\text{Substitueer } (0;1) \qquad 1 = 0 + c_1$$
$$\therefore c_1 = 1$$
$$\therefore y_1 = x + 1$$
$$\text{Laat } y_2 = -x + c_2$$
$$\text{Substitueer } (0;1) \qquad 1 = 0 + c_2$$
$$\therefore c_2 = 1$$
$$\therefore y_2 = -x + 1$$

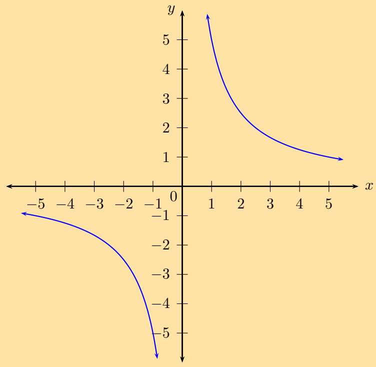


b)

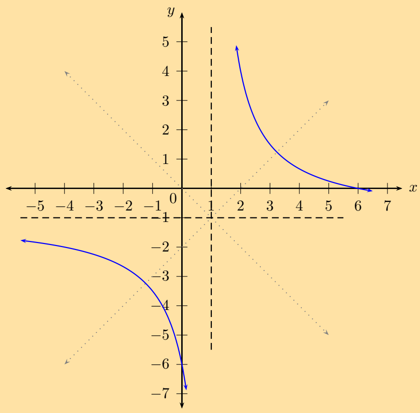
$$(-p;q) = (0;0)$$
$$y_1 = x$$
$$\therefore y_2 = -x$$



$$(-p;q) = (-1;0)$$
$$\text{Laat } y_1 = x + c_1$$
$$\text{Substitueer } (-1;0) \qquad 0 = -1 + c_1$$
$$\therefore c_1 = 1$$
$$\therefore y_1 = x + 1$$
$$\text{Laat } y_2 = -x + c_2$$
$$\text{Substitueer } (-1;0) \qquad 0 = -(-1) + c_2$$
$$\therefore c_2 = -1$$
$$\therefore y_2 = -x - 1$$

c) 

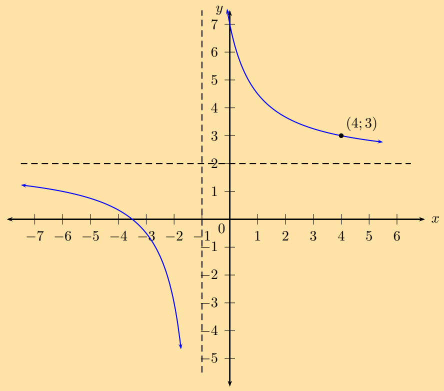
$$(-p;q) = (0;0)$$
$$y_1 = x$$
$$\therefore y_2 = -x$$



$$\begin{aligned} (-p;q) &= (1;-1) \\ \text{Laat } y_1 &= x + c_1 \\ \text{Substitueer } (1;-1) \qquad -1 &= 1 + c_1 \\ \therefore c_1 &= -2 \\ \therefore y_1 &= x - 2 \\ \text{Laat } y_2 &= -x + c_2 \\ \text{Substitueer } (1;-1) \qquad -1 &= -(1) + c_2 \\ \therefore c_2 &= 0 \\ \therefore y_2 &= -x \end{aligned}$$

2. 'n Hiperbool van die vorm $k(x) = \frac{a}{x+p} + q$ gaan deur die punt $(4;3)$. As die asse van simmetrie sny by $(-1;2)$, bepaal die vergelyking van $k(x)$.

Oplossing:



$$
\begin{aligned}
\text{Gegee } k(x) &= \frac{a}{x+p} + q \\
\text{en } (-p; q) &= (-1; -2) \\
\therefore &= \frac{a}{x+1} + 2 \\
\text{Substitueer } (4; 3) \qquad 3 &= \frac{a}{4+1} + 2 \\
3 - 2 &= \frac{a}{5} \\
\therefore 1(5) &= a \\
\therefore a &= 5 \\
\therefore k(x) &= \frac{5}{x+1} + 2
\end{aligned}
$$

Skets die grafiek van die vorm $f(x) = \frac{a}{x+p} + q$

Oefening 5 – 14: Skets grafieke

1. Trek die grafieke van die volgende funksies en dui aan:

   - die asimptote
   - die as-afsnitte, waar van toepassing
   - die asse van simmetrie
   - die gebied en terrein

   a) $y = \frac{1}{x} + 2$

   b) $y = \frac{1}{x+4} - 2$

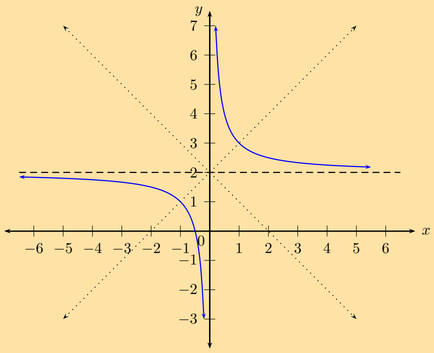
   c) $y = -\frac{1}{x+1} + 3$

   d) $y = -\frac{5}{x-2\frac{1}{2}} - 2$

   e) $y = \frac{8}{x-8} + 4$

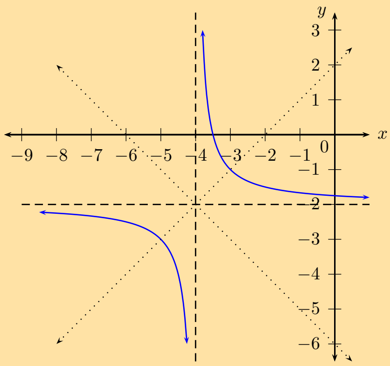
   Oplossing:

a)



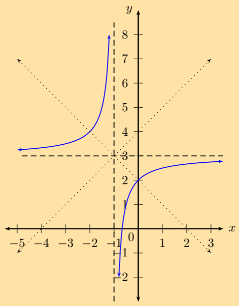
asimptoot: $x = 0; y = 2$
afsnitte: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$
symmetrie-asse : $y = x + 2$ en $y = -x + 2$
gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$
terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 2\}$

b)



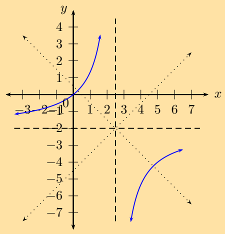
asimptote: $x = -4; y = -2$
afsnitte: $\left(-3\frac{1}{2}; 0\right)$ en $\left(0; -1\frac{3}{4}\right)$
simmetrie-asse : $y = x + 2$ en $y = -x - 6$
gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -4\}$
terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq -2\}$

c)



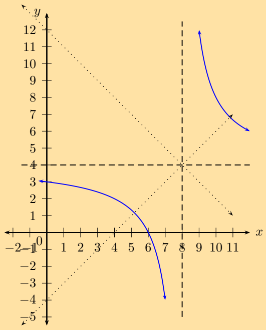
asimptote: $x = -1; y = 3$
afsnitte: $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$ en $(0; 2)$
simmetrie-asse : $y = x + 4$ en $y = -x + 2$
gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -1\}$
terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 3\}$

d)



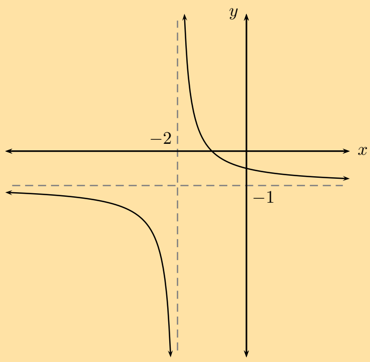
asimptote: $x = -2\frac{1}{2}; y = -2$
afsnitte: $(0;0)$
simmetrie-asse : $y = x - 4\frac{1}{2}$ en $y = -x + \frac{1}{2}$
gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq -4\}$
terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq -2\}$

e)



asimptote: $x = 8; y = 4$
afsnitte: $(6;0)$ en $(0;3)$
simmetrie-asse : $y = x - 4$ en $y = -x + 12$
gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq 8\}$
terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \neq 4\}$

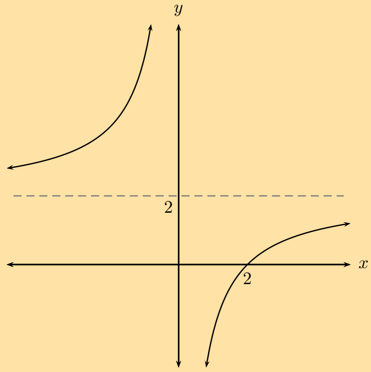
2. Gegee die grafiek van die hiperbool van die vorm $y = \frac{1}{x+p} + q$, bepaal die waardes van p en q.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{x+p} + q \\
\text{Vanaf die grafiek} \quad p &= 2 \\
q &= -1 \\
\therefore y &= \frac{1}{x+2} - 1
\end{aligned}
$$

3. Gegee 'n skets van die funksie van die vorm $y = \frac{a}{x+p} + q$, bepaal die waardes van a, p en q.



Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x+p} + q \\ \text{Vanaf die grafiek} \quad p &= 0 \\ q &= 2 \\ \therefore y &= \frac{a}{x} + 2 \\ \text{Substitueer } (2;0) \quad 0 &= \frac{a}{2} + 2 \\ -2 &= \frac{a}{2} \\ -2(2) &= a \\ \therefore a &= -4 \\ y &= -\frac{4}{x} + 2 \end{aligned}$$

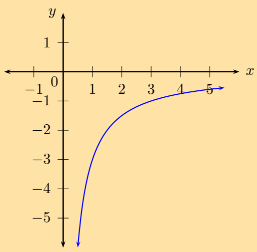
4. a) Teken die grafiek van $f(x) = -\frac{3}{x}$, $x > 0$.

   b) Bepaal die gemiddelde gradiënt van die grafiek tussen $x = 1$ en $x = 3$.

   c) Is die gradiënt by $(\frac{1}{2}; -6)$ minder of meer as die gemiddelde gradiënt tussen $x = 1$ en $x = 3$? Illustreer dit op jou grafiek.

Oplossing:

a)



b)

$$\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt } &= \frac{f(3)-f(1)}{3-1} \\
&= \frac{-\frac{3}{3}-\left(-\frac{3}{1}\right)}{3-1} \\
&= \frac{-1+3}{2} \\
&= \frac{2}{2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Gemiddelde gradiënt tussen $x = 1$ en $x = 3$ is 1.

c)

$$\begin{aligned}
\text{Gemiddelde gradiënt } &= \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} \\
&= \frac{-\frac{3}{a+h}-\left(-\frac{3}{a}\right)}{(a+h)-a} \\
&= \frac{-\frac{3}{a+h}+\frac{3}{a}}{h} \\
&= \frac{\frac{-3(a)+3(a+h)}{a(a+h)}}{h} \\
&= \frac{\frac{-3a+3a+3h}{a^2+ah}}{h} \\
&= \frac{\frac{3h}{a^2+ah}}{h} \\
&= \frac{3h}{a^2+ah} \times \frac{1}{h} \\
&= \frac{3}{a^2+ah} \\
\therefore \text{ By } \left(\frac{1}{2};-6\right) \qquad a &= \frac{1}{2} \\
\therefore \text{ en } \qquad h &= 0 \\
\therefore \text{ Gemiddelde gradiënt } &= \frac{3}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}(0)} \\
&= 3 \times \frac{4}{1} \\
&= 12
\end{aligned}$$

Gemiddelde gradiënt by $(\frac{1}{2}; -6)$ is groter as die gemiddelde gradiënt tussen $x = 1$ en $x = 3$.

5.4 Eksponensiële funksies

Hersiening

Funksies van die vorm $y = ab^x + q$

Oefening 5 – 15: Hersiening

1. Op aparte assestelsels, trek akkurate grafieke van elk van die volgende funksies:

   - Gebruik tabelle indien nodig.
   - Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

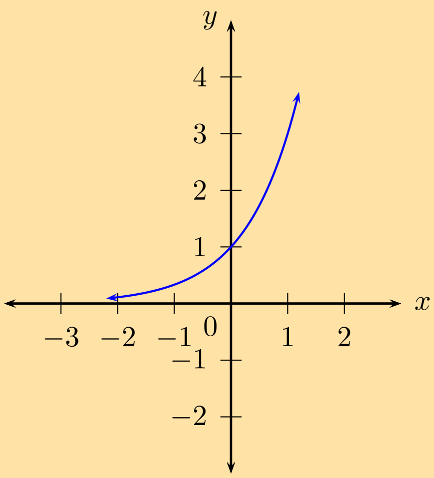
   a) $y_1 = 3^x$

   b) $y_2 = -2 \times 3^x$

   c) $y_3 = 2 \times 3^x + 1$

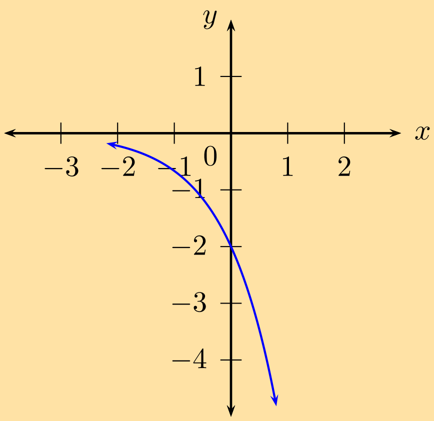
   d) $y_4 = 3^x - 2$

   Oplossing:

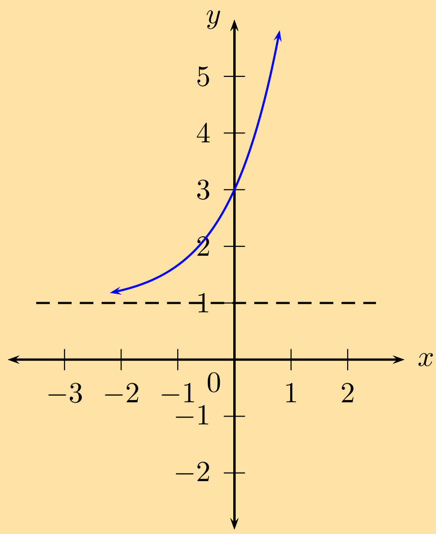


a)

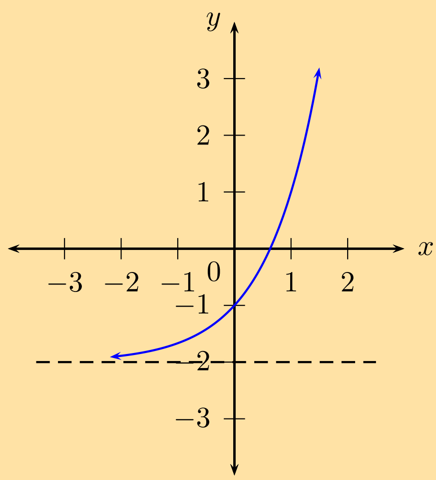
b)



c)



d)



2. Gebruik jou sketsgrafieke van die funksies hierbo om die volgende tabel te voltooi (die eerste kolom is reeds ingevul as 'n voorbeeld):

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$			
effek van q	geen vertikale skuif			
waarde van a	$a = 1$			
effek van a	toenemend			
asimptoot	x-as, $y = 0$			
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$			
terrein	$\{y : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$			

Oplossing:

	y_1	y_2	y_3	y_4
waarde van q	$q = 0$	$q = 0$	$q = 1$	$q = 2$
uitwerking van q	geen vertikale verskuiwing	geen vertikale verskuiwing	skuif 1 eenheid opwaarts	skuif 2 eenhede afwaarts
waarde van a	$a = 1$	$a = -2$	$a = 2$	$a = 1$
uitwerking van a	toenemend	afnemend	toenemend	toenemend
asimptoot	x-as, $y = 0$	x-as, $y = 0$	$y = 1$	$y = -2$
gebied	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$	$\{x : x \in \mathbb{R}\}$
terrein	$\{y : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$	$\{y : y \in \mathbb{R}, y < 0\}$	$\{y : y \in \mathbb{R}, y > 1\}$	$\{y : y \in \mathbb{R}, y > -2\}$

Funksies van die vorm $y = ab^{(x+p)} + q$

Ontdek die eienskappe

Oefening 5 – 16: Gebied en terrein

Gee die gebied en terrein vir elk van die volgende funksies:

1. $y = \left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)}$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y > 0, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

2. $f(x) = -5^{(x-2)} + 1$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y < 1, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

3. $y + 3 = 2^{(x+1)}$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} y + 3 &= 2^{(x+1)} \\ y &= 2^{(x+1)} - 3 \\ \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y > -3, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

4. $y = n + 3^{(x-m)}$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= n + 3^{(x-m)} \\ y &= 3^{(x-m)} + n \\ \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y > n, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

5. $\frac{y}{2} = 3^{(x-1)} - 1$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} &= 3^{(x-1)} - 1 \\ y &= 2 \times 3^{(x-1)} - 2 \\ \text{Gebied: } & \{x : x \in \mathbb{R}\} \\ \text{Terrein: } & \{y : y > 2, y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Oefening 5 – 17: Afsnitte

Bepaal die x- en y-afsnitte vir elk van die volgende funksies:

1. $f(x) = 2^{(x+1)} - 8$

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Vir } x = 0 \quad y &= 2^{(0+1)} - 8 \\ &= 2 - 8 \\ &= -6 \\ &\therefore (0; -6) \\ \text{Vir } y = 0 \quad 0 &= 2^{(x+1)} - 8 \\ 2^3 &= 2^{(x+1)} \\ \therefore 3 &= x + 1 \\ \therefore 2 &= x \\ &\therefore (2; 0) \end{aligned}$$

2. $y = 2 \times 3^{(x-1)} - 18$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{Vir } x = 0 \quad y &= 2 \times 3^{(0-1)} - 18 \\
&= \frac{2}{3} - 18 \\
&= -17\frac{1}{3} \\
&\therefore (0; -17\frac{1}{3}) \\
\text{Vir } y = 0 \quad 0 &= 2 \times 3^{(x-1)} - 18 \\
18 &= 2 \times 3^{(x-1)} \\
9 &= 3^{(x-1)} \\
3^2 &= 3^{(x-1)} \\
\therefore 2 &= x - 1 \\
\therefore 3 &= x \\
&\therefore (3; 0)
\end{aligned}$$

3. $y + 5^{(x+2)} = 5$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
y + 5^{(x+2)} &= 5 \\
y &= -5^{(x+2)} + 5 \\
\text{Vir } x = 0 \quad y &= -5^{(0+2)} + 5 \\
&= -25 + 5 \\
&= -20 \\
&\therefore (0; -20) \\
\text{Vir } y = 0 \quad 0 &= -5^{(x+2)} + 5 \\
5^{(x+2)} &= 5 \\
\therefore x + 2 &= 1 \\
\therefore x &= -1 \\
&\therefore (-1; 0)
\end{aligned}$$

4. $y = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)} - 0{,}75$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)} - 0{,}75 \\
y &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)} - \frac{3}{4} \\
\text{Vir } x = 0 \quad y &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{(0+3)} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{3} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{27}{8}\right) - \frac{3}{4} \\
&= \frac{27}{16} - \frac{3}{4} \\
&= \frac{15}{16} \\
&\therefore (0; \frac{15}{16}) \\
\text{Vir } y = 0 \quad 0 &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)} - \frac{3}{4} \\
\frac{3}{4} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)} \\
\frac{3}{2} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{(x+3)} \\
\therefore 1 &= x + 3 \\
\therefore -2 &= x \\
&\therefore (-2; 0)
\end{aligned}$$

Oefening 5 – 18: Asimptoot

Gee die asimptoot vir elk van die volgende funksies:

1. $y = -5^{(x+1)}$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} & y = -5^{(x+1)} \\ \text{horisontale asimptoot:} \quad & y = 0 \end{aligned}$$

2. $y = 3^{(x-2)} + 1$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned} & y = 3^{(x-2)} + 1 \\ \text{horisontale asimptoot:} \quad & y = 1 \end{aligned}$$

3. $\left(\frac{3y}{2}\right) = 5^{(x+3)} - 1$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \left(\frac{3y}{2}\right) &= 5^{(x+3)} - 1 \\ 3y &= 2 \times 5^{(x+3)} - 2 \\ y &= \frac{2}{3} \times 5^{(x+3)} - \frac{2}{3} \\ \text{horisontale asimptoot:} \quad y &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

4. $y = 7^{(x+1)} - 2$

Oplossing:

$$\begin{aligned} y &= 7^{(x+1)} - 2 \\ \text{horisontale asimptoot:} \quad y &= -2 \end{aligned}$$

5. $\frac{y}{2} + 1 = 3^{(x+2)}$

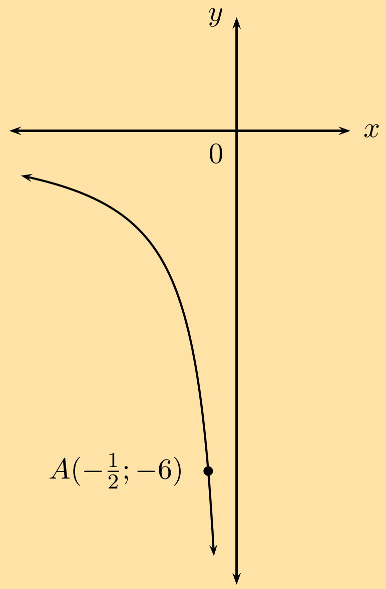
Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{y}{2} + 1 &= 3^{(x+2)} \\ \frac{y}{2} &= 3^{(x+2)} - 1 \\ y &= 2 \times 3^{(x+2)} - 2 \\ \text{horisontale asimptoot:} \quad y &= -2 \end{aligned}$$

Skets die grafiek van die vorm $f(x) = ab^{(x+p)} + q$

Oefening 5 – 19: Gemengde oefeninge

1. Gegee die grafiek van die hiperbool van die vorm $h(x) = \frac{k}{x}$, $x < 0$, wat gaan deur die punt $A(-\frac{1}{2}; -6)$.



a) Wys dat $k = 3$.

b) Skryf die vergelyking neer van die nuwe funksie wat gevorm word as $h(x)$:

i. 3 eenhede vertikaal opwaarts skuif

ii. 3 eenhede regs skuif

iii. reflekteer rondom die y-as

iv. so skuif dat die asimptote $x = 0$ en $y = -\frac{1}{4}$ sal wees

v. opwaarts skuif om deur die punt $(-1; 1)$ te gaan

vi. 2 eenhede links en 1 eenheid vertikaal afwaarts skuif (vir $x < 0$)

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} y &= \frac{k}{x} \\ \text{Substitueer } (-\frac{1}{2}; -6) \qquad -6 &= \frac{k}{-\frac{1}{2}} \\ -6 \times -\frac{1}{2} &= k \\ \therefore k &= 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{3}{x} \end{aligned}$$

b) i.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3}{x} \\ \therefore y &\Rightarrow y - 3 \\ y - 3 &= \frac{3}{x} \\ y &= \frac{3}{x} + 3 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3}{x} \\ \therefore x &\Rightarrow x - 3 \\ y &= \frac{3}{x - 3} \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3}{x} \\ \therefore x &\Rightarrow -x \\ y &= \frac{3}{x-3} \end{aligned}$$

iv.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3}{x} \\ \therefore p = 0 \text{ en } q &= -\frac{1}{4} \\ y &= \frac{3}{x} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

v.

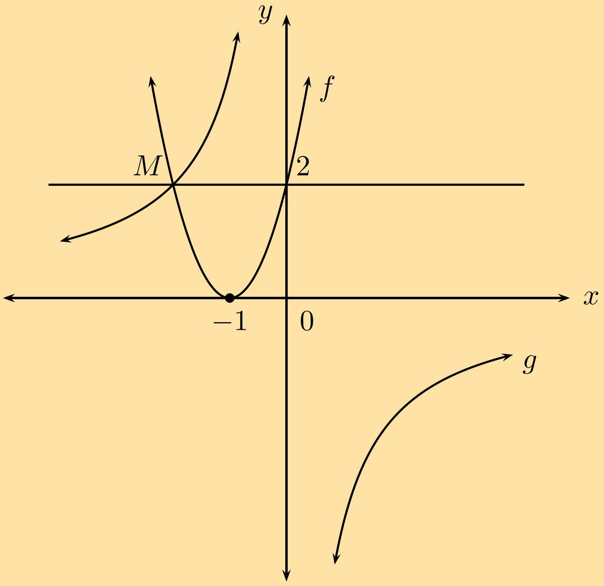
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3}{x} \\ \therefore y &\Rightarrow y + m \\ y &= \frac{3}{x} + m \\ \text{Substitueer } (-1;1) \qquad 1 &= \frac{3}{-1} + m \\ 1 + 3 &= +m \\ \therefore m &= 4 \\ \therefore y &= \frac{3}{x} + 4 \end{aligned}$$

vi.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{3}{x} \\ \therefore x &\Rightarrow x + 2 \\ \therefore y &\Rightarrow y + 1 \\ y + 1 &= \frac{3}{x+2} \\ \therefore y &= \frac{3}{x+2} - 1 \end{aligned}$$

2. Gegee die grafieke van $f(x) = a(x+p)^2$ en $g(x) = \frac{a}{x}$.

   Die as van simmetrie vir $f(x)$ is $x = -1$ en $f(x)$ en $g(x)$ sny by punt M. Die lyn $y = 2$ gaan ook deur M.



Bepaal:

a) die koördinate van M

b) die vergelyking van $g(x)$

c) die vergelyking van $f(x)$

d) die waardes waarvoor $f(x) < g(x)$

e) die terrein van $f(x)$

Oplossing:

a) $f(x)$ is simmetries om die lyn $x = -1$, dus $M(-2; 2)$.

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{a}{x} \\ \text{Substitueer } M(-2;2) \qquad 2 &= \frac{a}{-2} \\ \therefore a &= -4 \\ \therefore g(x) &= \frac{-4}{x} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x+p)^2 + q \\ \text{Geen vertikale skuif } \therefore q &= 0 \\ \text{Simmetrie-as } x = -1 \qquad \therefore f(x) &= a(x+1)^2 \\ \text{Substitueer } M(-2;2) \qquad 2 &= a(-2+1)^2 \\ 2 &= a(-1)^2 \\ \therefore a &= 2 \\ \therefore f(x) &= 2(x+1)^2 \end{aligned}$$

d) $-2 < x < 0$

e) Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$

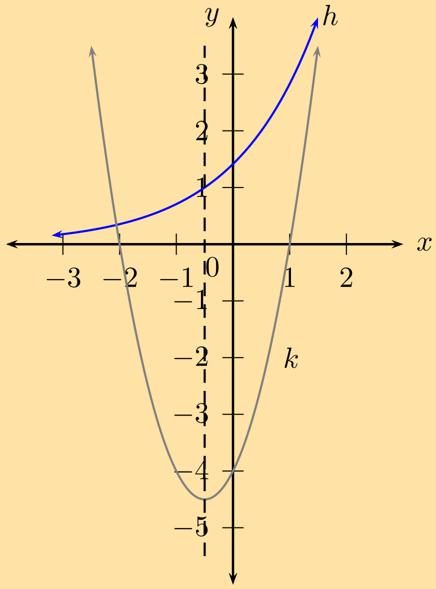
3. Op dieselfde assestelsel, skets:

a) die grafieke van $k(x) = 2(x+\frac{1}{2})^2 - 4\frac{1}{2}$ en $h(x) = 2^{(x+\frac{1}{2})}$. Bepaal alle as-afsnitte, draaipunt(e) en asimptote.

b) die refleksie van $h(x)$ rondom die x-as. Benoem hierdie funksie as $j(x)$.

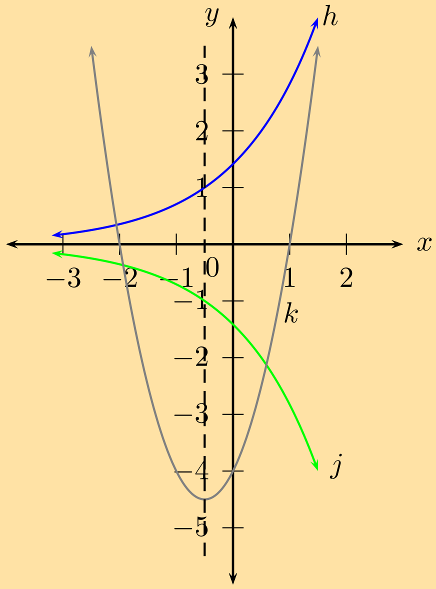
Oplossing:

a)



Vir $k(x)$:
afsnitte: $(-2;0), (1;0)$ en $(0;-4)$
draaipunt: $\left(-\frac{1}{2};-4\frac{1}{2}\right)$
asimptote: geen
Vir $h(x)$:
afsnitte: $(1{,}41;0)$
draaipunt: geen
asimptote: $y=0$

b)



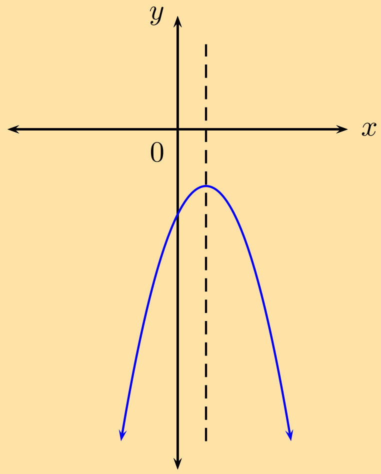
4. Skets die grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ vir:

a) $a < 0$, $b > 0$, $b^2 < 4ac$

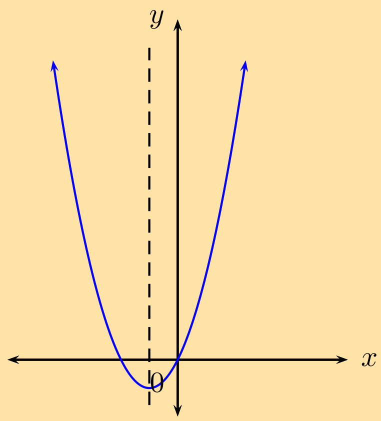
b) $a > 0$, $b > 0$, een wortel $= 0$

Oplossing:

a)



b)



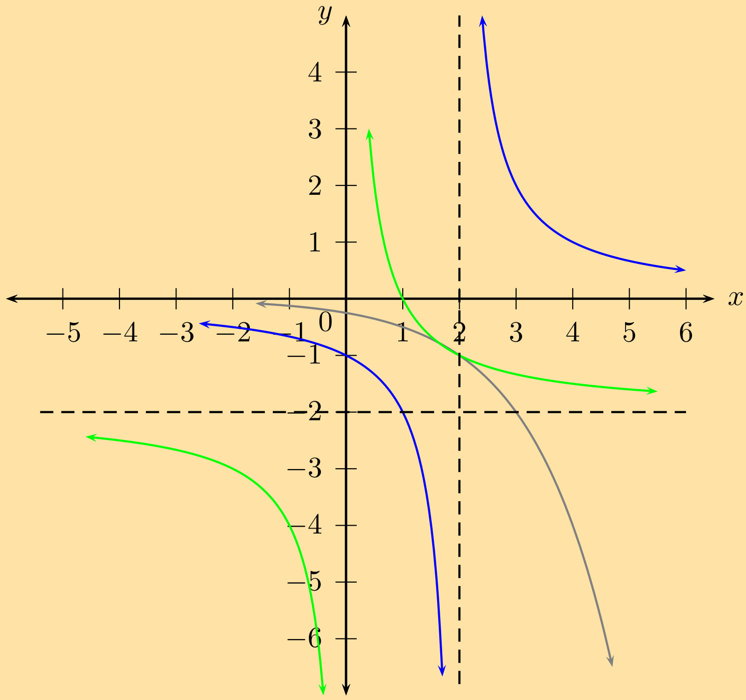
5. Op verskillende stelle asse, teken die grafieke vir:

$y = \frac{2}{x-2}$

$y = \frac{2}{x} - 2$

$y = -2^{(x-2)}$

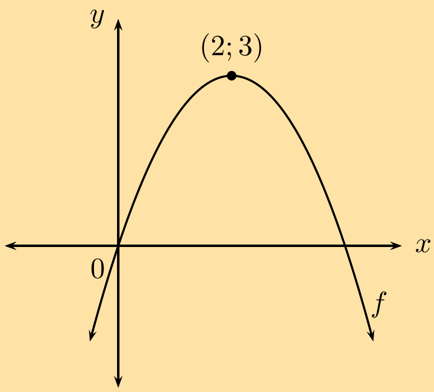
Oplossing:



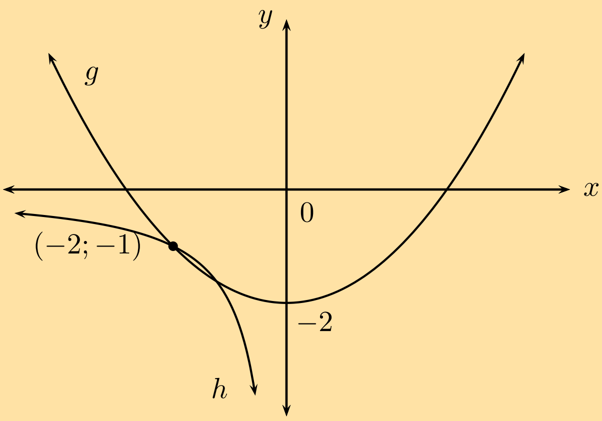
6. Vir die diagramme hieronder, bepaal:

   - die vergelykings van die funksies; $f(x) = a(x+p)^2 + q$, $g(x) = ax^2 + q$, $h(x) = \frac{a}{x}, x < 0$ en $k(x) = b^x + q$
   - die simmetrie-asse van elke funksie
   - die definisiegebied en terrein van elke funksie

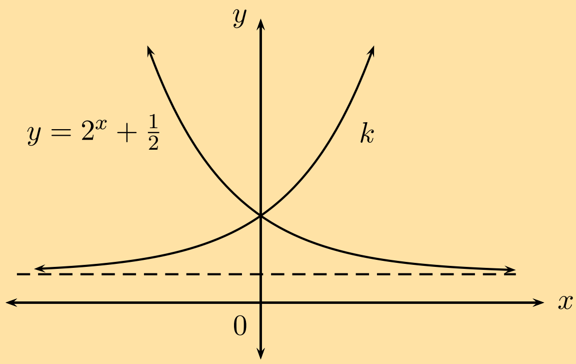
   a)



   b)



c)



Oplossing:

a)

$$f(x) = a(x+p)^2 + q$$

Van die draaipunt: $p = -2$ en $q = 3$

$$\therefore f(x) = a(x-2)^2 + 3$$

Substitueer $(0; 0)$ $\quad 0 = a(0-2)^2 + 3$

$$-3 = 4a$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4}$$

$$f(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^2 + 3$$

simmetrie-asse: $x = 2$

Gebied: $\{x : x \in \mathbb{R}\}$

Terrein: $\{y : y \in \mathbb{R}, y \leq 3\}$

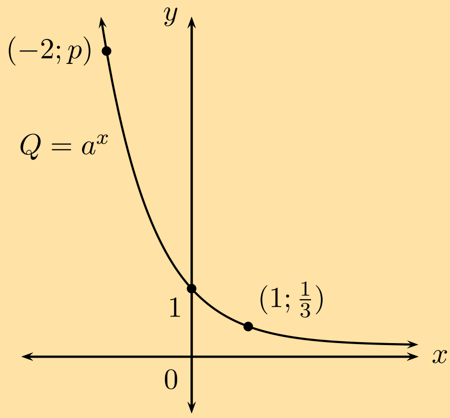
b)

$$\begin{aligned}
g(x) &= ax^2 + q \\
\text{Van die draaipunt: } p = 0 \text{ en } q &= -2 \\
\therefore g(x) &= a(x)^2 - 2 \\
\text{Substitueer } (-2;-1) \qquad -1 &= a(-2)^2 - 2 \\
-1 &= 4a - 2 \\
1 &= 4a - 2 \\
\therefore a &= \frac{1}{4} \\
g(x) &= \frac{1}{4}x^2 - 2 \\
\text{simmetrie-asse: } x &= 0 \\
\text{Gebied: } &\{x : x \in \mathbb{R}\} \\
\text{Terrein: } &\{y : y \in \mathbb{R}, y \geq -2\} \\
h(x) &= \frac{a}{x+p} + q \\
\text{Vanaf die grafiek: } p = 0 \text{ en } q &= 0 \\
h(x) &= \frac{a}{x} \\
\text{Substitueer } (-2;-1) \qquad -1 &= \frac{a}{-2} \\
2 &= a \\
\therefore h(x) &= \frac{2}{x} \\
\text{simmetrie-asse: } y &= x \\
\text{Gebied: } &\{x : x \in \mathbb{R}, x < 0\} \\
\text{Terrein: } &\{y : y \in \mathbb{R}, y < 0\}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
y &= 2^x + \frac{1}{2} \\
\text{Reflekteer rondom: } x &= 0 \\
\therefore x &\Rightarrow -x \\
\therefore k(x) &= 2^{-x} + \frac{1}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{2} \\
\text{Gebied: } &\{x : x \in \mathbb{R}\} \\
\text{Terrein: } &\left\{y : y \in \mathbb{R}, y > \frac{1}{2}\right\}
\end{aligned}$$

7. Gegewe die grafiek van die funksie $Q(x) = a^x$.



a) Wys dat $a = \frac{1}{3}$.

b) Vind die waarde van p as die punt $(-2;p)$ op Q is.

c) Bereken die gemiddelde gradiënt van die kurwe tussen $x = -2$ en $x = 1$.

d) Bepaal die vergelyking van die nuwe funksie wat gevorm word as Q met 2 eenhede vertikaal afwaarts en met 2 eenhede na links geskuif word.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} y &= a^x \\ \text{Substitueer } \left(1;\frac{1}{3}\right) \quad \frac{1}{3} &= a^1 \\ \therefore a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Q(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^x \\ \text{Substitueer } (-2;p)\ p &= \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \\ p &= 9 \end{aligned}$$

c)

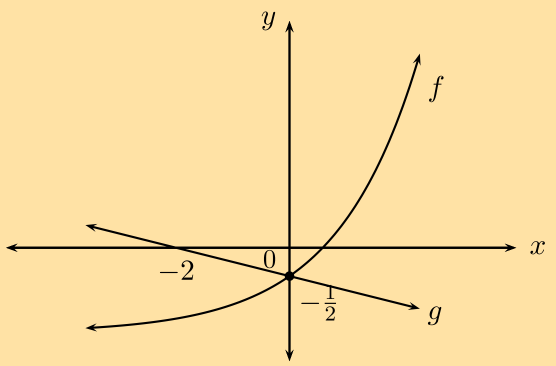
$$\begin{aligned} \text{Gemiddelde gradiënt} &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^1}{-2-(1)} \\ &= \frac{9-\frac{1}{3}}{-3} \\ &= \frac{8\frac{2}{3}}{-3} \\ &= \frac{-26}{9} \\ &= -2\frac{8}{9} \end{aligned}$$

d)

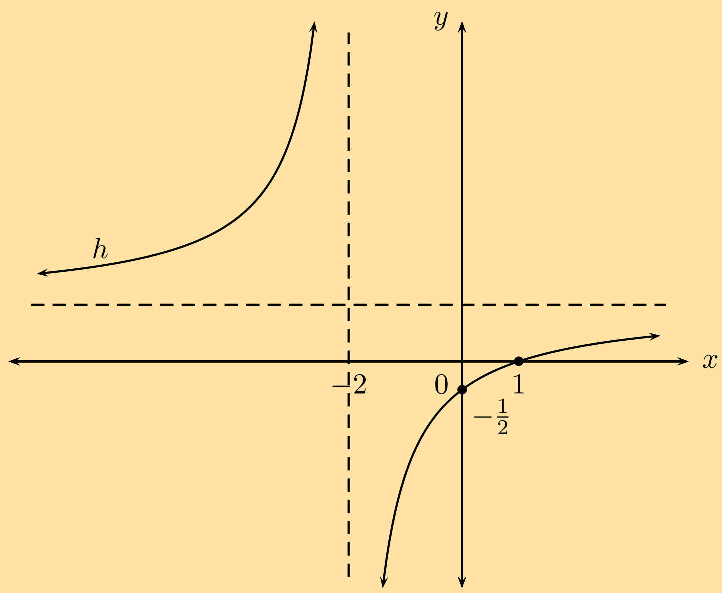
$$
\begin{aligned}
Q(x) &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \\
\therefore x &\Rightarrow x+2 \\
\therefore y &\Rightarrow y+2 \\
y+2 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} \\
y &= \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 2
\end{aligned}
$$

8. Vind die vergelyking van elkeen van die volgende funksies:

a) $f(x) = 2^x + q$
$g(x) = mx + c$



b) $h(x) = \frac{k}{x+p} + q$



Oplossing:

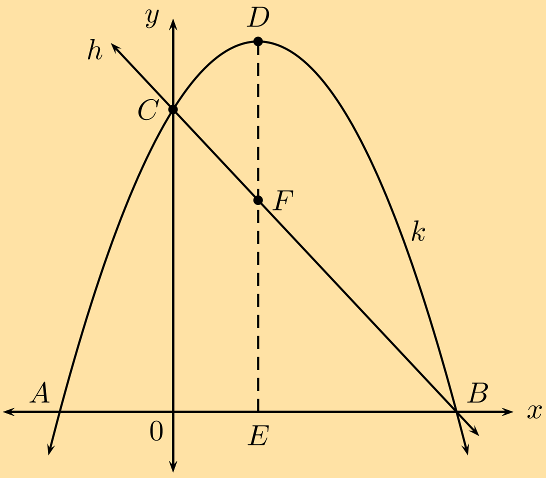
a)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2^x + q \\
\text{Substitueer } (0; -\tfrac{1}{2}) \quad -\frac{1}{2} &= 2^0 + q \\
-\frac{1}{2} &= 1 + q \\
\therefore q &= -\frac{3}{2} \\
\therefore f(x) &= 2^x - \frac{3}{2} \\
g(x) &= mx + c \\
\text{Substitueer } (0; -\tfrac{1}{2}) \quad -\frac{1}{2} &= m(0) + c \\
\therefore c &= -\frac{1}{2} \\
g(x) &= mx - \frac{1}{2} \\
\text{Substitueer } (-2; 0) \quad 0 &= m(-2) - \frac{1}{2} \\
\frac{1}{2} &= -2m \\
\therefore m &= -\frac{1}{4} \\
\therefore g(x) &= -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{k}{x+p} + q \\
\text{Vanaf die grafiek:} \quad p &= -2 \\
h(x) &= \frac{k}{x+2} + q \\
\text{Substitueer } (0; -\tfrac{1}{2}) \quad -\frac{1}{2} &= \frac{k}{2} + q \\
-1 &= k + 2q \ldots (1) \\
\text{Substitueer } (1; 0) \quad 0 &= \frac{k}{1+2} + q \\
0 &= k + 3q \ldots (2) \\
(2) - (1): \quad 1 &= 0 + q \\
\therefore q &= 1 \\
\text{en } k &= -3 \\
\therefore h(x) &= -\frac{3}{x+2} + 1
\end{aligned}
$$

9. Gegewe: die grafiek van $k(x) = -x^2 + 3x + 10$ met die draaipunt by D. Die grafiek van die reguitlyn $h(x) = mx + c$ wat deur punte B en C gaan word ook aangedui.



Bepaal:

a) die lengtes AO, OB, OC en DE
b) die vergelyking van DE
c) die vergelyking van $h(x)$
d) die x-waardes waarvoor $k(x) < 0$
e) die x-waardes waarvoor $k(x) \geq h(x)$
f) die lengte van DF

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
y &= -x^2 + 3x + 10 \\
\text{Laat } y &= 0 \\
0 &= -x^2 + 3x + 10 \\
&= x^2 - 3x - 10 \\
&= (x-5)(x+2) \\
\therefore x = 5 &\text{ of } x = -2 \\
\therefore AO &= 2 \text{ eenhede} \\
\therefore BO &= 5 \text{ eenhede} \\
CO &= 10 \text{ eenhede} \\
\text{simmetrie-asse: } x &= -\frac{5-2}{2} \\
&= \frac{3}{2} \\
\text{Substitueer } x &= \frac{3}{2} \\
y &= -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3\frac{3}{2} + 10 \\
&= 12\frac{1}{4} \\
\therefore DE &= 12{,}25 \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

b) $DE = 12\frac{1}{4}$

c)

$$\begin{aligned}
h(x) &= mx + c \\
h(x) &= mx + 10 \\
\text{Substitueer } (5;0) \qquad 0 &= m(5) + 10 \\
-10 &= 5m \\
\therefore m &= -2 \\
\therefore h(x) &= -2x + 10
\end{aligned}$$

d) $\{x : x \in \mathbb{R}, x < -2 \text{ en } x > 5\}$

e) $\{x : x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 5\}$

f)

$$\begin{aligned}
\text{By } x = \frac{3}{2} k(x) &= 12\frac{1}{4} \\
\text{By } x = \frac{3}{2} h(x) &= -2\left(\frac{3}{2}\right) + 10 \\
&= -3 + 10 \\
&= 7 \\
\therefore DF &= 12\frac{1}{4} - 7 \\
&= 12\frac{1}{4} - 7 \\
&= 5{,}25 \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

5.5 Sinusfunksies

Hersiening

Funksies van die vorm $y = \sin\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

Funksies van die vorm $y = a\sin\theta + q$

Oefening 5 – 20: Hersiening

Teken akkurate grafieke van elkeen van die volgende funksies, vir $0° \leq \theta \leq 360°$, op verskillende assestelsels.

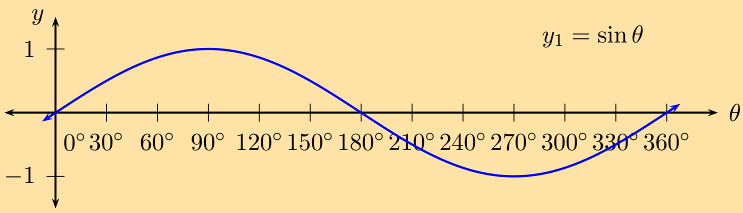
- Gebruik tabelle indien nodig.
- Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

Bepaal ook die volgende vir elke funksie:

- Periode
- Amplitude
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Maksimum en minimum draaipunte

1. $y_1 = \sin\theta$

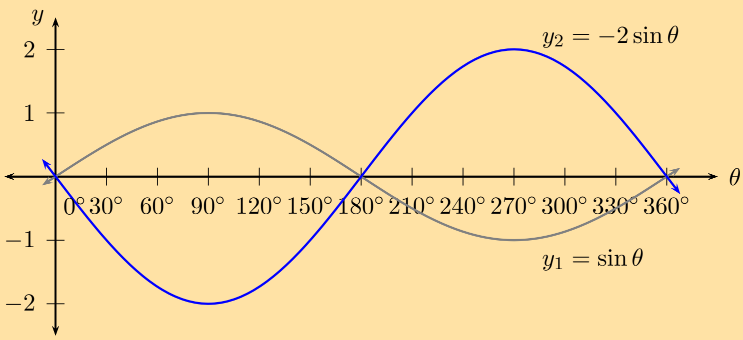
   Oplossing:



$$\begin{aligned}\text{Periode: } & 360^\circ \\ \text{Amplitude: } & 1 \\ \text{Gebied: } & [0^\circ; 360^\circ] \\ \text{Terrein: } & [-1; 1] \\ x\text{-afsnitte: } & (0^\circ; 0); (180^\circ; 0); (360^\circ; 0) \\ y\text{-afsnitte: } & (0^\circ; 0) \\ \text{Maks. draaipunt: } & (90^\circ; 1) \\ \text{Min. draaipunt: } & (270^\circ; -1)\end{aligned}$$

2. $y_2 = -2\sin\theta$

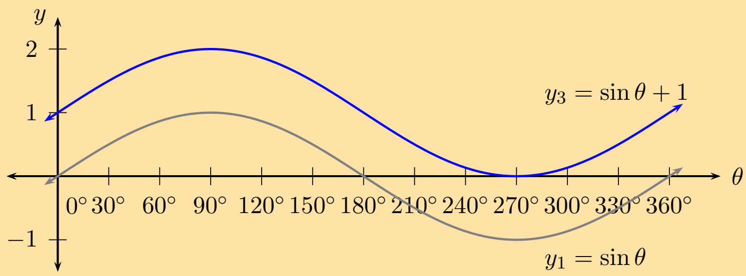
   Oplossing:



Periode: $360°$
Amplitude: 2
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-2; 2]$
x-afsnitte: $(0°; 0); (180°; 0); (360°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
Maks. draaipunt: $(270°; 2)$
Min. draaipunt: $(90°; -2)$

3. $y_3 = \sin\theta + 1$

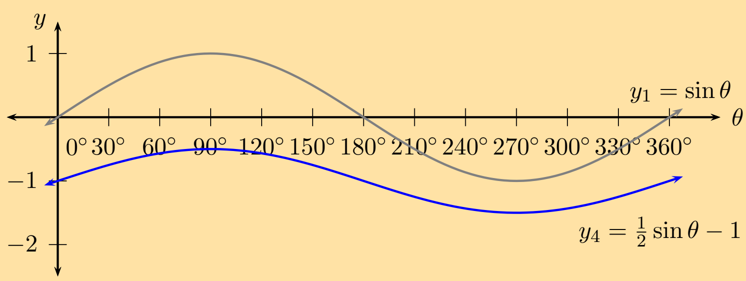
Oplossing:



Periode: $360°$
Amplitude: 1
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[0; 2]$
x-afsnitte: $(270°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 1)$
Maks. draaipunt: $(90°; 2)$
Min. draaipunt: $(270°; 0)$

4. $y_4 = \frac{1}{2}\sin\theta - 1$

Oplossing:



$$\text{Periode: } 360°$$
$$\text{Amplitude: } \frac{1}{2}$$
$$\text{Gebied: } [0°; 360°]$$
$$\text{Terrein: } [-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}]$$
$$x\text{-afsnitte: geen}$$
$$y\text{-afsnitte: } (0°; -\frac{1}{2})$$
$$\text{Maks. draaipunt: } (90°; \frac{1}{2})$$
$$\text{Min. draaipunt: } (270°; -\frac{3}{2})$$

Funksies van die vorm $y = \sin k\theta$

Ontdek die eienskappe

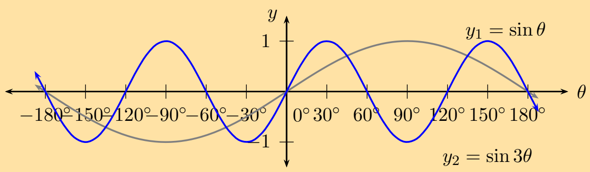
Oefening 5 – 21: Sinusfunksies van die vorm $y = \sin k\theta$

1. Teken die volgende funksies vir $-180° \leq \theta \leq 180°$. Bepaal vir elke grafiek:
   - Periode
   - Amplitude
   - Gebied en terrein
   - x- en y-afsnitte
   - Maksimum en minimum draaipunte

   a) $f(\theta) = \sin 3\theta$
   b) $g(\theta) = \sin \frac{\theta}{3}$
   c) $h(\theta) = \sin(-2\theta)$
   d) $k(\theta) = \sin \frac{3\theta}{4}$

Oplossing:

a)



Vir $f(\theta) = \sin 3\theta$:

Periode: $120°$

Amplitude: 1

Gebied: $[-180°; 180°]$

Terrein: $[-1; 1]$

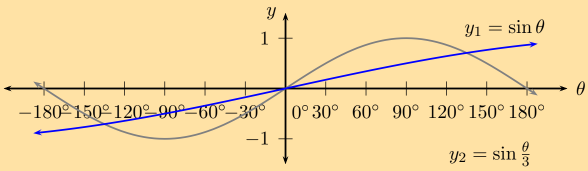
x-afsnitte: $(-180°; 0); (-120°; 0); (-60°; 0);$ $(0°; 0); (60°; 0); (120°; 0); (180°; 0)$

y-afsnitte: $(0°; 0)$

Maks. draaipunt: $(-90°; 1); (30°; 1); (150°; 1)$

Min. draaipunt: $(-150°; -1); (-30°; -1); (90°; -1)$

b)



Vir $g(\theta) = \sin\frac{\theta}{3}$:

Periode: $1080°$

Amplitude: 1

Gebied: $[-180°; 180°]$

Terrein: $[-0{,}87; 0{,}87]$

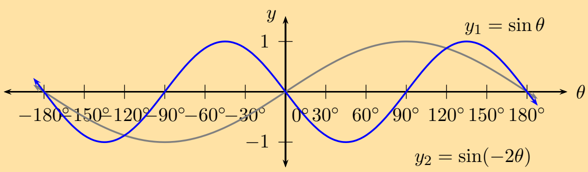
x-afsnitte: geen

y-afsnitte: $(0°; 0)$

Maks. draaipunt: geen

Min. draaipunt: geen

c)



Vir $h(\theta) = \sin(-2\theta)$:

Periode: $180°$

Amplitude: 1

Gebied: $[-180°; 180°]$

Terrein: $[-1; 1]$

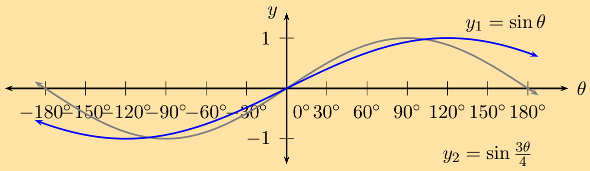
x-afsnitte: $(-180°; 0); (-90°; 0); (0°; 0); (90°; 0); (180°; 0)$

y-afsnitte: $(0°; 0)$

Maks. draaipunt: $(-45°; 1); (135°; 1)$

Min. draaipunt: $(-135°; -1); (45°; -1);$

d)

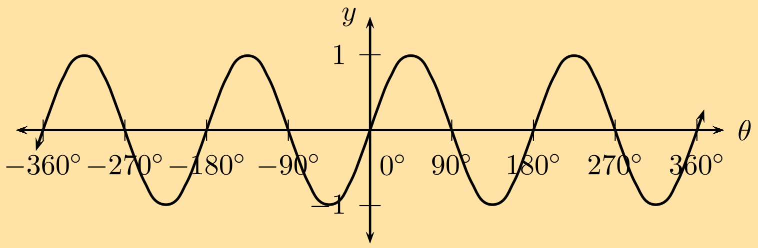


Vir $k(\theta) = \sin\frac{3\theta}{4}$:

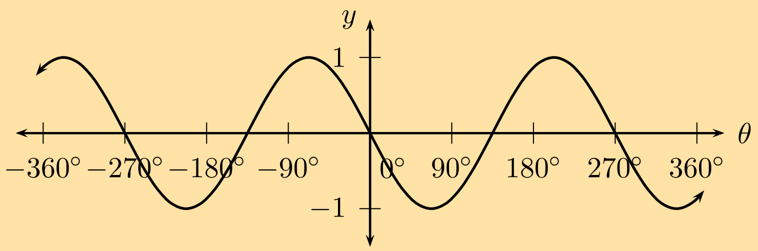
$$\begin{aligned}
\text{Periode: } & 480° \\
\text{Amplitude: } & 1 \\
\text{Gebied: } & [-180°; 180°] \\
\text{Terrein: } & [-1; 1] \\
x\text{-afsnitte: } & (0°; 0) \\
y\text{-afsnitte: } & (0°; 0) \\
\text{Maks. draaipunt: } & (120°; 1) \\
\text{Min. draaipunt: } & (-120°; -1);
\end{aligned}$$

2. Bepaal die waarde van k vir elke grafiek van die vorm $f(\theta) = \sin k\theta$:

a)



b)



Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\text{Periode } &= 180° \\
\therefore \frac{360°}{k} &= 180° \\
k &= \frac{360°}{180°} \\
\therefore k &= 2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Periode } &= 270^\circ \\ \therefore \frac{360^\circ}{k} &= 270^\circ \\ k &= \frac{360^\circ}{270^\circ} \\ \therefore k &= \frac{3}{4} \\ \text{en die grafiek is gereflekteer om die } x-\text{as } \therefore k &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Funksies van die vorm $y = \sin(\theta + p)$

Ontdek die eienskappe

Oefening 5 – 22: Sinusfunksies van die vorm $y = \sin(\theta + p)$

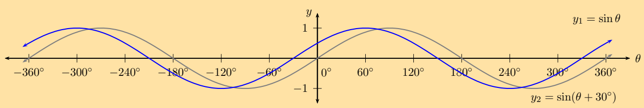
Teken die volgende funksies vir $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Bepaal vir elke funksie:

- Periode
- Amplitude
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Maksimum en minimum draaipunte

1. $f(\theta) = \sin(\theta + 30^\circ)$

   Oplossing:



   Vir $f(\theta) = \sin(\theta + 30^\circ)$:

Periode: $360°$

Amplitude: 1

Gebied: $[-360°; 360°]$

Terrein: $[-1; 1]$

x-afsnitte: $(-210°; 0); (-30°; 0); (150°; 0); (330°; 0)$

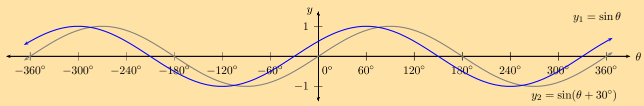
y-afsnitte: $(0°; \frac{1}{2})$

Maks. draaipunt: $(-300°; 1); (60°; 1)$

Min. draaipunt: $(-120°; -1); (240°; -1)$

2. $g(\theta) = \sin(\theta - 45°)$

Oplossing:



Vir $g(\theta) = \sin(\theta - 45°)$:

Periode: $360°$

Amplitude: 1

Gebied: $[-360°; 360°]$

Terrein: $[-1; 1]$

x-afsnitte: $(-315°; 0); (-135°; 0); (45°; 0); (225°; 0)$

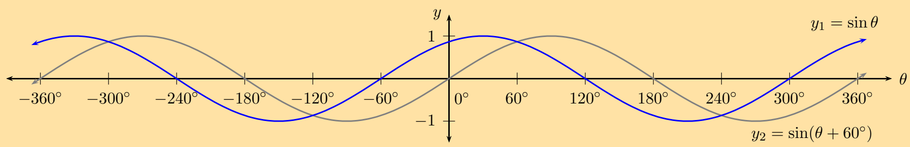
y-afsnitte: $(0°; \frac{1}{\sqrt{2}})$

Maks. draaipunt: $(-300°; 1); (-225°; 1); (135°; 1)$

Min. draaipunt: $(-45°; -1); (315°; -1)$

3. $h(\theta) = \sin(\theta + 60°)$

Oplossing:



Vir $h(\theta) = \sin(\theta + 60°)$:

Periode: $360°$

Amplitude: 1

Gebied: $[-360°; 360°]$

Terrein: $[-1; 1]$

x-afsnitte: $(-240°; 0); (-60°; 0); (120°; 0); (300°; 0)$

y-afsnitte: $(0°; \frac{\sqrt{3}}{2})$

Maks. draaipunt: $(-300°; 1); (-330°; 1); (30°; 1)$

Min. draaipunt: $(-150°; -1); (210°; -1)$

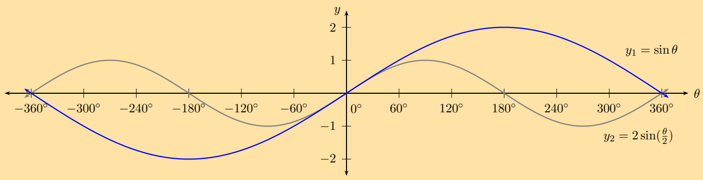
Teken van sinusgrafieke

Oefening 5 – 23: Die sinusfunksie

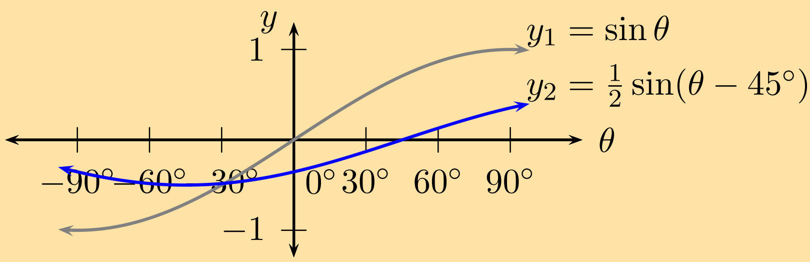
1. Teken die volgende grafieke op verskillende asse:
   a) $y = 2\sin\frac{\theta}{2}$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$
   b) $f(\theta) = \frac{1}{2}\sin(\theta - 45°)$ vir $-90° \leq \theta \leq 90°$
   c) $y = \sin(\theta + 90°) + 1$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$
   d) $y = \sin(-\frac{3\theta}{2})$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$
   e) $y = \sin(30° - \theta)$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$

Oplossing:

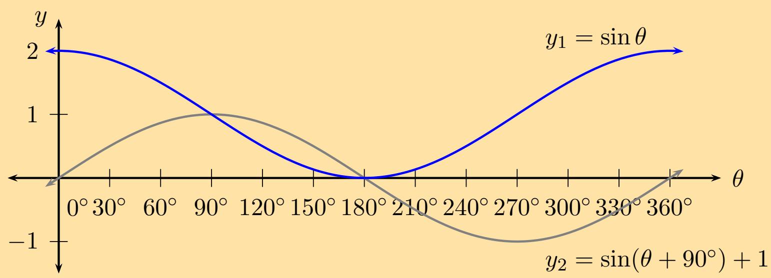
a)



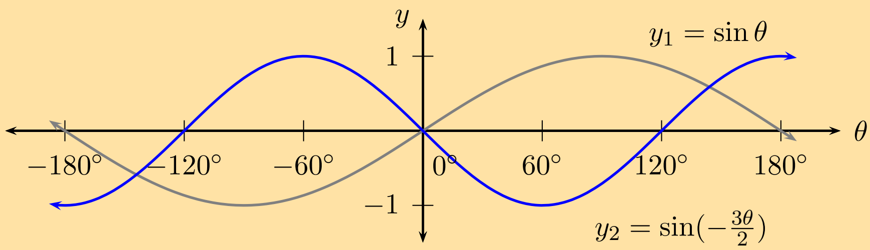
b)



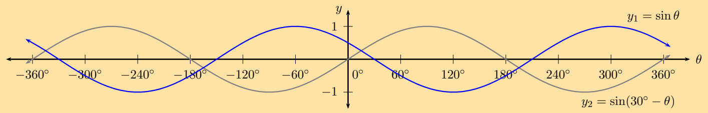
c)



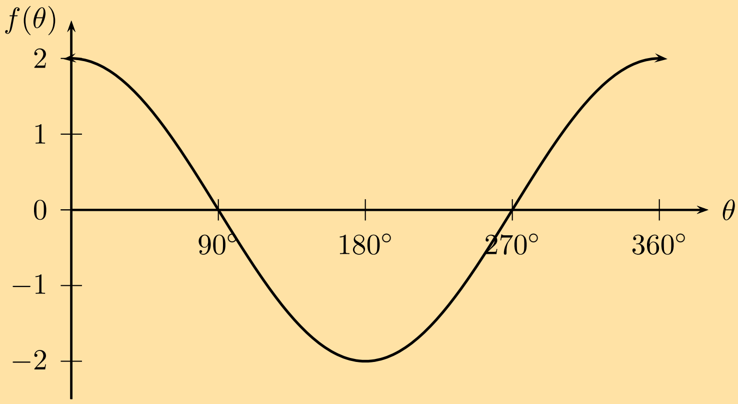
d)



e)



2. Gegewe die grafiek van die funksie $y = a\sin(\theta + p)$, bepaal die waardes van a en p.



Kan jy hierdie grafiek beskryf in terme van $\cos\theta$?

Oplossing: $a = 2$; $p = 90°$ $\therefore y = 2\sin(\theta + 90°)$ en $y = 2\cos\theta$

5.6 Kosinusfunksies

Hersiening

Funksies van die vorm $y = \cos\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

Funksies van die vorm $y = a\cos\theta + q$

Oefening 5 – 24: Hersiening

Teken akkurate grafieke van elkeen van die volgende funksies, vir $0° \leq \theta \leq 360°$, op verskillende assestelsels.

- Gebruik tabelle indien nodig.
- Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

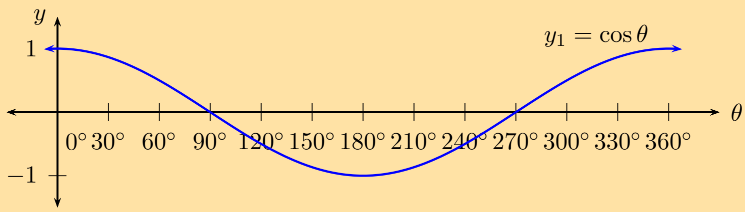
Bepaal ook die volgende vir elke funksie:

- Periode
- Amplitude

- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Maksimum en minimum draaipunte

1. $y_1 = \cos\theta$

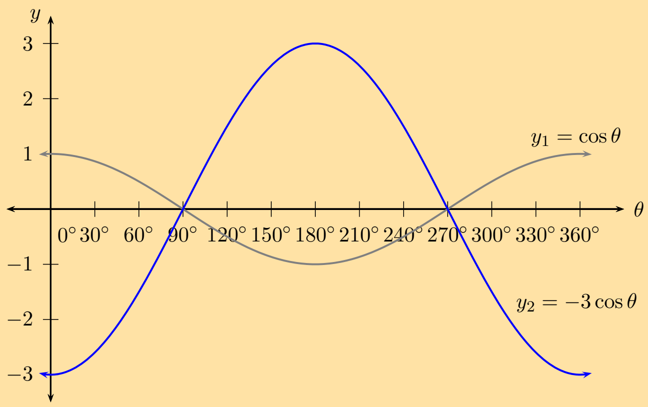
   Oplossing:



$$\begin{aligned}\text{Period: } & 360^\circ \\ \text{Amplitude: } & 1 \\ \text{Gebied: } & [0^\circ; 360^\circ] \\ \text{Terrein: } & [-1; 1] \\ x\text{-afsnitte: } & (90^\circ; 0); (270^\circ; 0) \\ y\text{-afsnitte: } & (0^\circ; 1) \\ \text{Maks. draaipunt: } & (0^\circ; 1); (360^\circ; 1) \\ \text{Min. draaipunt: } & (180^\circ; -1)\end{aligned}$$

2. $y_2 = -3\cos\theta$

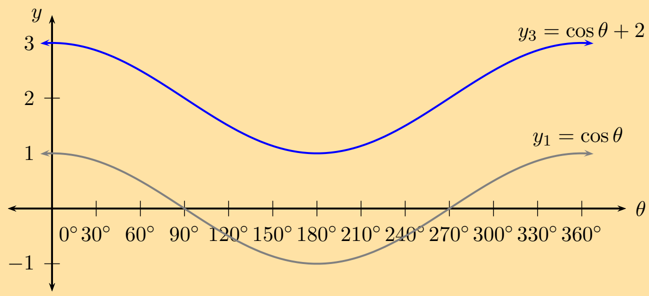
   Oplossing:



$$\begin{aligned}
\text{Period: } & 360^\circ \\
\text{Amplitude: } & 1 \\
\text{Gebied: } & [0^\circ; 360^\circ] \\
\text{Terrein: } & [-3; 3] \\
x\text{-afsnitte: } & \text{ geen} \\
y\text{-afsnitte: } & (0^\circ; 3) \\
\text{Maks. draaipunt: } & (0^\circ; 3); (360^\circ; 3) \\
\text{Min. draaipunt: } & (180^\circ; -3);
\end{aligned}$$

3. $y_3 = \cos\theta + 2$

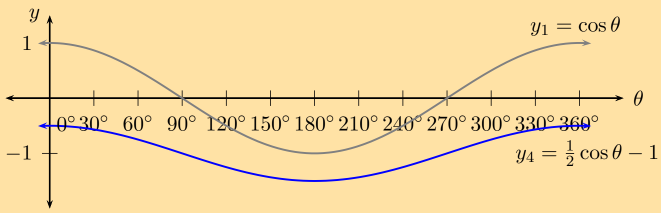
Oplossing:



$$\begin{aligned}
\text{Period: } & 360^\circ \\
\text{Amplitude: } & 1 \\
\text{Gebied: } & [0^\circ; 360^\circ] \\
\text{Terrein: } & [1; 3] \\
x\text{-afsnitte: } & \text{ geen} \\
y\text{-afsnitte: } & (0^\circ; 3) \\
\text{Maks. draaipunt: } & (0^\circ; 3); (360^\circ; 3) \\
\text{Min. draaipunt: } & (180^\circ; 1);
\end{aligned}$$

4. $y_4 = \frac{1}{2}\cos\theta - 1$

Oplossing:



$$\text{Period: } 360°$$

$$\text{Amplitude: } \frac{1}{2}$$

$$\text{Gebied: } [0°; 360°]$$

$$\text{Terrein: } [-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}]$$

$$x\text{-afsnitte: geen}$$

$$y\text{-afsnitte: } (0°; -\frac{1}{2})$$

$$\text{Maks. draaipunt: } (0°; -\frac{1}{2}); (360°; -\frac{1}{2})$$

$$\text{Min. draaipunt: } (180°; -\frac{3}{2});$$

Funksies van die vorm $y = \cos(k\theta)$

Ontdek die eienskappe

Oefening 5 – 25: Kosinusfunksies van die vorm $y = \cos k\theta$

1. Skets die volgende funksies vir $-180° \leq \theta \leq 180°$. Vir elke grafiek bepaal:
   - Periode
   - Amplitude
   - Gebied en terrein
   - x- en y-afsnitte
   - Maksimum en minimum draaipunte

   a) $f(\theta) = \cos 2\theta$

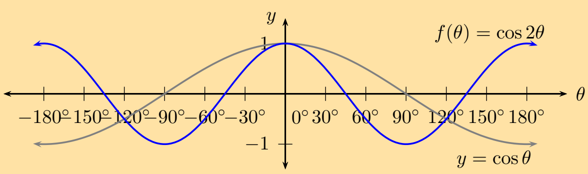
   b) $g(\theta) = \cos \frac{\theta}{3}$

   c) $h(\theta) = \cos(-2\theta)$

   d) $k(\theta) = \cos \frac{3\theta}{4}$

Oplossing:

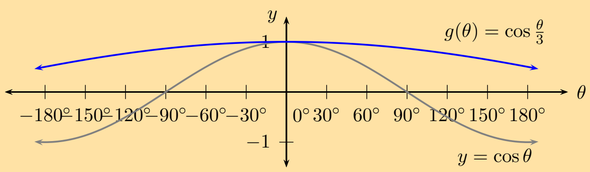
a)



Vir $f(\theta) = \cos 2\theta$:

$$\begin{aligned}\text{Periode: } & 180^\circ \\ \text{Amplitude: } & 1 \\ \text{Gebied: } & [-180^\circ; 180^\circ] \\ \text{Terrein: } & [-1; 1] \\ x\text{-afsnitte: } & (-135^\circ; 0); (-45^\circ; 0); (45^\circ; 0); (135^\circ; 0) \\ y\text{-afsnitte: } & (0^\circ; 1) \\ \text{Maks. draaipunt: } & (-180^\circ; 1); (0^\circ; 1); (180^\circ; 1) \\ \text{Min. draaipunt: } & (-90^\circ; -1); (90^\circ; -1)\end{aligned}$$

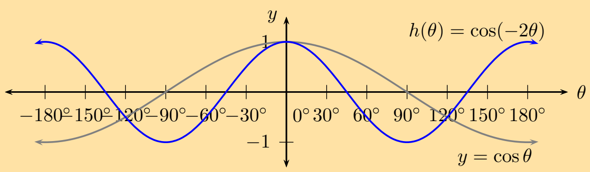
b)



Vir $g(\theta) = \cos\frac{\theta}{3}$:

$$\begin{aligned}\text{Periode: } & 1080^\circ \\ \text{Amplitude: } & 1 \\ \text{Gebied: } & [-180^\circ; 180^\circ] \\ \text{Terrein: } & [\frac{1}{2}; 1] \\ x\text{-afsnitte: } & \text{geen} \\ \text{Maks. draaipunt: } & (0^\circ; 1) \\ \text{Min. draaipunt: } & \text{geen}\end{aligned}$$

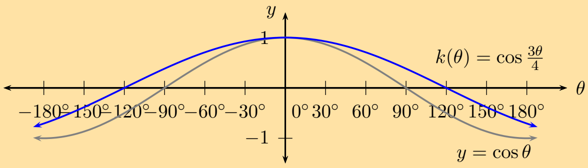
c)



Vir $h(\theta) = \cos(-2\theta)$:

$$\begin{aligned}\text{Periode: } & 180^\circ \\ \text{Amplitude: } & 1 \\ \text{Gebied: } & [-180^\circ; 180^\circ] \\ \text{Terrein: } & [-1; 1] \\ x\text{-afsnitte: } & (-135^\circ; 0); (-45^\circ; 0); (45^\circ; 0); (135^\circ; 0) \\ y\text{-afsnitte: } & (0^\circ; 1) \\ \text{Maks. draaipunt: } & (-180^\circ; 1); (0^\circ; 1); (180^\circ; 1) \\ \text{Min. draaipunt: } & (-90^\circ; -1); (90^\circ; -1)\end{aligned}$$

d)

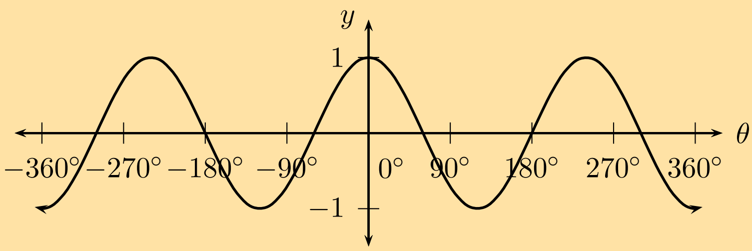


Vir $k(\theta) = \cos \frac{3\theta}{4}$:

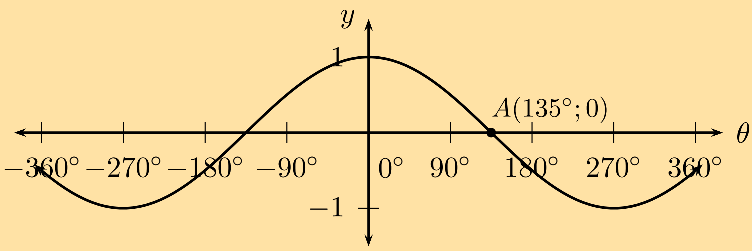
$$\begin{aligned}
\text{Periode: } & 480° \\
\text{Amplitude: } & 1 \\
\text{Gebied: } & [-180°; 180°] \\
\text{Terrein: } & [-\frac{1}{\sqrt{2}}; 1] \\
x\text{-afsnitte: } & (-120°; 0); (120°; 0) \\
y\text{-afsnitte: } & (0°; 1) \\
\text{Maks. draaipunt: } & (0°; 1) \\
\text{Min. draaipunt: } & \text{geen}
\end{aligned}$$

2. Bepaal die waarde van k vir elke grafiek van die vorm $f(\theta) = \cos k\theta$:

a)



b)



Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\text{Periode } &= \frac{720°}{3 \text{ volledige golwe}} \\
&= 240° \\
\therefore \frac{360°}{k} &= 240° \\
\therefore k &= \frac{360°}{240°} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{Vir } y &= \cos\theta \\ 0 &= \cos 90^\circ \\ \text{Dus vir } A(135^\circ; 0) \qquad 90^\circ &= k \times 135^\circ \\ \therefore k &= \frac{90^\circ}{135^\circ} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Funksies van die vorm $y = \cos(\theta + p)$

Ontdek die eienskappe

Oefening 5 – 26: Kosinusfunksies van die vorm $y = \cos(\theta + p)$

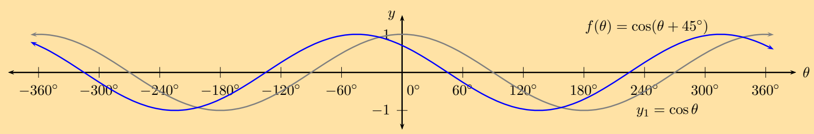
Teken die volgende funksies vir $-360^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Bepaal vir elke funksie:

- Periode
- Amplitude
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Maksimum en minimum draaipunte

1. $f(\theta) = \cos(\theta + 45^\circ)$

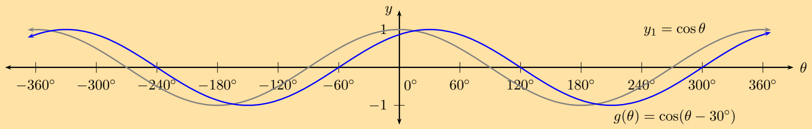
   Oplossing:



$$\begin{aligned} \text{Period: } & 360^\circ \\ \text{Amplitude: } & 1 \\ \text{Gebied: } & [-360^\circ; 360^\circ] \\ \text{Terrein: } & [-1; 1] \\ x\text{-afsnitte: } & (-315^\circ; 0); (-150^\circ; 0); (30^\circ; 0); (210^\circ; 0) \\ y\text{-afsnitte: } & (0^\circ; 1) \\ \text{Maks. draaipunt: } & (-45^\circ; 1); (315^\circ; 1) \\ \text{Min. draaipunt: } & (-225^\circ; -1); (135^\circ; -1) \end{aligned}$$

2. $g(\theta) = \cos(\theta - 30°)$

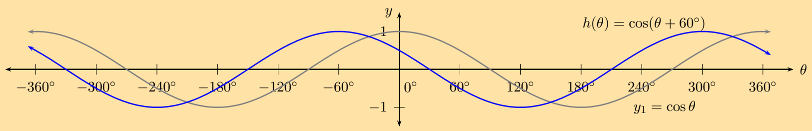
Oplossing:



Period: $360°$
Amplitude: 1
Gebied: $[-360°; 360°]$
Terrein: $[-1; 1]$
x-afsnitte: $(-240°; 0); (-60°; 0); (120°; 0); (300°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; \frac{\sqrt{3}}{2})$
Maks. draaipunt: $(-330°; 1); (30°; 1)$
Min. draaipunt: $(-150°; -1); (210°; -1)$

3. $h(\theta) = \cos(\theta + 60°)$

Oplossing:



Period: $360°$
Amplitude: 1
Gebied: $[-360°; 360°]$
Terrein: $[-1; 1]$
x-afsnitte: $(-330°; 0); (-150°; 0); (30°; 0); (210°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; \frac{1}{2})$
Maks. draaipunt: $(-60°; 1); (300°; 1)$
Min. draaipunt: $(-240°; -1); (120°; -1)$

Skets van kosinusgrafieke

Oefening 5 – 27: Die kosinusfunksie

1. Teken die volgende grafieke op verskillende asse:

a) $y = \cos(\theta + 15°)$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$

b) $f(\theta) = \frac{1}{3}\cos(\theta - 60°)$ vir $-90° \leq \theta \leq 90°$

c) $y = -2\cos\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

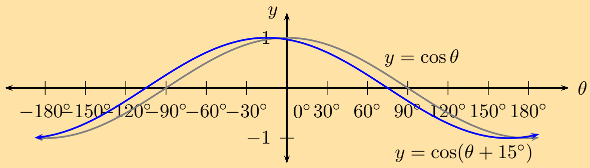
d) $y = \cos(30° - \theta)$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$

e) $g(\theta) = 1 + \cos(\theta - 90°)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

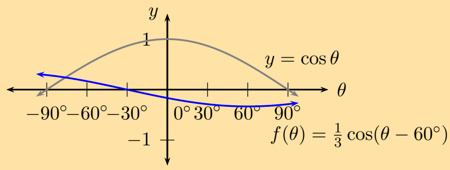
f) $y = \cos(2\theta + 60°)$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$

Oplossing:

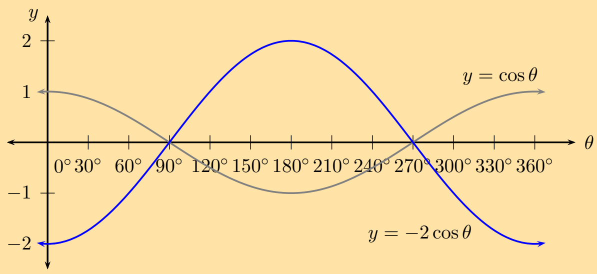
a)



b)

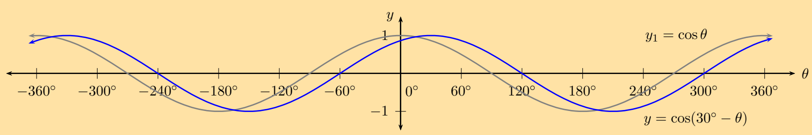


c)

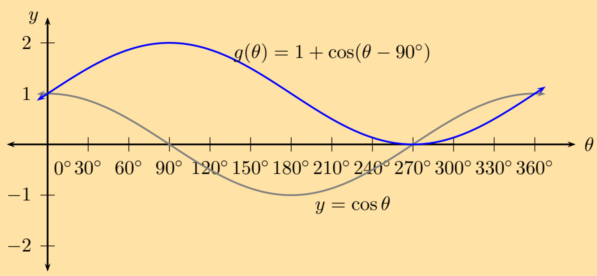


d)

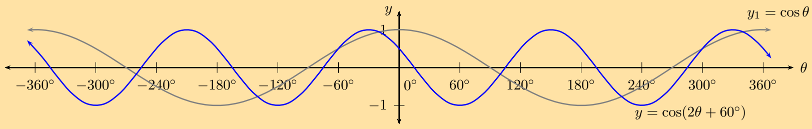
$$
\begin{aligned}
y &= \cos(30° - \theta) \\
&= \cos\left(-(\theta - 30°)\right) \\
&= \cos\left(\theta - 30°\right)
\end{aligned}
$$



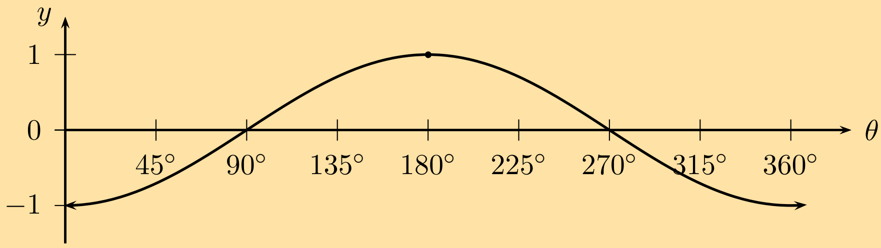
e)



f)



2. Die volgende grafiek word aan twee meisies gegee:



a) Audrey besluit dat die vergelyking vir die grafiek 'n kosinusfunksie van die vorm $y = a\cos\theta$ is. Bepaal die waarde van a.

b) Megan dink dat die vergelyking vir die grafiek 'n kosinusfunksie van die vorm $y = \cos(\theta + p)$ is. Bepaal die waarde van p.

c) Wat kan hulle hieruit aflei?

Oplossing:

a) $a = -1$

b) $p = -180°$

c) $\cos(\theta - 180°) = -\cos\theta$

5.7 Tangensfunksies

Hersiening

Funksies van die vorm $y = \tan\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

Funksies van die vorm $y = a\tan\theta + q$

Oefening 5 – 28: Hersiening

Teken elkeen van die volgende funksies vir $0° \leq \theta \leq 360°$ akkuraat op aparte asse:

- Gebruik tabelle indien nodig.
- Gebruik grafiekpapier indien beskikbaar.

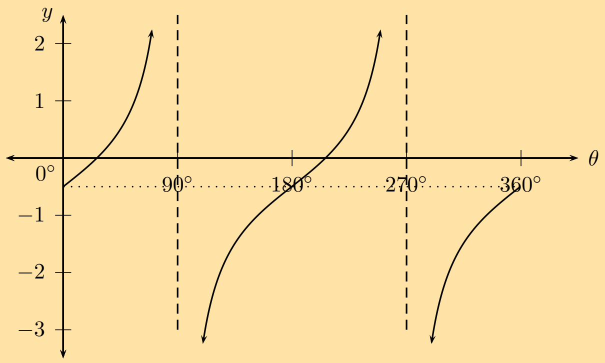
Bepaal ook die volgende vir elke funksie:

- Periode

- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Asimptote

1. $y_1 = \tan\theta - \frac{1}{2}$

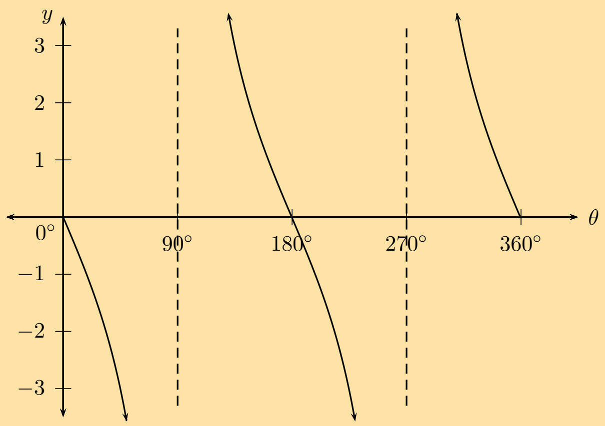
   Oplossing:



$$\begin{aligned} \text{Period: } & 180^\circ \\ \text{Gebied: } & [0^\circ; 360^\circ] \\ \text{Terrein: } & [-\infty; \infty] \\ x\text{-afsnitte: } & (26{,}6^\circ; 0); (206{,}6^\circ; 0) \\ y\text{-afsnitte: } & (0^\circ; -\frac{1}{2}) \\ \text{asimptote: } & 90^\circ; 270^\circ \end{aligned}$$

2. $y_2 = -3\tan\theta$

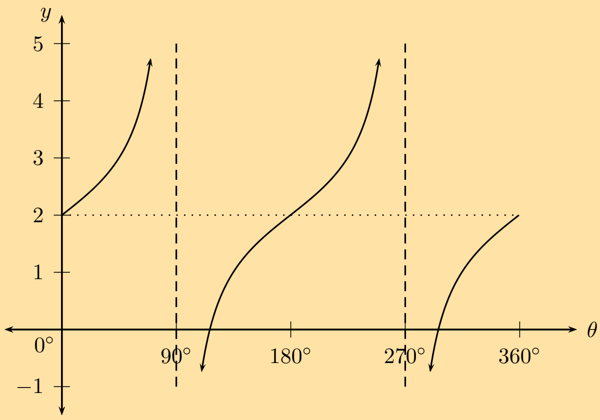
   Oplossing:



Period: $180°$
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(0°; 0); (180°; 0); (360°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
asimptote: $90°; 270°$

3. $y_3 = \tan\theta + 2$

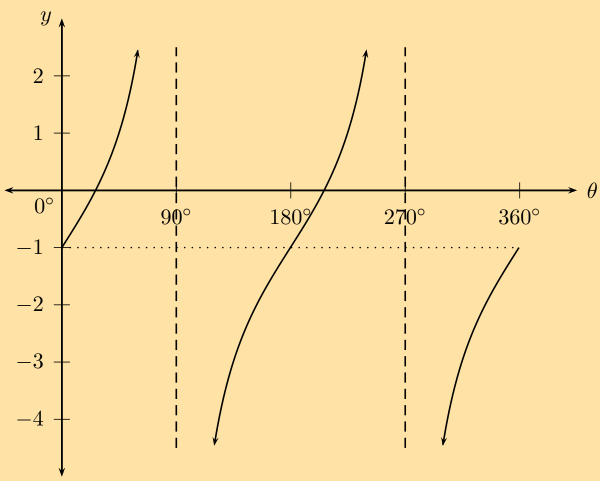
Oplossing:



Period: $180°$
Gebied: $[0°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(116{,}6°; 0); (296{,}6°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 2)$
asimptote: $90°; 270°$

4. $y_4 = 2\tan\theta - 1$

Oplossing:



$$\begin{aligned} \text{Period: } & 180° \\ \text{Gebied: } & [0°; 360°] \\ \text{Terrein: } & [-\infty; \infty] \\ x\text{-afsnitte: } & (26{,}6°; 0); (206{,}6°; 0) \\ y\text{-afsnitte: } & (0°; -1) \\ \text{asimptote: } & 90°; 270° \end{aligned}$$

Funksies van die vorm $y = \tan(k\theta)$

Ontdek die eienskappe

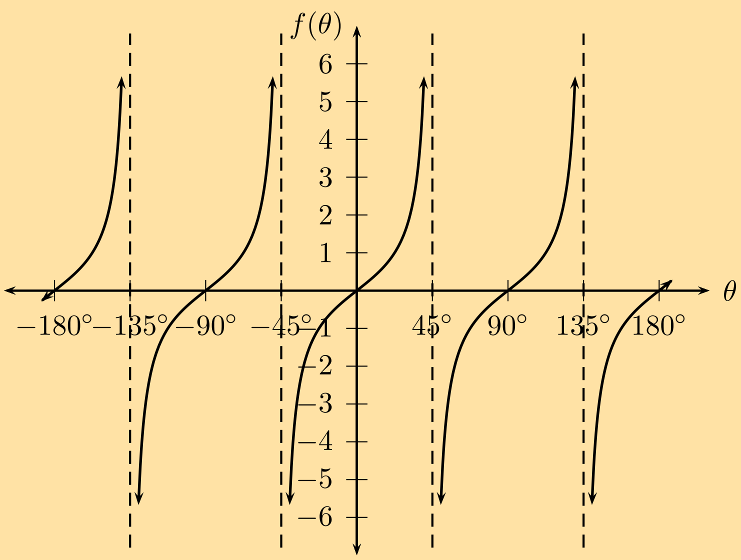
Oefening 5 – 29: Tangensfunksies van die vorm $y = \tan k\theta$

Skets die volgende funksies vir $-180° \leq \theta \leq 180°$. Vir elke grafiek bepaal:

- Periode
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Asimptote

1. $f(\theta) = \tan 2\theta$

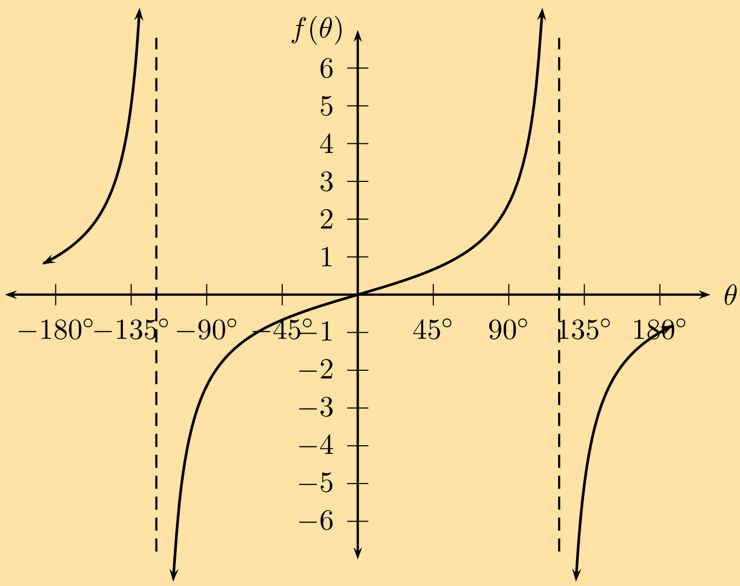
   Oplossing:



Period: $90°$
Gebied: $[-180°; 180°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-180°; 0); (-90°; 0); (0°; 0); (90°; 0); (180°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
asimptote: $-135°; -45°; 45°; 135°$

2. $g(\theta) = \tan \frac{3\theta}{4}$

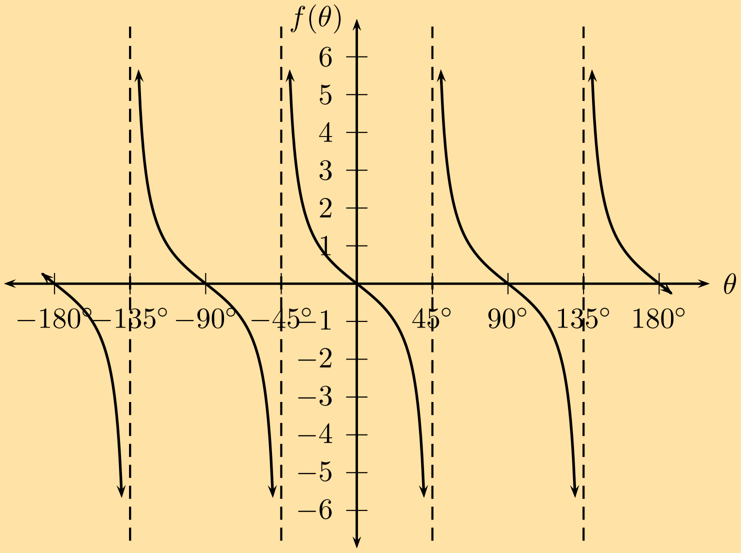
Oplossing:



Period: $240°$
Gebied: $[-180°; 180°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(0°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
asimptote: $-120°; 120°$

3. $h(\theta) = \tan(-2\theta)$

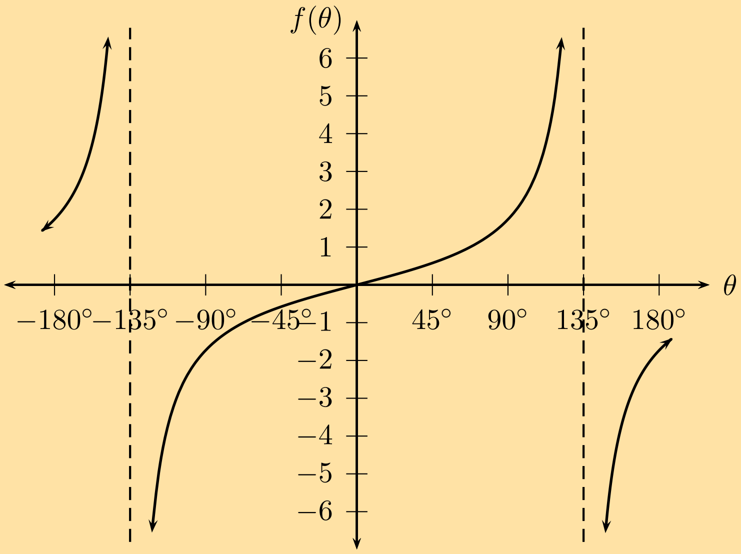
Oplossing:



Period: $90°$
Gebied: $[-180°; 180°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-180°; 0); (-90°; 0); (0°; 0); (90°; 0); (180°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
asimptote: $-135°; -45°; 45°; 135°$

4. $k(\theta) = \tan \frac{2\theta}{3}$

Oplossing:



Period: $270°$
Gebied: $[-180°; 180°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(0°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 0)$
asimptote: $-135°; 135°$

Funksies van die vorm $y = \tan(\theta + p)$

Ontdek die eienskappe

Oefening 5 – 30: Tangensfunksies van die vorm $y = \tan(\theta + p)$

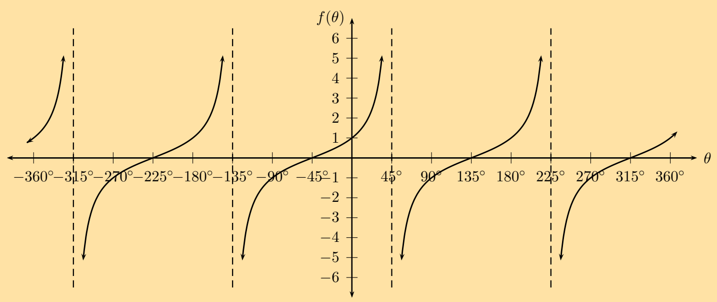
Teken die volgende funksies vir $-360° \leq \theta \leq 360°$.

Vir elke grafiek bepaal:

- Periode
- Gebied en terrein
- x- en y-afsnitte
- Asimptote

1. $f(\theta) = \tan(\theta + 45°)$

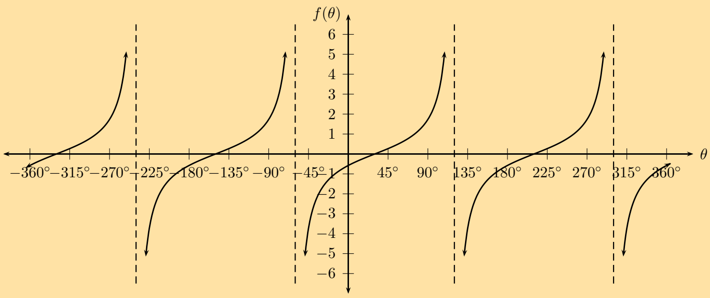
   Oplossing:



$$\begin{aligned}
\text{Period: } & 180° \\
\text{Gebied: } & [-360°; 360°] \\
\text{Terrein: } & [-\infty; \infty] \\
x\text{-afsnitte: } & (-225°; 0); (-45°; 0); (135°; 0)(315°; 0) \\
y\text{-afsnitte: } & (0°; 0) \\
\text{asimptote: } & -315°; -135°; 45°; 225°
\end{aligned}$$

2. $g(\theta) = \tan(\theta - 30°)$

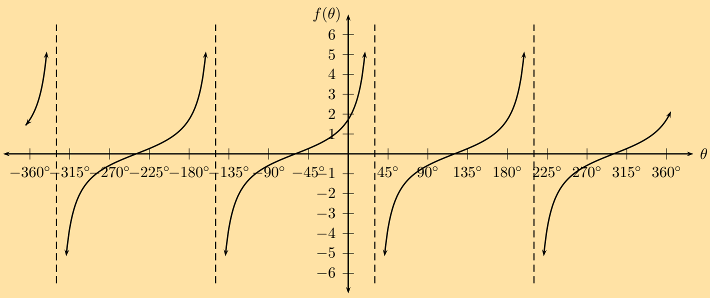
   Oplossing:



Period: $180°$
Gebied: $[-360°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-330°; 0); (-150°; 0); (30°; 0)(210°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; -0{,}58)$
asimptote: $-315°; -135°; 45°; 225°$

3. $h(\theta) = \tan(\theta + 60°)$

Oplossing:



Period: $180°$
Gebied: $[-360°; 360°]$
Terrein: $[-\infty; \infty]$
x-afsnitte: $(-240°; 0); (-60°; 0); (120°; 0)(300°; 0)$
y-afsnitte: $(0°; 1.73)$
asimptote: $-330°; -150°; 30°; 210°$

Die skets van tangensfunksies

Oefening 5 – 31: Die tangensfunksie

1. Teken die volgende grafieke op verskillende asse:

a) $y = \tan\theta - 1$ vir $-90° \leq \theta \leq 90°$

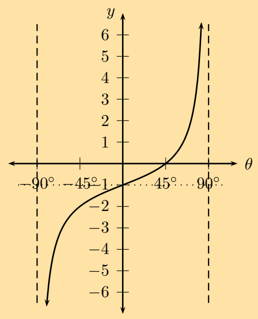
b) $f(\theta) = -\tan 2\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 90°$

c) $y = \frac{1}{2}\tan(\theta + 45°)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

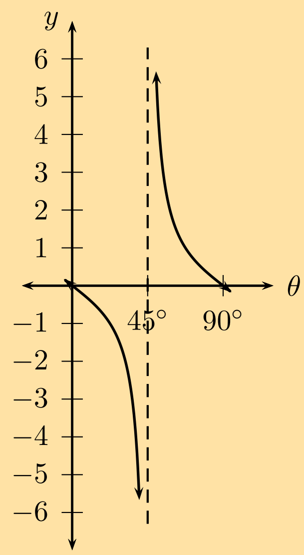
d) $y = \tan(30° - \theta)$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$

Oplossing:

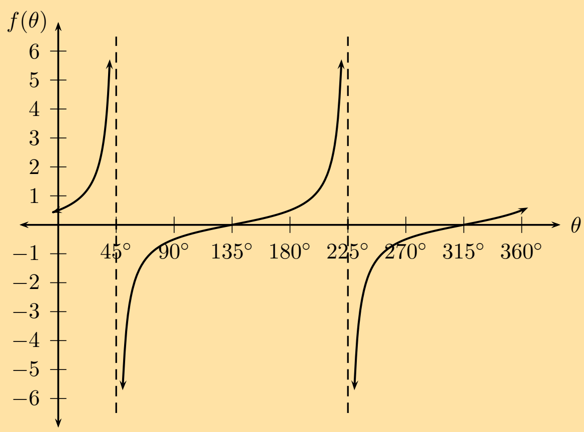
a)



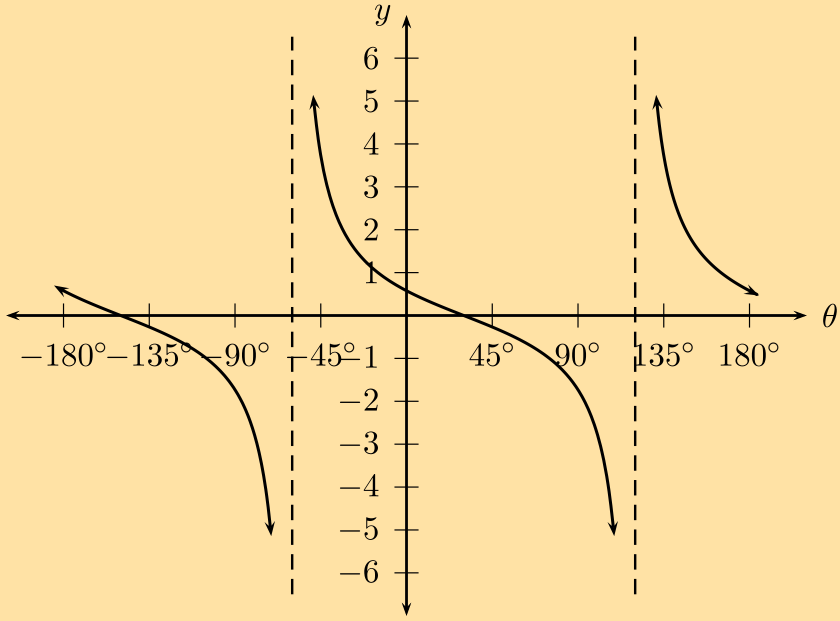
b)



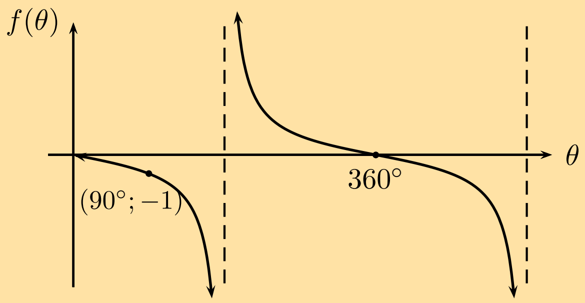
c)



d)



2. Gegewe die grafiek van $y = a\tan k\theta$, bepaal die waardes van a en k.



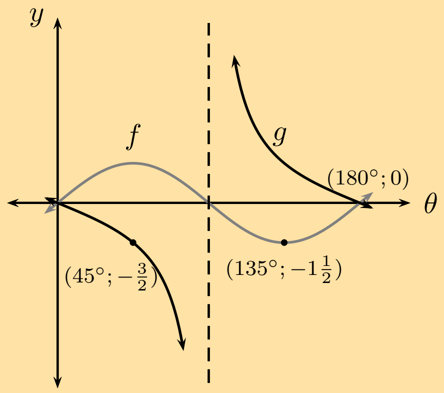
Oplossing:

$a = -1$; $k = \frac{1}{2}$

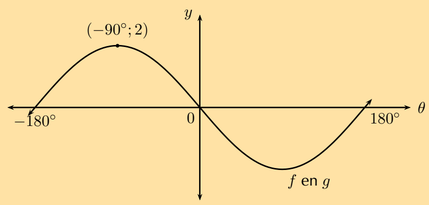
Oefening 5 – 32: Gemengde oefeninge

1. Bepaal die vergelyking vir elk van die volgende:

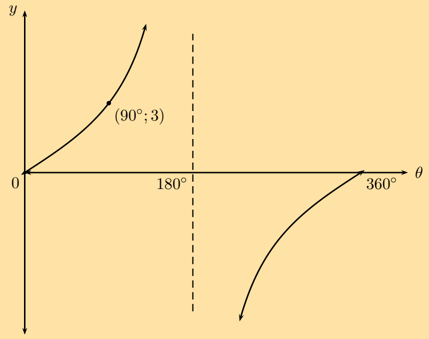
   a) $f(\theta) = a\sin k\theta$ en $g(\theta) = a\tan\theta$



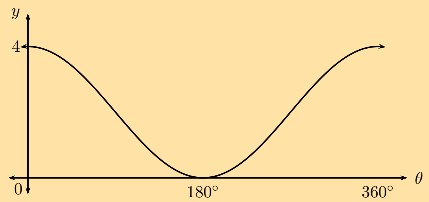
b) $f(\theta) = a \sin k\theta$ en $g(\theta) = a \cos(\theta + p)$



c) $y = a \tan k\theta$



d) $y = a \cos\theta + q$



Oplossing:

a) $f(\theta) = \frac{3}{2} \sin 2\theta$ en $g(\theta) = -\frac{3}{2} \tan\theta$

b) $f(\theta) = -2\sin\theta$ en $g(\theta) = 2\cos(\theta + 360°)$

c) $y = 3\tan\frac{\theta}{2}$

d) $y = y = 2\cos\theta + 2$

2. Gegewe die funksies $f(\theta) = 2\sin\theta$ en $g(\theta) = \cos\theta + 1$:

   a) Skets die grafieke van beide funksies op dieselfde assestelsel, vir $0° \leq \theta \leq 360°$. Dui die draaipunte en afsnitte op die diagram aan.

   b) Wat is die periode van f?

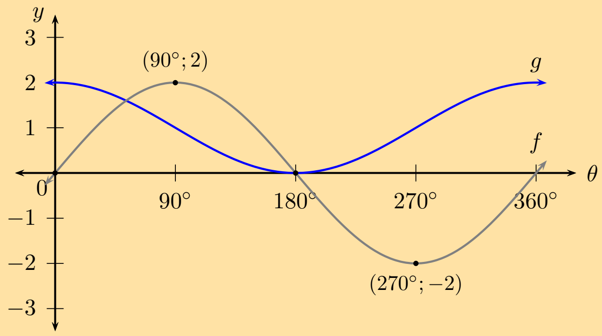
   c) Wat is die amplitude van g?

   d) Gebruik jou skets om te bepaal hoeveel oplossings daar is vir die vergelyking $2\sin\theta - \cos\theta = 1$. Gee een van die oplossings.

   e) Dui op jou skets aan waar op die grafiek die oplossing vir $2\sin\theta = -1$ gevind kan word.

Oplossing:

a)



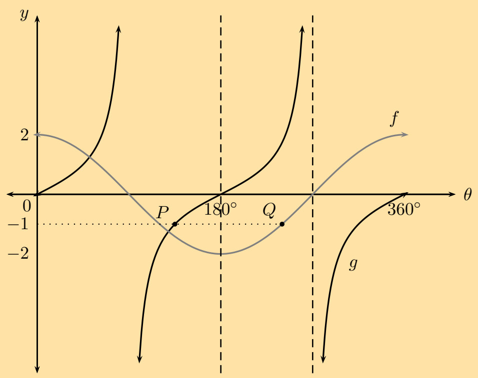
b) $360°$

c) 1

d) By $\theta = 180°$

e)

3. Die skets toon twee funksies $f(\theta) = a\cos\theta$ en $g(\theta) = \tan\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$. Punte $P(135°; b)$ en $Q(c; -1)$ lê op $g(\theta)$ en $f(\theta)$, respektiewelik.



a) Bepaal die waardes van a, b en c.

b) Wat is die periode van g?

c) Los die vergelyking $\cos\theta = \frac{1}{2}$ grafies op en dui jou antwoord(e) op die diagram aan.

d) Bepaal die vergelyking van die nuwe grafiek as g gereflekteer word rondom die x-as en na regs geskuif word met $45°$.

Oplossing:

a) $a = 2$, $b = -1$ en $c = 240°$

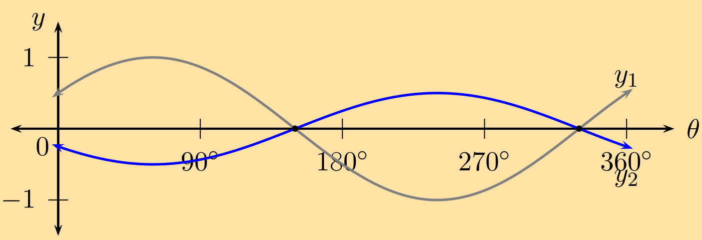
b) $180°$

c) $\theta = 60°; 300°$

d) $y = -\tan(\theta - 45°)$

4. Skets die grafieke van $y_1 = -\frac{1}{2}\sin(\theta + 30°)$ en $y_2 = \cos(\theta - 60°)$, op dieselfde assestelsel vir $0° \leq \theta \leq 360°$.

Oplossing:



Oefening 5 – 33: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Wys dat as $a < 0$, dan is die waardeversameling (terrein) van $f(x) = a(x+p)^2 + q$ $\{f(x) : f(x) \in (-\infty, q]\}$.

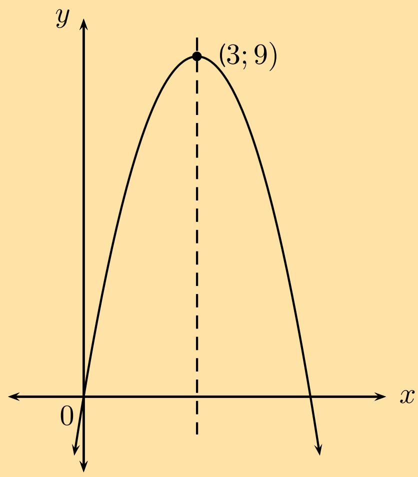
   Oplossing:

$$
\begin{aligned}
(x+p)^2 &\geq 0 \\
a(x+p)^2 &\leq 0 \\
a(x+p)^2 + q &< q \\
\therefore f(x) &< q
\end{aligned}
$$

2. As $(2; 7)$ die draaipunt is van $f(x) = -2x^2 - 4ax + k$, vind die waardes van die konstantes a en k.

   Oplossing: $a = -2; k = -1$

3. Die volgende grafiek word deur die vergelyking $f(x) = ax^2 + bx$ voorgestel. Die koördinate van die draaipunt is $(3; 9)$. Toon dat $a = -1$ en $b = 6$.



   Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx \\ x &= -b2a \\ \therefore 3 &= -\frac{b}{2a} \\ 6a &= -b \\ \text{Substitueer } (3;9) \quad 9 &= a(3)^2 + b(3) \\ 9 &= 9a + 3b \\ 9 &= 9a + 3(-6a) \\ 9 &= 9a - 18a \\ 9 &= -9a \\ \therefore -1 &= a \\ \therefore b &= 6 \end{aligned}$$

4. Gegewe: $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Gee die vergelyking van die nuwe grafiek wat ontstaan wanneer:

   a) die grafiek van f drie eenhede na links geskuif word.
   b) die x-as drie eenhede na onder geskuif word.

   Oplossing:

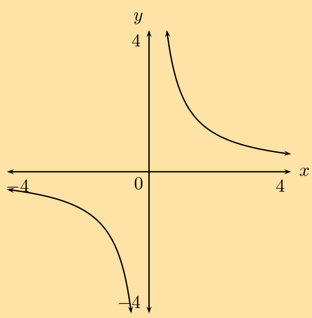
   a) $y = x + 2^2 + 2$
   b) $y = x - 1^2 + 5$

5. 'n Parabool met draaipunt $(-1;-4)$ word vertikaal met 4 eenhede opwaarts geskuif. Wat is die koördinate van die draaipunt van die verskuifde parabool?

   Oplossing: $(-1;0)$

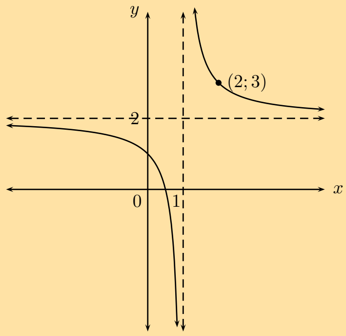
6. Trek die grafiek van die hiperbool gedefineer deur $y = \frac{2}{x}$ vir $-4 \leq x \leq 4$. Veronderstel die hiperbool word met 3 eenhede na regs en 1 eenhede af geskuif. Wat is dan die nuwe vergelyking?

   Oplossing:



   $y = \frac{2}{x-3} - 1$

7. Gebaseer op die grafiek van $y = \frac{k}{(x+p)} + q$, bepaal die vergelyking van die grafiek met asimptote $y = 2$ en $x = 1$ en wat deur die punt $(2;3)$ gaan.



Oplossing: $y = \frac{1}{(x-1)} + 2$

8. Die kolomme in die tabel hieronder gee die y-waardes van die volgende funksies: $y = a^x$, $y = a^{x+1}$ en $y = a^x + 1$. Pas elke funksie by die korrekte kolom.

x	A	B	C
-2	7,25	6,25	2,5
-1	3,5	2,5	1
0	2	1	0,4
1	1,4	0,4	0,16
2	1,16	0,16	0,064

Oplossing:

Kolom A: $y = a^x + 1$; Kolom B: $y = a^x$; Kolom C: $y = a^{x+1}$

9. Die grafiek van $f(x) = 1 + a \ . \ 2^x$ (a is 'n konstante) gaan deur die oorsprong.

   a) Bepaal die waarde van a.
   b) Bepaal die waardes van $f(-15)$ korrek tot vyf desimale plekke.
   c) Bepaal die waarde van x, as $P\,(x; 0{,}5)$ op die grafiek van f lê.
   d) As die grafiek van f 2 eenhede na regs geskuif word om die funksie h te gee, skryf die vergelyking van h neer.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} 0 &= a \times 2^0 + 1 \\ \therefore -1 &= a \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(-15) &= -2^{-15} + 1 \\ &= 0{,}99997 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 0{,}5 &= -2^x + 1 \\ 0{,}5 &= 2^x \\ \therefore x &= -1 \end{aligned}$$

d) $h(x) = -2^{(x-2)} + 1$

10. Die grafiek van $f(x) = a \cdot b^x$ ($a \neq 0$) het die punt $P(2; 144)$ op f.

a) As $b = 0{,}75$, bereken die waaarde van a.

b) Skryf dus die vergelyking van f neer.

c) Bepaal, korrek tot twee desimale plekke, die waarde van $f(13)$.

d) Beskryf die transformasie van die kurwe van f na h as $h(x) = f(-x)$.

Oplossing:

a) $a = 256$

b) $f(x) = 256\left(\frac{3}{4}\right)^x$

c) $f(13) = 6{,}08$

d) Geskuif 2 eenhede regs

11. Deur gebruik te maak van jou kennis van die effekte van p en k, teken rowwe skets van die volgende grafieke sonder om 'n tabel van waardes te gebruik.

a) $y = \sin 3\theta$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$

b) $y = -\cos 2\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 180°$

c) $y = \tan \frac{1}{2}\theta$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

d) $y = \sin(\theta - 45°)$ vir $-360° \leq \theta \leq 360°$

e) $y = \cos(\theta + 45°)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

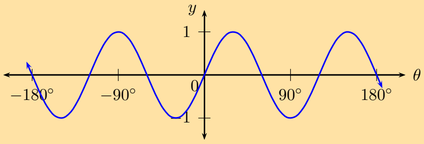
f) $y = \tan(\theta - 45°)$ vir $0° \leq \theta \leq 360°$

g) $y = 2 \sin 2\theta$ vir $-180° \leq \theta \leq 180°$

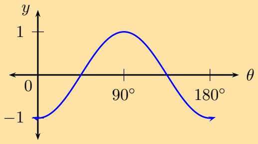
h) $y = \sin(\theta + 30°) + 1$ vir $-360° \leq \theta \leq 0°$

Oplossing:

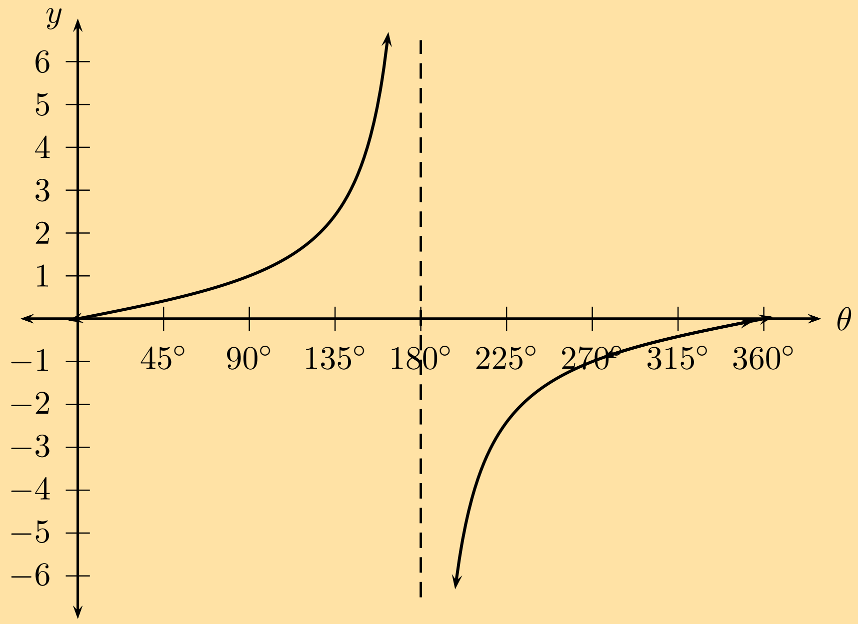
a)



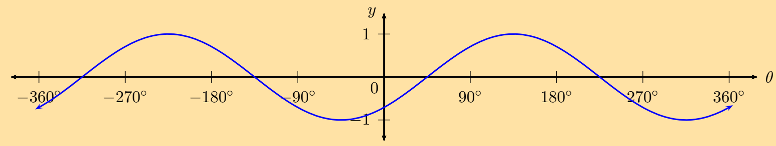
b)



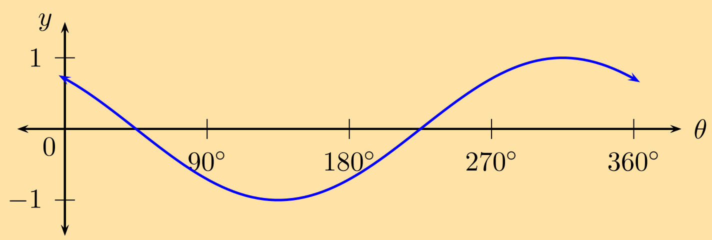
c)


y
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
45°
90°
135°
180°
225°
270°
315°
360°
θ

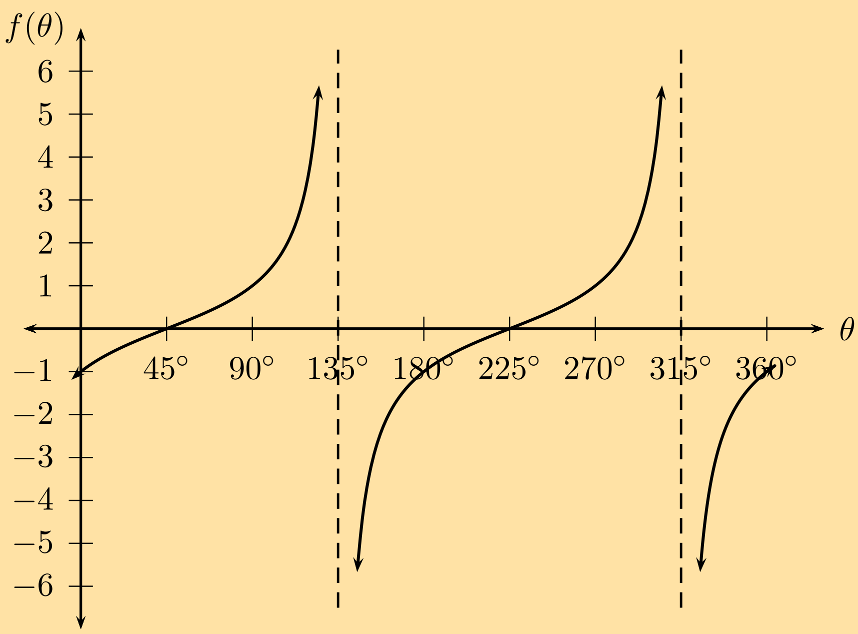
d)


y
1
0
−1
−360°
−270°
−180°
−90°
90°
180°
270°
360°
θ

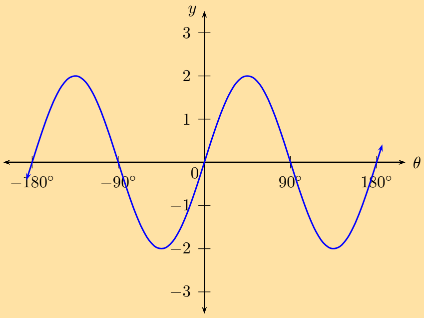
e)


y
1
0
−1
90°
180°
270°
360°
θ

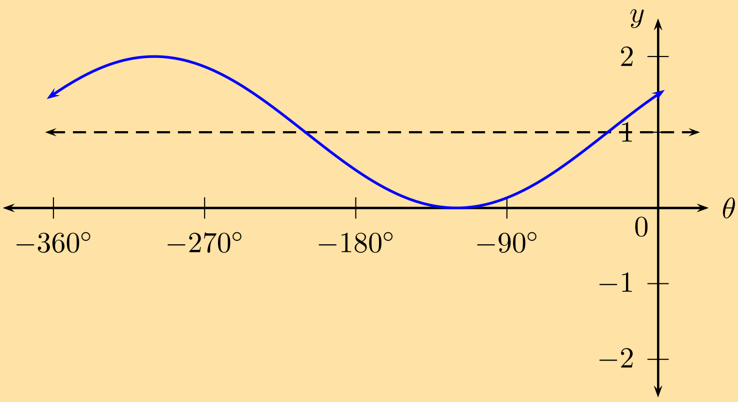
f)


f(θ)
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−4
−5
−6
45°
90°
135°
180°
225°
270°
315°
360°
θ

g)



h)



HOOFSTUK 6

Trigonometrie

- Beklemtoon dat die area-/sinus-/kosinusreël nie 'n reghoekige driehoek vereis nie.
- Moedig leerders aan om die toepaslike vorm van die area-/sinus-/kosinusreël te gebruik.
- Herinner leerders daaraan dat hoeke in die Cartesiese vlak altyd gemeet word vanaf die positiewe x-as.
- Belangrik om daarop te let dat:
  - $(270 \pm x)$ nie ingesluit is in die afdeling oor die reduksieformules nie.
  - tangens se ko-funksie nie ingesluit is nie.
- Herinner leerders om te kontroleer dat hulle antwoorde binne die gegewe interval val.
- In die verkryging van die algemene oplossing, maak seker dat die oplossing in die korrekte kwadrante en binne die gevraagde interval lê.
- Moenie alle driehoeke as ABC benoem nie. Leerders moet in staat wees om die formules met verskillende notasies en in verskillende kontekste toe te pas.
- Moenie identiteite as vergelykings hanteer nie: MOENIE = teken tussen die twee uitdrukkings van 'n identeit gebruik nie. Hou die LK en die RK apart.
- Om identiteite te bewys, manipuleer ons gewoonlik die meer ingewikkelde uitdrukking totdat dit dieselfde lyk as die eenvoudiger uitdrukking.

6.1 Hersiening

Oefening 6 – 1: Hersiening

1. As $p = 49°$ en $q = 32°$, gebruik 'n sakrekenaar bepaal of die volgende bewerings waar of vals is:

   a) $\sin p + 3\sin p = 4\sin p$

   b) $\dfrac{\sin q}{\cos q} = \tan q$

   c) $\cos(p - q) = \cos p - \cos q$

   d) $\sin(2p) = 2\sin p\cos p$

   Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sin p + 3\sin p \\
&= \sin 49^\circ + 3\sin 49^\circ \\
&= 0{,}754\ldots + 2{,}264\ldots \\
&= 3{,}012 \\
\text{RK} &= 4\sin p \\
&= 3{,}012 \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{\sin q}{\cos q} \\
&= \frac{\sin 32^\circ}{\cos 32^\circ} \\
&= \frac{0{,}53\ldots}{0{,}84\ldots} \\
&= 0{,}62 \\
\text{RK} &= \tan q \\
&= \tan 32^\circ \\
&= 0{,}62 \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \cos(p - q) \\
&= \cos(49^\circ - 32^\circ) \\
&= \cos 17^\circ \\
&= 0{,}96 \\
\text{RK} &= \cos p - \cos q \\
&= \cos 49^\circ - \cos 32^\circ \\
&= 0{,}65\ldots - 0{,}84\ldots \\
&= -0{,}19 \\
\therefore \text{LK} &\neq \text{RK}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \sin(2p) \\
&= \sin 2(49^\circ) \\
&= \sin 98^\circ \\
&= 0{,}99 \\
\text{RK} &= 2\sin p\cos p \\
&= 2\sin 49^\circ \cos 49^\circ \\
&= 2 \times 0{,}75\ldots \times 0{,}65\ldots \\
&= 0{,}99 \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}$$

2. Bepaal die grootte van die volgende hoeke (korrek tot een desimale plek):

a) $\cos\alpha = 0{,}64$

b) $\sin\theta + 2 = 2{,}65$

c) $\frac{1}{2}\cos 2\beta = 0{,}3$

d) $\tan\frac{\theta}{3} = \sin 48°$

e) $\cos 3p = 1{,}03$

f) $2\sin 3\beta + 1 = 2{,}6$

g) $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 4\frac{2}{3}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= 0{,}64\\ \therefore \alpha &= \cos^{-1} 0{,}64\\ &= 50{,}2°\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin\theta + 2 &= 2{,}65\\ \sin\theta &= 0{,}65\\ \therefore \theta &= \sin^{-1} 0{,}65\\ &= 40{,}5°\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cos 2\beta &= 0{,}3\\ \cos 2\beta &= 0{,}6\\ \therefore 2\beta &= \cos^{-1} 0{,}6\\ &= 53{,}1°\ldots\\ \therefore \beta &= \frac{1}{2} \times 53{,}1°\ldots\\ &= 26{,}6°\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\tan\frac{\theta}{3} &= \sin 48°\\ &= 0{,}74\ldots\\ \therefore \frac{\theta}{3} &= \tan^{-1} 0{,}74\ldots\\ &= 36{,}6°\ldots\\ \therefore \theta &= 3 \times 36{,}6°\ldots\\ &= 109{,}8°\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\cos 3p &= 1{,}03\\ \therefore 3p &= \cos^{-1} 1{,}03\\ &= \text{Geen oplossing}\end{aligned}$$

f)

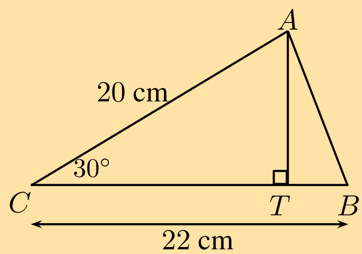
$$\begin{aligned}2\sin 3\beta + 1 &= 2{,}6\\ 2\sin 3\beta &= 1{,}6\\ \sin 3\beta &= 0{,}8\\ \therefore 3\beta &= \sin^{-1} 0{,}8\\ &= 53{,}1^\circ \ldots\\ \therefore \beta &= \frac{1}{3} \times 53{,}1^\circ \ldots\\ &= 17{,}7^\circ\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= 4\frac{2}{3}\\ \therefore \tan\theta &= 2{,}66\ldots\\ \therefore \theta &= \tan^{-1} 2{,}66\ldots\\ &= 69{,}4^\circ\end{aligned}$$

3. In $\triangle ABC$, $A\hat{C}B = 30^\circ$, $AC = 20$ cm en $BC = 22$ cm. Die loodregte lyn vanaf A sny BC by T.

Bepaal:



a) die lengte van TC

b) die lengte van AT

c) die hoek $B\hat{A}T$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\text{In } \triangle CAT: \quad \cos 30^\circ &= \frac{TC}{CA}\\ &= \frac{TC}{20}\\ \therefore TC &= 20 \times \cos 30^\circ\\ &= 17{,}3 \text{ cm}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\text{In } \triangle CAT: \quad \sin 30^\circ &= \frac{AT}{CA}\\ &= \frac{AT}{20}\\ \therefore AT &= 20 \times \sin 30^\circ\\ &= 10 \text{ cm}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} CB &= CT + TB \\ 22 &= 17{,}3 + TB \\ \therefore TB &= 22 - 17{,}3 \\ &= 4{,}7 \text{ cm} \\ \text{In } \triangle BAT: \quad \tan \hat{B} &= \frac{AT}{BT} \\ &= \frac{10}{4{,}7} \\ \therefore \hat{B} &= \tan^{-1}\left(\frac{10}{4{,}7}\right) \\ &= 64{,}8^\circ \end{aligned}$$

4. 'n Rombus het 'n omtrek van 40 cm en een van die binnehoeke is 30°.

   a) Bepaal die lengte van die sye.
   b) Bepaal die lengtes van die diagonale.
   c) Bereken die area van die rombus.

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned} \text{Sylengtes } &= \frac{40}{4} \\ &= 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

   b) Die diagonale van 'n ruit halveer mekaar loodreg en halveer ook die interne hoeke. Laat die kortste diagonaal $2x$ wees:

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \frac{x}{10} \\ \therefore x &= 10 \sin 15^\circ \\ \therefore \text{Kortste diagonaal } &= 2 \times 10 \sin 15^\circ \\ &= 5{,}2 \text{ cm} \end{aligned}$$

   Laat die langste diagonaal $2y$ wees:

$$\begin{aligned} \cos 15^\circ &= \frac{y}{10} \\ \therefore y &= 10 \cos 15^\circ \\ \therefore \text{Langste diagonaal } &= 2 \times 10 \cos 15^\circ \\ &= 19{,}3 \text{ cm} \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} \text{Area } &= b \times h_\perp \\ &= 10 \times 19{,}3 \times \sin 15^\circ \\ &= 50 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

5. Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

a) $2\sin 45^\circ \times 2\cos 45^\circ$

b) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

c) $\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ - \tan 45^\circ$

d) $4\sin 60^\circ \cos 30^\circ - 2\tan 45^\circ + \tan 60^\circ - 2\sin 60^\circ$

e) $\sin 60^\circ \times \sqrt{2\tan 45^\circ + 1} - \sin 30^\circ$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} 2\sin 45^\circ \times 2\cos 45^\circ &= 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 4 \times \frac{1}{(\sqrt{2})} \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ \cos 30^\circ - \cos 60^\circ \sin 30^\circ - \tan 45^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - 1 \\ &= -1\frac{1}{2} \end{aligned}$$

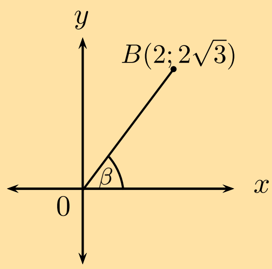
d)

$$\begin{aligned} &4\sin 60^\circ \cos 30^\circ - 2\tan 45^\circ + \tan 60^\circ - 2\sin 60^\circ \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times 1 + \sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3 - 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \sin 60^\circ \times \sqrt{2\tan 45^\circ + 1} - \sin 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2(1) + 1} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

6. Gegee die diagram hieronder:



Bepaal die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) β

b) $\cos\beta$

c) $\cos^2\beta + \sin^2\beta$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \tan\beta &= \frac{y}{x} \\ \tan\beta &= \frac{2\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \\ \therefore \beta &= 60^\circ \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} OB^2 &= x^2 + y^2 \quad (\text{ Pythagoras}) \\ OB^2 &= 2^2 + (2\sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 4(3) \\ &= 16 \\ \therefore OB &= 4 \\ \cos\beta &= \frac{x}{OB} \\ &= \frac{2}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \cos^2\beta + \sin^2\beta &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{4}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

7. Die 10 m leer van 'n brandweerwa leun teen die muur van 'n brandende gebou teen 'n hoek van 60°. 'n Oop venster in die gebou is 9 m van die grond af. Sal die leer tot by die venster kom?

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\frac{h}{10} &= \sin 60^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\therefore h &= \frac{10\sqrt{3}}{2} \\
&= 5\sqrt{3} \\
&= 8{,}66 \text{ m} \therefore \text{Nee, die leer is te kort.}
\end{aligned}
$$

6.2 Trigonometriese identiteite

Oefening 6 – 2: Trigonometriese identiteite

1. Vereenvoudig elk van die volgende tot een trigonometriese verhouding:

   a) $\dfrac{\sin \alpha}{\tan \alpha}$

   b) $\cos^2 \theta \tan^2 \theta + \tan^2 \theta \sin^2 \theta$

   c) $1 - \sin \theta \cos \theta \tan \theta$

   d) $\left(\dfrac{1 - \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta}\right) - \tan^2 \beta$

   Oplossing:

   a)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} &= \frac{\sin \alpha}{\tan \alpha} \\
&= \frac{\sin \alpha}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \\
&= \sin \alpha \times \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \\
&= \cos \alpha
\end{aligned}
$$

   b)

$$
\begin{aligned}
\cos^2 \theta \tan^2 \theta + \tan^2 \theta \sin^2 \theta &= \tan^2 \theta \left(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta\right) \\
&= \tan^2 \theta\,(1) \\
&= \tan^2 \theta
\end{aligned}
$$

   c)

$$
\begin{aligned}
1 - \sin \theta \cos \theta \tan \theta &= 1 - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right) \\
&= 1 - \sin^2 \theta \\
&= \cos^2 \theta
\end{aligned}
$$

d)

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-\cos^2\beta}{\cos^2\beta}\right)-\tan^2\beta &= \left(\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right)-\tan^2\beta\\ &= \left(\tan^2\beta\right)-\tan^2\beta\\ &= 0\end{aligned}$$

2. Bewys die volgende identiteite en noem die ontoelaatbare waardes of beperkings waar van toepassing:

   a) $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

   b) $\sin^2\alpha+(\cos\alpha-\tan\alpha)(\cos\alpha+\tan\alpha)=1-\tan^2\alpha$

   c) $\dfrac{1}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta\tan^2\theta}{1}=\cos\theta$

   d) $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta+\cos\theta-\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

   e) $\left(\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}+\tan\beta\right)\cos\beta=\dfrac{1}{\sin\beta}$

   f) $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

   g) $\dfrac{(1+\tan^2\alpha)\cos\alpha}{(1-\tan\alpha)}=\dfrac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\text{LK} &= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\\ &= \frac{(1+\sin\theta)}{\cos\theta})\times\frac{(1-\sin\theta)}{1-\sin\theta}\\ &= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}\\ &= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1-\sin\theta)}\\ &= \frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)}\\ &= \text{RK}\end{aligned}$$

Beperkings: ongedefiniëer as $\cos\theta=0, \sin\theta=1$ en as $\tan\theta$ ongedefiniëer is.

Dus $\theta\neq 90°; 270°$.

b)

$$\begin{aligned}\text{LK} &= \sin^2\alpha+(\cos\alpha-\tan\alpha)(\cos\alpha+\tan\alpha)\\ &= \sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\tan^2\alpha\\ &= 1-\tan^2\alpha\\ &= \text{RK}\end{aligned}$$

Beperkings: ongedefiniëer as $\tan\theta$ ongedefiniëer is.

Dus $\theta\neq 90°; 270°$.

c)

$$
\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta\tan^2\theta}{1} \\
&= \frac{1 - \cos^2\theta \times \tan^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{1 - \cos^2\theta \times \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\cos\theta} \\
&= \frac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \cos\theta \\
&= \text{RK}
\end{aligned}
$$

Beperkings: ongedefiniëer as $\cos\theta = 0$ en as $\tan\theta$ ongedefiniëer is. Dus $\theta \neq 90°; 270°$.

d)

$$
\begin{aligned}
\text{RK} &= \sin\theta + \cos\theta - \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta - 1}{\sin\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{1 + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta + \cos\theta} \\
&= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} \\
&= \text{LK}
\end{aligned}
$$

e)

$$
\begin{aligned}
\text{LK} &= \left(\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) \\
&= \left(\frac{\cos^2\beta + \sin^2\beta}{\sin\beta\cos\beta}\right)\cos\beta \\
&= \frac{1}{\sin\beta} \\
&= \text{RK}
\end{aligned}
$$

f)

$$
\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{1 - \sin\theta + 1 + \sin\theta}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} \\
&= \frac{2}{1 - \sin^2\theta} \\
&= \frac{2}{\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{RK} &= \frac{2\tan\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{2\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta\cos\theta} \\
&= \frac{2}{\cos^2\theta} \\
\therefore \text{LK} &= \text{RK}
\end{aligned}
$$

g)

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{(1+\tan^2\alpha)\cos\alpha}{(1-\tan\alpha)} \\
&= \frac{\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos\alpha}{\left(1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)} \\
&= \frac{\left(\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}} \\
&= \frac{1}{\cos\alpha} \times \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} \\
&= \frac{1}{\cos\alpha-\sin\alpha} \\
&= \text{RK}
\end{aligned}$$

6.3 Reduksieformules

Afleiding van reduksieformules

Oefening 6 – 3: Reduksieformules vir funksiewaardes van $180^\circ \pm \theta$

1. Bepaal die waardes van die volgende uitdrukkings sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

   a) $\tan 150^\circ \sin 30^\circ - \cos 210^\circ$

   b) $(1+\cos 120^\circ)(1-\sin^2 240^\circ)$

   c) $\cos^2 140^\circ + \sin^2 220^\circ$

   Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\tan 150^\circ \sin 30^\circ - \cos 210^\circ &= \tan(180^\circ - 30^\circ)\sin 30^\circ - \cos(180^\circ + 30^\circ)\\
&= -\tan 30^\circ \sin 30^\circ + \cos 30^\circ\\
&= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{6}\\
&= \frac{2\sqrt{3}}{6}\\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&(1 + \cos 120^\circ)(1 - \sin^2 240^\circ)\\
&= (1 + \cos(180^\circ - 60^\circ))\left(1 - \sin^2(180^\circ + 60^\circ)\right)\\
&= (1 - \cos 60^\circ)\left(1 - \sin^2 60^\circ\right)\\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{3}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\cos^2 140^\circ + \sin^2 220^\circ &= \cos^2(180^\circ - 40^\circ) + \sin^2(180^\circ + 40^\circ)\\
&= \cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ\\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Skryf die volgende in terme van 'n enkele trigonometriese verhouding:

a) $\tan(180^\circ - \theta) \times \sin(180^\circ + \theta)$

b) $\frac{\tan(180^\circ+\theta)\cos(180^\circ-\theta)}{\sin(180^\circ-\theta)}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\tan(180^\circ - \theta) \times \sin(180^\circ + \theta) &= -\tan\theta \times (-\sin\theta) \\
&= -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times (-\sin\theta) \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \\
&= \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(180^\circ + \theta)\cos(180^\circ - \theta)}{\sin(180^\circ - \theta)} &= -\frac{\tan\theta\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= -\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta}{\sin\theta} \\
&= -\frac{\sin\theta}{\sin\theta} \\
&= -1
\end{aligned}$$

3. As $t = \tan 40^\circ$, druk die volgende uit in term van t:

   a) $\tan 140^\circ + 3\tan 220^\circ$

   b) $\dfrac{\cos 220^\circ}{\sin 140^\circ}$

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned}
\tan 140^\circ + 3\tan 220^\circ &= \tan(180^\circ - 40^\circ) + 3\tan(180^\circ + 40^\circ) \\
&= -\tan 40^\circ + 3\tan 40^\circ \\
&= 2\tan 40^\circ \\
&= 2t
\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 220^\circ}{\sin 140^\circ} &= \frac{\cos(180^\circ + 40^\circ)}{\sin(180^\circ - 40^\circ)} \\
&= \frac{-\cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \\
&= -\left(\frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ}\right)^{-1} \\
&= -(\tan 40^\circ)^{-1} \\
&= -\frac{1}{\tan 40^\circ} \\
&= -\frac{1}{t}
\end{aligned}$$

Oefening 6 – 4: Gebruik reduksieformules

1. Vereenvoudig die volgende:

   a) $\dfrac{\tan(180° - \theta)\sin(360° + \theta)}{\cos(180° + \theta)\tan(360° - \theta)}$

   b) $\cos^2(360° + \theta) + \cos(180° + \theta)\tan(360° - \theta)\sin(360° + \theta)$

   c) $\dfrac{\sin(360° + \alpha)\tan(180° + \alpha)}{\cos(360° - \alpha)\tan^2(360° + \alpha)}$

   Oplossing:

   a)
   $$\begin{aligned}
   &= \frac{-\tan\theta\sin\theta}{(-\cos\theta)(-\tan\theta)} \\
   &= -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\
   &= -\tan\theta
   \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned}
   &\cos^2(360° + \theta) + \cos(180° + \theta)\tan(360° - \theta)\sin(360° + \theta) \\
   &= \cos^2\theta + (-\cos\theta)(-\tan\theta)(\sin\theta) \\
   &= \cos^2\theta + (\cos\theta)(\frac{\sin\theta}{\cos\theta})(\sin\theta) \\
   &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\
   &= 1
   \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned}
   &\frac{\sin(360° + \alpha)\tan(180° + \alpha)}{\cos(360° - \alpha)\tan^2(360° + \alpha)} \\
   &= \frac{\sin\alpha\tan\alpha}{\cos\alpha\tan^2\alpha} \\
   &= \frac{\sin\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\cos\alpha\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \\
   &= \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} \\
   &= \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} \times \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\
   &= 1
   \end{aligned}$$

2. Skryf die volgende in terme van $\cos\beta$:

   $\dfrac{\cos(360° - \beta)\cos(-\beta) - 1}{\sin(360° + \beta)\tan(360° - \beta)}$

   Oplossing:

   $$\begin{aligned}
   \frac{\cos(360° - \beta)\cos(-\beta) - 1}{\sin(360° + \beta)\tan(360° - \beta)} &= \frac{\cos\beta\cos\beta - 1}{(-\sin\beta)(-\tan\beta)} \\
   &= \frac{-(1 - \cos^2\beta)}{\sin\beta\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\
   &= \frac{-\sin^2\beta}{\sin^2\beta} \times \frac{\cos\beta}{1} \\
   &= -\cos\beta
   \end{aligned}$$

3. Vereenvoudig die volgende sonder die gebruik van 'n sakrekenaar.

a) $\dfrac{\cos 300^\circ \tan 150^\circ}{\sin 225^\circ \cos(-45^\circ)}$

b) $3\tan 405^\circ + 2\tan 330^\circ \cos 750^\circ$

c) $\dfrac{\cos 315^\circ \cos 405^\circ + \sin 45^\circ \sin 135^\circ}{\sin 750^\circ}$

d) $\tan 150^\circ \cos 390^\circ - 2\sin 510^\circ$

e) $\dfrac{2\sin 120^\circ + 3\cos 765^\circ - 2\sin 240^\circ - 3\cos 45^\circ}{5\sin 300^\circ + 3\tan 225^\circ - 6\cos 60^\circ}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos 300^\circ \tan 150^\circ}{\sin 225^\circ \cos(-45^\circ)} \\
&= \frac{\cos(360^\circ - 60^\circ)\tan(180^\circ - 30^\circ)}{\sin(180^\circ + 45^\circ)\cos(-45^\circ)} \\
&= \frac{\cos 60^\circ(-\tan 30^\circ)}{(-\sin 45^\circ)\cos 45^\circ} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}})}{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{3}})}{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
&3\tan 405^\circ + 2\tan 330^\circ \cos 750^\circ \\
&= 3\tan(360^\circ + 45^\circ) + 2\tan(360^\circ - 30^\circ)\cos\left(2(360^\circ) + 30^\circ\right) \\
&= 3\tan 45^\circ + 2(-\tan 30^\circ)\cos 30^\circ \\
&= 3\tan 45^\circ - 2(\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ})\cos 30^\circ \\
&= 3\tan 45^\circ - 2\sin 30^\circ \\
&= 3(1) - 2\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 2
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&\frac{\cos 315^\circ \cos 405^\circ + \sin 45^\circ \sin 135^\circ}{\sin 750^\circ} \\
&= \frac{\cos(360^\circ - 45^\circ)\cos(360^\circ + 45^\circ) + \sin 45^\circ \sin(180^\circ - 45^\circ)}{\sin\left(2(360^\circ) + 30^\circ\right)} \\
&= \frac{\cos 45^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \sin -45^\circ}{\sin 30^\circ} \\
&= \frac{\cos^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ}{\sin 30^\circ} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}} \\
&= 2
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\tan 150^\circ \cos 390^\circ - 2\sin 510^\circ \\
&= \tan(180^\circ - 30^\circ)\cos(360^\circ + 30^\circ) - 2\sin\left(2(360^\circ) + 150^\circ\right) \\
&= -\tan 30^\circ \cos 30^\circ - 2\sin 150^\circ \\
&= -\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\cos 30^\circ - 2\sin(180^\circ - 30^\circ) \\
&= -\sin 30^\circ - 2\sin 30^\circ \\
&= -3\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sin 120^\circ + 3\cos 765^\circ - 2\sin 240^\circ - 3\cos 45^\circ}{5\sin 330^\circ + 3\tan 225^\circ - 6\cos 60^\circ} \\
&= \frac{2\sin(180^\circ - 60^\circ) + 3\cos(45^\circ) - 2\sin(180^\circ + 60^\circ) - 3\cos 45^\circ}{5\sin(360^\circ - 30^\circ) + 3\tan(180^\circ + 45^\circ) - 6\cos 60^\circ} \\
&= \frac{2\sin 60^\circ + 3\cos 45^\circ + 2\sin 60^\circ - 3\cos 45^\circ}{-5\sin 30^\circ + 3\tan 45^\circ - 6\cos 60^\circ} \\
&= \frac{4\sin 60^\circ}{-5\sin 30^\circ + 3\tan 45^\circ - 6\cos 60^\circ} \\
&= \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{-5\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(1\right) - 6\left(\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{-\frac{5}{2}} \\
&= -2\sqrt{3} \times \frac{2}{5} \\
&= -\frac{4\sqrt{3}}{5}
\end{aligned}$$

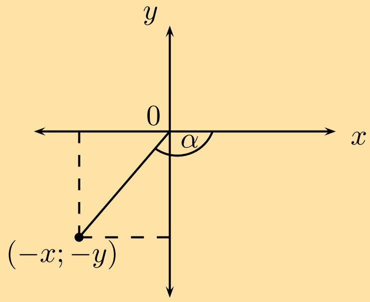
4. Gegee dat $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, gebruik 'n skets om te help verduidelik waarom:

   a) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

   b) $\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$

Oplossing:

a)



$$\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= \frac{-y}{r} \qquad \text{(lê in kwad III)} \\
&= -\sin\alpha
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \frac{-x}{r} \qquad \text{(lê in kwad III)} \\ &= -\cos\alpha \end{aligned}$$

5. As $t = \sin 43°$, druk die volgende uit in term van t:

   a) $\sin 317°$
   b) $\cos^2 403°$
   c) $\tan(-43°)$

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned} \sin 317° &= \sin(360° - 43°) \\ &= -\sin 43° \\ &= -t \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} \cos^2 403° &= \cos^2(360° + 43°) \\ &= \cos^2 43° \\ &= 1 - \sin^2 43° \\ &= 1 - t^2 \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} \tan(-43°) &= -\tan 43° \\ &= -\frac{\sin 43°}{\cos 43°} \\ &= \pm\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \end{aligned}$$

Oefening 6 – 5: Ko-funksies

1. Vereenvoudig die volgende:

   a) $\dfrac{\cos(90° + \theta)\sin(\theta + 90°)}{\sin(-\theta)}$
   b) $\dfrac{2\sin(90° - x) + \sin(90° + x)}{\sin(90° - x) + \cos(180° + x)}$

   Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\frac{\cos(90° + \theta)\sin(\theta + 90°)}{\sin(-\theta)} &= \frac{-\sin\theta\cos\theta}{-\sin\theta} \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}&\frac{2\sin(90° - x) + \sin(90° + x)}{\sin(90° - x) + \cos(180° + x)} \\ &= \frac{2\cos x + \cos x}{\cos x + \cos x} \\ &= \frac{3\cos x}{2\cos x} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. Gegee $\cos 36° = p$, druk die volgende uit in terme van p:

a) $\sin 54°$

b) $\sin 36°$

c) $\tan 126°$

d) $\cos 324°$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\sin 54° &= \sin(90° - 36°) \\ &= \cos 36° \\ &= p\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin 36° &= \sqrt{1 - \cos^2 36°} \\ &= \sqrt{1 - p^2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\tan 126° &= \frac{\sin(90° + 36°)}{\cos(90° + 36°)} \\ &= \frac{\cos 36°}{-\sin 36°} \\ &= -\frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\cos 324° &= \cos(360° - 36°) \\ &= \cos 36° \\ &= p\end{aligned}$$

Oefening 6 – 6: Reduksieformules

1. Skryf A en B elk as 'n enkele trigonometriese verhouding:

   a) $A = \sin(360^\circ - \theta)\cos(180^\circ - \theta)\tan(360^\circ + \theta)$

   b) $B = \dfrac{\cos(360^\circ + \theta)\cos(-\theta)\sin(-\theta)}{\cos(90^\circ + \theta)}$

   c) Bepaal vervolgens:

      i. $A + B = \ldots$

      ii. $\frac{A}{B} = \ldots$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} A &= \sin(360^\circ - \theta)\cos(180^\circ - \theta)\tan(360^\circ + \theta) \\ &= (-\sin\theta)(-\cos\theta)(\tan\theta) \\ &= \sin\theta\cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \sin^2\theta \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} B &= \frac{\cos(360^\circ + \theta)\cos(-\theta)\sin(-\theta)}{\cos(90^\circ + \theta)} \\ &= \frac{\cos\theta\cos\theta(-\sin\theta)}{-\sin\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta\sin\theta}{\sin\theta} \\ &= \cos^2\theta \\ &= \cos^2\theta \end{aligned}$$

c) i.

$$\begin{aligned} A + B &= \cos^2\theta + \sin^2\theta \\ &= 1 \end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \tan^2\theta \end{aligned}$$

2. Skryf die volgende as 'n funksie van 'n skerphoek:

   a) $\sin 163^\circ$

   b) $\cos 327^\circ$

   c) $\tan 248^\circ$

   d) $\cos(-213^\circ)$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \sin 163^\circ &= \sin(180^\circ - 17^\circ) \\ &= \sin 17^\circ \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\cos 327^\circ &= \cos(360^\circ - 33^\circ)\\ &= \cos 33^\circ\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\tan 248^\circ &= \tan(180^\circ + 68^\circ)\\ &= \tan 68^\circ\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\cos(-213^\circ) &= \cos 213^\circ\\ &= \cos(180^\circ + 33^\circ)\\ &= -\cos 33^\circ\end{aligned}$$

3. Bepaal die waarde van die volgende, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) $\dfrac{\sin(-30^\circ)}{\tan(150^\circ)} + \cos 330^\circ$

b) $\tan 300^\circ \cos 120^\circ$

c) $(1 - \cos 30^\circ)(1 - \cos 210^\circ)$

d) $\cos 780^\circ - (\sin 315^\circ)(\cos 405^\circ)$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\frac{\sin(-30^\circ)}{\tan(150^\circ)} + \cos 330^\circ &= \frac{-\sin 30^\circ}{\tan(180^\circ - 30^\circ)} + \cos(360^\circ - 30^\circ)\\ &= \frac{-\sin 30^\circ}{-\tan 30^\circ} + \cos 30^\circ\\ &= \frac{\sin 30^\circ}{\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}} + \cos 30^\circ\\ &= \cos 30^\circ + \cos 30^\circ\\ &= 2\cos 30^\circ\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\tan 300^\circ \cos 120^\circ &= \tan(360^\circ - 60^\circ)\cos(180^\circ - 60^\circ)\\ &= (-\tan 60^\circ)(-\cos 60^\circ)\\ &= \left(\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
&(1-\cos 30°)(1-\cos 210°)\\
&=(1-\cos 30°)(1-\cos(180°+30°))\\
&=(1-\cos 30°)(1+\cos 30°)\\
&=1-\cos^2 30°\\
&=\sin^2 30°\\
&=\sin^2 30°\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^2\\
&=\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\cos 780° - (\sin 315°)(\cos 405°)\\
&=\cos(2(360°)+60°)-(\sin(360°-45°))(\cos(360°+45°))\\
&=\cos 60°+\sin 45° \cos 45°\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\\
&=1
\end{aligned}$$

4. Bewys dat die volgende identiteit waar is en meld enige beperkings:
   $\dfrac{\sin(180°+\alpha)\tan(360°+\alpha)\cos\alpha}{\cos(90°-\alpha)}=\sin\alpha$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{LK} &= \frac{\sin(180°+\alpha)\tan(360°+\alpha)\cos\alpha}{\cos(90°-\alpha)}\\
&=\frac{(-\sin\alpha)\tan\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}\\
&=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\alpha\\
&=\sin\alpha\\
&=\text{RK}
\end{aligned}$$

6.4 Trigonometriese vergelykings

Oefening 6 – 7: Oplos van trigonometriese vergelykings

1. Bepaal die waardes van α vir $\alpha \in [0°; 360°]$ as:

a) $4\cos\alpha = 2$

b) $\sin\alpha + 3{,}65 = 3$

c) $\tan\alpha = 5\frac{1}{4}$

d) $\cos\alpha + 0{,}939 = 0$

e) $5\sin\alpha = 3$

f) $\frac{1}{2}\tan\alpha = -1{,}4$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} 4\cos\alpha &= 2 \\ \cos\alpha &= \frac{1}{2} \\ \text{verw } \angle &= \cos^{-1} 0{,}5 \\ &= 60^\circ \\ \therefore \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$

In die vierde kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 360^\circ - 60^\circ \\ &= 300^\circ \end{aligned}$$

$\alpha = 60^\circ; 300^\circ$

b)

$$\begin{aligned} \sin\alpha + 3{,}65 &= 3 \\ \sin\alpha &= -0{,}65 \\ \text{verw } \angle &= \sin^{-1} 0{,}65 \\ &= 40{,}5^\circ \end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ + 40{,}5^\circ \\ &= 220{,}5^\circ \end{aligned}$$

In die vierde kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 360^\circ - 40{,}5^\circ \\ &= 319{,}5^\circ \end{aligned}$$

$\alpha = 220{,}5^\circ; 319{,}5^\circ$

c)

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= 5\frac{1}{4} \\ \tan\alpha &= -5{,}25 \\ \text{verw } \angle &= \tan^{-1} 5{,}25 \\ &= 79{,}2^\circ \\ \therefore \alpha &= 79{,}2^\circ \end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° + 79{,}2° \\ &= 259{,}2° \end{aligned}$$

$\alpha = 79{,}2°; 259{,}2°$

d)

$$\begin{aligned} \cos\alpha + 0{,}939 &= 0 \\ \cos\alpha &= -0{,}939 \\ \text{verw } \angle &= \cos^{-1} 0{,}939 \\ &= 20{,}1° \end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° + 20{,}1° \\ &= 200{,}1° \end{aligned}$$

In die vierde kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 360° - 20{,}1° \\ &= 339{,}9° \end{aligned}$$

$\alpha = 200{,}1°; 339{,}9°$

e)

$$\begin{aligned} 5\sin\alpha &= 3 \\ \sin\alpha &= \frac{3}{5} \\ \text{verw } \angle &= \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \\ &= 36{,}9° \\ \therefore \alpha &= 36{,}9° \end{aligned}$$

In die tweede kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° - 20{,}1° \\ &= 143{,}1° \end{aligned}$$

$\alpha = 36{,}9°; 143{,}1°$

f)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\tan\alpha &= -1{,}4 \\ \tan\alpha &= -2{,}8 \\ \text{verw } \angle &= \tan^{-1} 2{,}8 \\ &= 70{,}3° \end{aligned}$$

In die tweede kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 180° - 70{,}3° \\ &= 109{,}7° \end{aligned}$$

In die vierde kwadrant:

$$\begin{aligned} \alpha &= 360° - 70{,}3° \\ &= 289{,}7° \end{aligned}$$

$\alpha = 109{,}7°; 289{,}7°$

2. Bepaal die waardes van θ vir $\theta \in [-360°; 360°]$ as:

   a) $\sin\theta = 0{,}6$
   b) $\cos\theta + \frac{3}{4} = 0$
   c) $3\tan\theta = 20$
   d) $\sin\theta = \cos 180°$
   e) $2\cos\theta = \frac{4}{5}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \sin\theta &= 0{,}6 \\ \text{verw } \angle &= \sin^{-1} 0{,}6 \\ &= 36{,}9° \\ \therefore \theta &= 36{,}9° \end{aligned}$$

In die tweede kwadrant:

$$\begin{aligned} \theta &= 180° - 36{,}9° \\ &= 143{,}1° \end{aligned}$$

Negatiewe hoeke:

$$\begin{aligned} \theta &= 36{,}9° - 360° \\ &= -323{,}1° \\ \text{en } \theta &= 143{,}1° - 360° \\ &= -216{,}9° \end{aligned}$$

$\theta = -323{,}1°; -216{,}9°; 36{,}9°; 143{,}1°$

b)

$$\begin{aligned} \cos\theta + \frac{3}{4} &= 0 \\ \cos\theta &= -\frac{3}{4} \\ \text{verw } \angle &= \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \\ &= 41{,}4° \end{aligned}$$

In die tweede kwadrant:

$$\begin{aligned}\theta &= 180° - 41{,}4° \\ &= 138{,}6°\end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned}\theta &= 180° + 41{,}4° \\ &= 221{,}4°\end{aligned}$$

Negatiewe hoeke:

$$\begin{aligned}\theta &= 138{,}6° - 360° \\ &= -221{,}4° \\ \text{en } \theta &= 221{,}4° - 360° \\ &= -138{,}6°\end{aligned}$$

$\theta = -221{,}4°; -138{,}6°; 138{,}6°; 221{,}4°$

c)

$$\begin{aligned}3\tan\theta &= 20 \\ \tan\theta &= \frac{20}{3} \\ \text{verw } \angle &= \tan^{-1}\left(\frac{20}{3}\right) \\ &= 81{,}5° \\ \theta &= 81{,}5°\end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned}\theta &= 180° + 81{,}5° \\ &= 261{,}5°\end{aligned}$$

Negatiewe hoeke:

$$\begin{aligned}\theta &= 81{,}5° - 360° \\ &= -278{,}5° \\ \text{en } \theta &= 261{,}5° - 360° \\ &= -98{,}5°\end{aligned}$$

$\theta = -278{,}5°; -98{,}5°; 81{,}5°; 261{,}5°$

d)

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \cos 180° \\ \sin\theta &= -1 \\ \text{verw } \angle &= \sin^{-1}(1) \\ &= 90°\end{aligned}$$

In die derde kwadrant:

$$\begin{aligned}\theta &= 180° + 90° \\ &= 270°\end{aligned}$$

Negatiewe hoeke:

$$\begin{aligned}\theta &= 270° - 360° \\ &= -90°\end{aligned}$$

$\theta = -90°; 270°$

e)

$$\begin{aligned}2\cos\theta &= \frac{4}{5} \\ \cos\theta &= \frac{2}{5} \\ \text{verw } \angle &= \cos^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \\ &= 66{,}4° \\ \theta &= 66{,}4°\end{aligned}$$

In die vierde kwadrant:

$$\begin{aligned}\theta &= 360° - 66{,}4° \\ &= 293{,}6°\end{aligned}$$

Negatiewe hoeke:

$$\begin{aligned}\theta &= 66{,}4° - 360° \\ &= -293{,}6° \\ \text{en } \theta &= 293{,}6° - 360° \\ &= -66{,}4°\end{aligned}$$

$\theta = -293{,}6°; -66{,}4°; 66{,}4°; 293{,}6°$

Die algemene oplossing

Oefening 6 – 8: Algemene oplossing

1. • Vind die algemene oplossing vir elke vergelyking.
   • Vind vervolgens al die oplossings in die interval $[-180°; 180°]$.

a) $\cos(\theta + 25°) = 0{,}231$

b) $\sin 2\alpha = -0{,}327$

c) $2\tan\beta = -2{,}68$

d) $\cos\alpha = 1$

e) $4\sin\theta = 0$

f) $\cos\theta = -1$

g) $\tan\frac{\theta}{2} = 0{,}9$

h) $4\cos\theta + 3 = 1$

i) $\sin 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \cos(\theta + 25°) &= 0{,}231 \\ \text{verw } \angle &= 76{,}64° \\ \text{kwad I:} \quad \theta + 25° &= 76{,}64° + n\ .\ 360°, n \in \mathbb{Z} \\ \therefore \theta &= 51{,}64° + n\ .\ 360° \\ \therefore \theta &= -128{,}36°; 51{,}64° \\ \text{kwad IV:} \quad \theta + 25° &= 360° - 76{,}64° + n\ .\ 360°, n \in \mathbb{Z} \\ \therefore \theta &= 258{,}36° + n\ .\ 360° \\ \therefore \theta &= -101{,}64° \end{aligned}$$

$\theta = -128{,}36°; -101{,}64°; 51{,}64°$

b)

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= -0{,}327 \\ \text{verw } \angle &= 19{,}09° \\ \text{kwad III:} \quad 2\alpha &= 180° + 19{,}09° + n\ .\ 360°, n \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha &= 199{,}09° + n\ .\ 360° \\ \therefore \alpha &= 99{,}55° + n\ .\ 180° \\ \therefore \alpha &= -80{,}45°; 99{,}55° \\ \text{kwad IV:} \quad 2\alpha &= 360° - 19{,}09° + n\ .\ 360°, n \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha &= 340{,}91° + n\ .\ 360° \\ \therefore \alpha &= 170{,}46° + n\ .\ 180° \\ \therefore \alpha &= -9{,}54°; 170{,}46° \end{aligned}$$

$\theta = -80{,}45°; -9{,}54°; 99{,}55°; 170{,}46°$

c)

$$\begin{aligned} 2\tan\theta &= -2{,}68 \\ \tan\theta &= -1{,}34 \\ \text{verw } \angle &= 53{,}27° \\ \text{kwad II:} \quad \theta &= 180° - 53{,}27° + n\ .\ 180°, n \in \mathbb{Z} \\ \therefore \theta &= 126{,}73° + n\ .\ 180° \\ \therefore \theta &= -53{,}27°; 126{,}73° \end{aligned}$$

$\theta = -53{,}27°; 126{,}73°$

d)

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= 1 \\ \text{verw } \angle &= 0° \\ \text{kwad I/IV:} \quad \alpha &= 0° + n\ .\ 360°, n \in \mathbb{Z} \\ \therefore \alpha &= 0° \end{aligned}$$

$\alpha = 0°$

e)

$$\begin{aligned}
4\sin\theta &= 0\\
\text{verw } \angle &= 0^\circ\\
\text{kwad I:}\quad \theta &= 0^\circ + n\ .\ 360^\circ, n \in \mathbb{Z}\\
\text{kwad II:}\quad \theta &= 180^\circ + n\ .\ 360^\circ, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\theta = -180^\circ; 0^\circ; 180^\circ$

f)

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= -1\\
\text{verw } \angle &= 0^\circ\\
\text{kwad I/III:}\quad \theta &= 180^\circ + n\ .\ 360^\circ, n \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\theta = -180^\circ; 180^\circ$

g)

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\theta}{2} &= 0{,}9\\
\text{verw } \angle &= 42^\circ\\
\text{kwad I:}\quad \frac{\theta}{2} &= 42^\circ + n\ .\ 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\\
\theta &= 84^\circ + n\ .\ 360^\circ\\
\text{kwad III:}\quad \frac{\theta}{2} &= 180^\circ + 42^\circ + n\ .\ 180^\circ, n \in \mathbb{Z}\\
\frac{\theta}{2} &= 222^\circ + n\ .\ 180^\circ\\
\therefore \theta &= 444^\circ + n\ .\ 360^\circ
\end{aligned}$$

$\theta = 84^\circ$

h)

$$\begin{aligned}
4\cos\theta + 3 &= 1\\
4\cos\theta &= -2\\
\cos\theta &= -\frac{1}{2}\\
\text{verw } \angle &= 60^\circ\\
\text{kwad II:}\quad \theta &= 180^\circ - 60^\circ + n\ .\ 360^\circ, n \in \mathbb{Z}\\
\therefore \theta &= 120^\circ + n\ .\ 360^\circ\\
\text{kwad III:}\quad \theta &= 180^\circ + 60^\circ + n\ .\ 360^\circ, n \in \mathbb{Z}\\
\therefore \theta &= 240^\circ + n\ .\ 360^\circ
\end{aligned}$$

$\theta = -120^\circ; 120^\circ$

i)

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\\
\text{verw } \angle &= 60^\circ\\
\text{kwad III:}\quad 2\theta &= 180^\circ + 60^\circ + n\ .\ 360^\circ, n \in \mathbb{Z}\\
2\theta &= 240^\circ + n\ .\ 360^\circ\\
\therefore \theta &= 120^\circ + n\ .\ 180^\circ\\
\text{kwad IV:}\quad \theta &= 360^\circ - 60^\circ + n\ .\ 360^\circ, n \in \mathbb{Z}\\
2\theta &= 300^\circ + n\ .\ 360^\circ\\
\therefore \theta &= 150^\circ + n\ .\ 180^\circ
\end{aligned}$$

$\theta = -60°; -30°; 120°; 150°$

2. Vind die algemene oplossing vir elke vergelyking.

a) $\cos(\theta + 20°) = 0$

b) $\sin 3\alpha = -1$

c) $\tan 4\beta = 0{,}866$

d) $\cos(\alpha - 25°) = 0{,}707$

e) $2 \sin \frac{3\theta}{2} = -1$

f) $5 \tan(\beta + 15°) = \frac{5}{\sqrt{3}}$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\cos(\theta + 20°) &= 0 \\
\text{verw } \angle &= 0° \\
\therefore \theta + 20° &= 0° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z} \\
\therefore \theta &= -20° + n \cdot 360°
\end{aligned}$$

$\theta = -20° + n \cdot 360°$

b)

$$\begin{aligned}
\sin 3\alpha &= -1 \\
\text{verw } \angle &= 90° \\
\therefore 3\alpha &= 90° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z} \\
\therefore \alpha &= 30° + n \cdot 120°
\end{aligned}$$

$\alpha = 30° + n \cdot 120°$

c)

$$\begin{aligned}
\tan 4\beta &= 0{,}866 \\
\text{verw } \angle &= 41° \\
\therefore 4\beta &= 41° + n \cdot 180°, n \in \mathbb{Z} \\
\therefore \beta &= 10{,}25° + n \cdot 45° \\
\text{kwad III:} \quad 4\beta &= 180° + 41° + n \cdot 180°, n \in \mathbb{Z} \\
&= 221° + n \cdot 180° \\
\therefore \beta &= 55{,}25° + n \cdot 45°
\end{aligned}$$

$\beta = 10{,}25° + n \cdot 45°$ of $\beta = 55{,}25° + n \cdot 45°$

d)

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha - 25°) &= 0{,}707 \\
\text{verw } \angle &= 45° \\
\therefore \alpha - 25° &= 45° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z} \\
\therefore \alpha &= 70° + n \cdot 360° \\
\text{kwad IV: } \alpha - 25° &= 360° - 45° + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z} \\
&= 340° + n \cdot 360°
\end{aligned}$$

$\alpha = 70° + n \cdot 360°$ of $\alpha = 340° + n \cdot 360°$

e)

$$
\begin{aligned}
2\sin\frac{3\theta}{2} &= -1 \\
\text{verw } \angle &= 30^\circ \\
\text{kwad III:} \quad \frac{3\theta}{2} &= 180^\circ + 30^\circ + n \;.\; 360^\circ, n \in \mathbb{Z} \\
\therefore \theta &= \frac{2}{3}(210^\circ + \times n \;.\; 360^\circ) \\
&= 140^\circ + n \;.\; 240^\circ \\
\text{kwad IV:} \quad \frac{3\theta}{2} &= 360^\circ - 30^\circ + n \;.\; 360^\circ, n \in \mathbb{Z} \\
\therefore \theta &= \frac{2}{3}(330^\circ + n \;.\; 360^\circ) \\
&= 220^\circ + n \;.\; 240^\circ
\end{aligned}
$$

$\theta = 140^\circ + n \;.\; 240^\circ$ of $\theta = 220^\circ + n \;.\; 240^\circ$

f) $\beta = 15^\circ + n \;.\; 180^\circ$

Oefening 6 – 9: Oplos van trigonometriese vergelykings

1. Vind die algemene oplossing vir elk van die volgende vergelykings:

a) $\cos 2\theta = 0$

b) $\sin(\alpha + 10^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{3} = 0$

d) $\frac{1}{2}\tan(\beta - 30^\circ) = -1$

e) $5\cos\theta = \tan 300^\circ$

f) $3\sin\alpha = -1{,}5$

g) $\sin 2\beta = \cos(\beta + 20^\circ)$

h) $0{,}5\tan\theta + 2{,}5 = 1{,}7$

i) $\sin(3\alpha - 10^\circ) = \sin(\alpha + 32^\circ)$

j) $\sin 2\beta = \cos 2\beta$

Oplossing:

a)

$$
\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 0 \\
\text{verw } \angle &= 90^\circ \\
\text{kwad I/II:} \quad 2\theta &= 90^\circ + k \;.\; 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\therefore \theta &= 45^\circ + \times k \;.\; 180^\circ \\
&= 140^\circ + k \;.\; 240^\circ \\
\text{kwad III/IV:} \quad 2\theta &= 270^\circ + k \;.\; 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\therefore \theta &= 135^\circ + k \;.\; 180^\circ
\end{aligned}
$$

$\theta = 45^\circ + k \;.\; 180^\circ$ of $\theta = 135^\circ + k \;.\; 180^\circ$

b)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + 10^\circ) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\text{verw } \angle &= 60^\circ \\
\text{kwad I:} \quad \alpha + 10^\circ &= 60^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\therefore \alpha &= 50^\circ + \times k\ .\ 360^\circ \\
\text{kwad III: } \alpha + 10^\circ &= 120^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\therefore \alpha &= 110^\circ + k\ .\ 360^\circ
\end{aligned}$$

$\alpha = 50^\circ + k\ .\ 360^\circ$ of $\alpha = 110^\circ + k\ .\ 360^\circ$

c)

$$\begin{aligned}
2\cos\frac{\theta}{2} - \sqrt{3} &= 0 \\
\cos\frac{\theta}{2} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\text{verw } \angle &= 30^\circ \\
\text{kwad I:} \quad \frac{\theta}{2} &= 30^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\therefore \theta &= 60^\circ + \times k\ .\ 720^\circ \\
\text{kwad IV: } \frac{\theta}{2} &= 330^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\therefore \theta &= 660^\circ + k\ .\ 720^\circ
\end{aligned}$$

$\theta = 60^\circ + k\ .\ 720^\circ$ of $\theta = 660^\circ + k\ .\ 720^\circ$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\tan(\beta - 30^\circ) &= -1 \\
\tan(\beta - 30^\circ) &= -2 \\
\text{verw } \angle &= 63{,}4^\circ \\
\text{kwad II:} \quad \beta - 30^\circ &= 116{,}6^\circ + k\ .\ 180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\therefore \beta &= 146{,}6^\circ + k\ .\ 180^\circ
\end{aligned}$$

$\beta = 146{,}6^\circ + k\ .\ 180^\circ$

e)

$$\begin{aligned}
5\cos\theta &= \tan 300^\circ \\
\cos\theta &= -0{,}3464 \\
\text{verw } \angle &= 69{,}73^\circ \\
\text{kwad II:} \quad \theta &= 110{,}27^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\text{kwad III:} \quad \theta &= 249{,}73^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\theta = 110{,}27^\circ + k\ .\ 360^\circ$ of $\theta = 249{,}73^\circ + k\ .\ 360^\circ$

f)

$$\begin{aligned}
3\sin\alpha &= -1{,}5 \\
\sin\alpha &= -0{,}5 \\
\text{verw } \angle &= 30^\circ \\
\text{kwad III:} \quad \alpha &= 210^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\
\text{kwad IV:} \quad \alpha &= 330^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

$\alpha = 210^\circ + k\ .\ 360^\circ$ of $\alpha = 330^\circ + k\ .\ 360^\circ$

g)

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \cos(\beta + 20^\circ) \\ 2\beta + \beta + 20^\circ &= 90^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ 3\beta &= 70^\circ + k\ .\ 360^\circ \\ \beta &= 23{,}3^\circ + k\ .\ 120^\circ \end{aligned}$$

$\beta = 23{,}3^\circ + k\ .\ 120^\circ$

h)

$$\begin{aligned} 0{,}5\tan\theta + 2{,}5 &= 1{,}7 \\ \tan\theta &= -1{,}6 \\ \text{verw } \angle &= 58^\circ \\ \text{kwad III:} \quad \theta &= 122^\circ + k\ .\ 180^\circ, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$\theta = 122^\circ + k\ .\ 180^\circ$

i)

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha - 10^\circ) &= \sin(\alpha + 32^\circ) \\ 3\alpha - 10^\circ &= \alpha + 32^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha &= 42^\circ + k\ .\ 360^\circ \\ \alpha &= 21^\circ + k\ .\ 180^\circ \\ \text{of} \quad 3\alpha - 10^\circ &= 180^\circ - (\alpha + 32^\circ) + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ 4\alpha &= 158^\circ + k\ .\ 360^\circ \\ \therefore \alpha &= 39{,}5^\circ + k\ .\ 90^\circ \end{aligned}$$

$\alpha = 21^\circ + k\ .\ 180^\circ$ of $\alpha = 39{,}5^\circ + k\ .\ 90^\circ$

j)

$$\begin{aligned} \sin 2\beta &= \cos 2\beta \\ \tan 2\beta &= 1 \\ \text{verw } \angle &= 45^\circ \\ 2\beta &= 45^\circ + k\ .\ 180^\circ, k \in \mathbb{Z} \\ \therefore \beta &= 22{,}5^\circ + k\ .\ 90^\circ \end{aligned}$$

$\beta = 22{,}5^\circ + k\ .\ 90^\circ$

2. Vind θ as $\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta = 0$ vir $\theta \in [0^\circ; 360^\circ]$.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin\theta &= 0 \\ \sin\theta(\sin\theta + \frac{1}{2}) &= 0 \\ \therefore \sin\theta = 0 \text{ of } \sin\theta &= -\frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 0^\circ, 180^\circ \text{ of } 360^\circ \\ \text{of } \sin\theta &= -\frac{1}{2} \\ \text{verw } \angle &= 30^\circ \\ \therefore \theta &= 210^\circ \text{ of } 330^\circ \end{aligned}$$

$\theta = 0^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 330^\circ$ of 360°

3. Bepaal die algemene oplossing vir elk van die volgende:

a) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 2$

b) $3\tan^2\theta + 2\tan\theta = 0$

c) $\cos^2\alpha = 0{,}64$

d) $\sin(4\beta + 35°) = \cos(10° - \beta)$

e) $\sin(\alpha + 15°) = 2\cos(\alpha + 15°)$

f) $\sin^2\theta - 4\cos^2\theta = 0$

g) $\dfrac{\cos(2\theta + 30°)}{2} + 0{,}38 = 0$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
2\cos^2\theta - 3\cos\theta &= 2\\
(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 2) &= 0\\
\therefore \cos\theta &= -\frac{1}{2} \text{ of } \cos\theta = 2\\
\text{Vir } \cos\theta &= 2\\
&\therefore \text{Geen oplossing}\\
\text{Vir } \cos\theta &= -\frac{1}{2}\\
\text{verw } \angle &= 60°\\
\text{kwad II: } \theta &= 180° - 60° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}\\
\therefore \theta &= 120° + \times k\ .\ 360°\\
\text{kwad III: } \theta &= 180° + 60° + k\ .\ 360°, k \in \mathbb{Z}\\
\therefore \theta &= 240° + k\ .\ 360°
\end{aligned}$$

$\theta = 120° + k\ .\ 360°$ of $\theta = 240° + k\ .\ 360°$

b)

$$\begin{aligned}
3\tan^2\theta + 2\tan\theta &= 0\\
\tan\theta(3\tan\theta + 2) &= 0\\
\therefore \tan\theta &= -\frac{2}{3} \text{ of } \tan\theta = 0\\
\text{Vir } \tan\theta &= -\frac{1}{2}\\
\theta &= 0° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z}\\
\text{Vir } \tan\theta &= -\frac{2}{3}\\
\text{verw } \angle &= 33{,}7°\\
\theta &= 180° - 33{,}7° + k\ .\ 180°, k \in \mathbb{Z}\\
\therefore \theta &= 146{,}3° + \times k\ .\ 180°
\end{aligned}$$

$\theta = 0° + k\ .\ 180°$ of $\theta = 146{,}3° + k\ .\ 180°$

c)

$$\begin{aligned}
\cos^2\alpha &= 0{,}64\\
\therefore \cos\alpha &= \pm 0{,}8\\
\text{Vir }\cos\alpha &= -0{,}8\\
\text{verw }\angle &= 36{,}9^\circ\\
\text{kwad II: }\alpha &= 180^\circ - 36{,}9^\circ + k\ .\ 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\\
\therefore \alpha &= 143{,}1^\circ + \times k\ .\ 360^\circ\\
\text{Vir }\cos\alpha &= 0{,}8\\
\text{kwad III: }\alpha &= 180^\circ + 36{,}9^\circ + k\ .\ 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\\
\therefore \alpha &= 216{,}9^\circ + k\ .\ 360^\circ\\
\text{kwad IV: }\alpha &= 360^\circ - 36{,}9^\circ + k\ .\ 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\\
\therefore \alpha &= 323{,}1^\circ + k\ .\ 360^\circ
\end{aligned}$$

$\alpha = 36{,}9^\circ + k\ .\ 360^\circ$ of $\alpha = 143{,}1^\circ + k\ .\ 360^\circ$ of $\alpha = 216{,}9^\circ + k\ .\ 360^\circ$ of $\alpha = 323{,}1^\circ + k\ .\ 360^\circ$

d)

$$\begin{aligned}
\sin(4\beta + 35^\circ) &= \cos(10^\circ - \beta)\\
\sin(4\beta + 35^\circ) &= \sin\left(90^\circ(10^\circ - \beta)\right)\\
\sin(4\beta + 35^\circ) &= \sin\left(80^\circ + \beta\right)\\
4\beta + 35^\circ &= 80^\circ + \beta + k\ .\ 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\\
3\beta &= 45^\circ + k\ .\ 360^\circ\\
\beta &= 15^\circ + k\ .\ 120^\circ\\
\text{of}\quad (4\beta + 35^\circ) + (10^\circ - \beta) &= 270^\circ + k\ .\ 360^\circ, k\in\mathbb{Z}\\
3\beta &= 225^\circ + k\ .\ 360^\circ\\
\beta &= 75^\circ + k\ .\ 120^\circ
\end{aligned}$$

$\beta = 15^\circ + k\ .\ 120^\circ$ of $\beta = 75^\circ + k\ .\ 120^\circ$

e)

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + 15^\circ) &= 2\cos(\alpha + 15^\circ)\\
\frac{\sin(\alpha + 15^\circ)}{\cos(\alpha + 15^\circ)} &= 2\\
\tan(\alpha + 15^\circ) &= 2\\
\text{verw }\angle &= 63{,}4^\circ\\
\alpha + 15^\circ &= 63{,}4^\circ + k\ .\ 180^\circ, k\in\mathbb{Z}\\
\alpha &= 48{,}4^\circ + k\ .\ 180^\circ
\end{aligned}$$

$\alpha = 48{,}4^\circ + k\ .\ 180^\circ$

f)

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta - 4\cos^2\theta &= 0\\
(\sin\theta - 2\cos^2\theta)(\sin\theta + 2\cos^2\theta) &= 0\\
\therefore \sin\theta - 2\cos^2\theta &= 0\\
\sin\theta &= 2\cos^2\theta\\
\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= 2\\
\tan\theta &= 2\\
\text{verw } \angle &= 63{,}4^\circ\\
\theta &= 63{,}4^\circ + k\ .\ 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\\
\text{of } \sin\theta + 2\cos^2\theta &= 0\\
\sin\theta &= -2\cos^2\theta\\
\frac{\sin\theta}{\cos\theta} &= -2\\
\tan\theta &= -2\\
\text{verw } \angle &= -63{,}4^\circ + 180^\circ + k\ .\ 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\\
\theta &= 116{,}6^\circ + k\ .\ 180^\circ
\end{aligned}$$

$\theta = 63{,}4^\circ + k\ .\ 180^\circ$ of $\theta = 116{,}6^\circ + k\ .\ 180^\circ$

g)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(2\theta + 30^\circ)}{2} + 0{,}38 &= 0\\
\frac{\cos(2\theta + 30^\circ)}{2} &= -0{,}38\\
\cos(2\theta + 30^\circ) &= -0{,}76\\
\text{verw } \angle &= 40{,}5^\circ\\
2\theta + 30^\circ) &= 180^\circ - 40{,}5^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\\
2\theta &= 109{,}5^\circ + k\ .\ 360^\circ\\
\theta &= 54{,}8^\circ + k\ .\ 180^\circ\\
\text{of} \quad 2\theta + 30^\circ) &= 180^\circ + 40{,}5^\circ + k\ .\ 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\\
2\theta &= 190{,}5^\circ + k\ .\ 360^\circ\\
\theta &= 95{,}25^\circ + k\ .\ 180^\circ
\end{aligned}$$

$\theta = 54{,}8^\circ + k\ .\ 180^\circ$ of $\theta = 95{,}25^\circ + k\ .\ 180^\circ$

4. Vind β as $\frac{1}{3}\tan\beta = \cos 200^\circ$ vir $\beta \in [-180^\circ; 180^\circ]$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\tan\beta &= \cos 200^\circ\\
\frac{1}{3}\tan\beta &= -0{,}9396\\
\tan\beta &= -2{,}819\\
\text{verw } \angle &= 70{,}5^\circ\\
\beta &= 180^\circ - 70{,}47^\circ + k\ .\ 180^\circ, k \in \mathbb{Z}\\
\beta &= 109{,}5^\circ + k\ .\ 180^\circ\\
\therefore \beta &= -70{,}5^\circ \text{ of } \beta = 109{,}5^\circ
\end{aligned}$$

$\beta = -70{,}5°$ of $\beta = 109{,}5°$

6.5 Area-, sinus- en kosinusreëls

Die areareël

Oefening 6 – 10: Die areareël

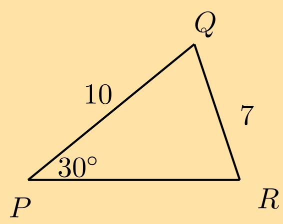
1. Teken 'n skets en bereken die area van $\triangle PQR$ as gegee word dat:

   a) $\hat{Q} = 30°$; $r = 10$ en $p = 7$

   b) $\hat{R} = 110°$; $p = 8$ en $q = 9$

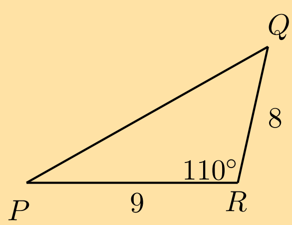
   Oplossing:

   a)



$$\text{Area } \triangle PQR = \frac{1}{2}(7)(10)\sin 30° \\ = 17{,}5 \text{ vierkante eenhede}$$

   b)



$$\text{Area } \triangle PQR = \frac{1}{2}(8)(9)\sin 110° \\ = 33{,}8 \text{ vierkante eenhede}$$

2. Vind die area van $\triangle XYZ$ as gegee is dat $XZ = 52$ cm, $XY = 29$ cm en $\hat{X} = 58{,}9°$.

   Oplossing:

$$\text{Area } \triangle XYZ = \frac{1}{2}(52)(29)\sin 58{,}9° \\ = 645{,}6 \text{ vierkante eenhede}$$

3. Bepaal die area van 'n parallelogram waarvan die lengtes van twee aangrensende sye 10 cm en 13 cm is en die hoek tussen hulle $55°$ is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Area } &= 2\left(\frac{1}{2}(13)(10)\sin 55°\right) \\ &= 106{,}5 \text{ vierkante eenhede} \end{aligned}$$

4. As die area van $\triangle ABC$ 5000 m^2 is, met $a = 150$ m en $b = 70$ m, wat is die twee moontlike grootttes van $\hat{C}$?

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Area } &= \frac{1}{2}(150)(70)\sin \hat{C} \\ \therefore 5000 &= 5250 \sin \hat{C} \\ \therefore \sin \hat{C} &= \frac{5000}{5250} \\ \therefore \hat{C} &= 72{,}2° \\ \text{of } \hat{C} &= 180° - 72{,}2° \\ &= 107{,}8° \end{aligned}$$

Die sinusreël

Oefening 6 – 11: Sinusreël

1. Vind al die onbekende sye en hoeke van die volgende driehoeke:

   a) $\triangle PQR$ waarin $\hat{Q} = 64°$; $\hat{R} = 24°$ en $r = 3$
   b) $\triangle KLM$ waarin $\hat{K} = 43°$; $\hat{M} = 50°$ en $m = 1$
   c) $\triangle ABC$ waarin $\hat{A} = 32{,}7°$; $\hat{C} = 70{,}5°$ en $a = 52{,}3$
   d) $\triangle XYZ$ waarin $\hat{X} = 56°$; $\hat{Z} = 40°$ en $x = 50$

   Oplossing:

a)

$$
\begin{aligned}
\frac{q}{\sin \hat{Q}} &= \frac{r}{\sin \hat{R}} \\
\frac{q}{\sin 64^\circ} &= \frac{3}{\sin 24^\circ} \\
q &= \frac{3 \sin 64^\circ}{\sin 24^\circ} \\
&= 6{,}6 \text{ eenhede}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{P} &= 180^\circ - 64^\circ - 24^\circ \\
&= 92^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{p}{\sin \hat{P}} &= \frac{r}{\sin \hat{R}} \\
\frac{p}{\sin 92^\circ} &= \frac{3}{\sin 24^\circ} \\
p &= \frac{3 \sin 92^\circ}{\sin 24^\circ} \\
&= 7{,}4 \text{ eenhede}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{m}{\sin \hat{M}} &= \frac{l}{\sin \hat{L}} \\
\frac{1}{\sin 50^\circ} &= \frac{l}{\sin 87^\circ} \\
l &= \frac{\sin 87^\circ}{\sin 50^\circ} \\
&= 1{,}3 \text{ eenhede}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{L} &= 180^\circ - 50^\circ - 43^\circ \\
&= 87^\circ
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{k}{\sin \hat{K}} &= \frac{m}{\sin \hat{M}} \\
\frac{k}{\sin 43^\circ} &= \frac{1}{\sin 50^\circ} \\
k &= \frac{\sin 43^\circ}{\sin 50^\circ} \\
&= 0{,}89 \text{ eenhede}
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{c}{\sin \hat{C}} &= \frac{a}{\sin \hat{A}} \\
\frac{c}{\sin 70{,}5^\circ} &= \frac{52{,}3}{\sin 32{,}7^\circ} \\
c &= \frac{52{,}3 \sin 70{,}5^\circ}{\sin 32{,}7^\circ} \\
&= 91{,}3 \text{ eenhede} \\
\hat{B} &= 180^\circ - 70{,}5^\circ - 32{,}7^\circ \\
&= 76{,}8^\circ \\
\frac{b}{\sin \hat{B}} &= \frac{a}{\sin \hat{A}} \\
\frac{b}{\sin 76{,}8^\circ} &= \frac{52{,}3}{\sin 32{,}7^\circ} \\
b &= \frac{52{,}3 \sin 76{,}8^\circ}{\sin 32{,}7^\circ} \\
&= 94{,}3 \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\sin \hat{X}} &= \frac{z}{\sin \hat{Z}} \\
\frac{50}{\sin 56^\circ} &= \frac{z}{\sin 40^\circ} \\
z &= \frac{50 \sin 40^\circ}{\sin 56^\circ} \\
&= 38{,}8 \text{ eenhede} \\
\hat{Y} &= 180^\circ - 56^\circ - 40^\circ \\
&= 84^\circ \\
\frac{y}{\sin \hat{Y}} &= \frac{x}{\sin \hat{X}} \\
\frac{y}{\sin 84^\circ} &= \frac{50}{\sin 40^\circ} \\
y &= \frac{50 \sin 84^\circ}{\sin 56^\circ} \\
&= 60 \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

2. In $\triangle ABC$, $\hat{A} = 116^\circ$; $\hat{C} = 32^\circ$ en $AC = 23$ m. Vind die lengte van sye AB en BC.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
\hat{B} &= 180^\circ - 116^\circ - 32^\circ \\
&= 32^\circ \\
\frac{a}{\sin \hat{A}} &= \frac{b}{\sin \hat{B}} \\
\frac{a}{\sin 116^\circ} &= \frac{23}{\sin 32^\circ} \\
a &= \frac{23 \sin 116^\circ}{\sin 32^\circ} \\
&= 39{,}01 \text{ eenhede} \\
b &= 23 \text{ eenhede}
\end{aligned}$$

3. In $\triangle RST$, $\hat{R} = 19°$; $\hat{S} = 30°$ en $RT = 120$ km. Vind die lengte van sy ST.

Oplossing:

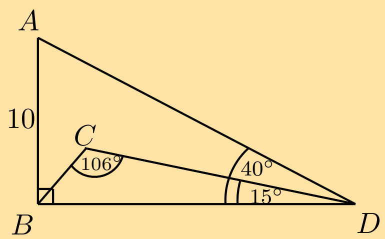
$$\begin{aligned}
\frac{s}{\sin \hat{S}} &= \frac{r}{\sin \hat{R}} \\
\frac{120}{\sin 30°} &= \frac{ST}{\sin 19°} \\
ST &= \frac{120 \sin 19°}{\sin 30°} \\
&= 78{,}1 \text{ km}
\end{aligned}$$

4. In $\triangle KMS$, $\hat{K} = 20°$; $\hat{M} = 100°$ en $s = 23$ cm. Vind die lengte van sy m.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
\hat{S} &= 180° - 100° - 20° \\
&= 60° \\
\frac{m}{\sin \hat{M}} &= \frac{s}{\sin \hat{S}} \\
\frac{m}{\sin 100°} &= \frac{23}{\sin 60°} \\
m &= \frac{23 \sin 100°}{\sin 60°} \\
&= 26{,}2 \text{ cm}
\end{aligned}$$

5. In $\triangle ABD$, $\hat{B} = 90°$, $AB = 10$ cm en $A\hat{D}B = 40°$. In $\triangle BCD$, $\hat{C} = 106°$ en $C\hat{D}B = 15°$. Bepaal BC.



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\frac{BD}{\sin 50°} &= \frac{10}{\sin 40°} \\
BD &= \frac{10 \sin 50°}{\sin 40°} \\
&= 11{,}92 \text{ cm} \\
\frac{BC}{\sin 15°} &= \frac{11{,}92}{\sin 106°} \\
BC &= \frac{11{,}92 \sin 15°}{\sin 106°} \\
&= 3{,}2 \text{ cm}
\end{aligned}$$

6. In $\triangle ABC$, $\hat{A} = 33°$, $AC = 21$ mm en $AB = 17$ mm. Kan jy BC bepaal?

Oplossing:

Nee, daar is nie genoeg inligting nie

Die kosinusreël

Oefening 6 – 12: Die kosinusreël

1. Los die volgende driehoeke op (d.w.s. vind al die onbekende sye en hoeke):

   a) $\triangle ABC$ waarin $\hat{A} = 70°$; $b = 4$ en $c = 9$

   b) $\triangle RST$ waarin $RS = 14$; $ST = 26$ en $RT = 16$

   c) $\triangle KLM$ waarin $KL = 5$; $LM = 10$ en $KM = 7$

   d) $\triangle JHK$ waarin $\hat{H} = 130°$; $JH = 13$ en $HK = 8$

   e) $\triangle DEF$ waarin $d = 4$; $e = 5$ en $f = 7$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \\ a^2 &= 4^2 + 9^2 - 2(9)(4)\cos\hat{70}° \\ &= 72{,}374\ldots \\ \therefore a &= 8{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 + a^2 - 2ba\cos\hat{C} \\ 9^2 &= 4^2 + 8{,}5^2 - 2(4)(8{,}5)\cos\hat{C} \\ \therefore \hat{C} &= 83{,}9° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{B} &= 180° - 70° - 83{,}9° \\ \therefore \hat{B} &= 26{,}1° \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} r^2 &= s^2 + t^2 - 2st\cos\hat{R} \\ 26^2 &= 16^2 + 14^2 - 2(16)(14)\cos\hat{R} \\ \therefore \hat{R} &= 120° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s^2 &= r^2 + t^2 - 2rt\cos\hat{S} \\ 16^2 &= 26^2 + 14^2 - 2(26)(14)\cos\hat{S} \\ \therefore \hat{S} &= 32{,}2° \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= 180° - 120° - 32{,}2° \\ \therefore \hat{T} &= 27{,}8° \end{aligned}$$

c)

$$m^2 = k^2 + l^2 - 2kl \cos \hat{M}$$
$$5^2 = 10^2 + 7^2 - 2(10)(7) \cos \hat{M}$$
$$\therefore \hat{M} = 27{,}7°$$

$$l^2 = k^2 + m^2 - 2km \cos \hat{L}$$
$$7^2 = 10^2 + 5^2 - 2(10)(5) \cos \hat{L}$$
$$\therefore \hat{L} = 40{,}5°$$

$$\hat{K} = 180° - 27{,}7° - 40{,}5°$$
$$\therefore \hat{K} = 111{,}8°$$

d)

$$h^2 = j^2 + k^2 - 2jk \cos \hat{H}$$
$$h^2 = 13^2 + 8^2 - 2(13)(8) \cos \hat{130°}$$
$$= 366{,}69\ldots$$
$$\therefore h = 19{,}1$$

$$k^2 = j^2 + h^2 - 2jh \cos \hat{K}$$
$$13^2 = 8^2 + 19{,}1^2 - 2(8)(19{,}1) \cos \hat{K}$$
$$\therefore \hat{K} = 31{,}8°$$

$$\hat{J} = 180° - 130° - 31{,}8°$$
$$\therefore \hat{J} = 18{,}2°$$

e)

$$e^2 = d^2 + f^2 - 2df \cos \hat{E}$$
$$5^2 = 4^2 + 7^2 - 2(4)(7) \cos \hat{E}$$
$$\therefore \hat{E} = 44{,}4°$$

$$d^2 = e^2 + f^2 - 2ef \cos \hat{D}$$
$$4^2 = 5^2 + 7^2 - 2(7)(5) \cos \hat{D}$$
$$\therefore \hat{D} = 34{,}0°$$

$$\hat{F} = 180° - 44{,}4° - 34{,}0°$$
$$\therefore \hat{F} = 101{,}6°$$

2. Vind die lengte van die derde sy van die $\triangle XYZ$ waar:

   a) $\hat{X} = 71{,}4°$; $y = 3{,}42$ km en $z = 4{,}03$ km
   b) $x = 103{,}2$ cm; $\hat{Y} = 20{,}8°$ en $z = 44{,}59$ cm

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + z^2 - 2yz\cos\hat{X} \\ x^2 &= 3{,}42^2 + 4{,}03^2 - 2(3{,}42)(4{,}03)\cos 71\hat{,}4^\circ \\ &= 19{,}14\ldots \\ \therefore x &= 4{,}4 \text{ km} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} y^2 &= x^2 + z^2 - 2xz\cos\hat{Y} \\ y^2 &= 103{,}2^2 + 44{,}59^2 - 2(103{,}2)(44{,}59)\cos 20\hat{,}8^\circ \\ &= 4034{,}95\ldots \\ \therefore y &= 63{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

3. Bepaal die grootste hoek in:

   a) $\triangle JHK$ waarin $JH = 6$; $HK = 4$ en $JK = 3$

   b) $\triangle PQR$ waar $p = 50$; $q = 70$ en $r = 60$

Oplossing:

a)

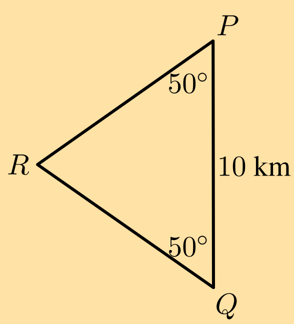
$$\begin{aligned} k^2 &= j^2 + h^2 - 2jh\cos\hat{K} \\ 6^2 &= 4^2 + 3^2 - 2(4)(3)\cos\hat{K} \\ \therefore \hat{K} &= 117{,}3^\circ \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} q^2 &= p^2 + r^2 - 2pr\cos\hat{Q} \\ 70^2 &= 60^2 + 50^2 - 2(60)(50)\cos\hat{Q} \\ \therefore \hat{Q} &= 78{,}5^\circ \end{aligned}$$

Oefening 6 – 13: Area-, sinus- en kosinusreël

1. Q is ’n skip by ’n punt 10 km suid van ’n ander skip P. R is ’n vuurtoring op die kus sodat $\hat{P} = \hat{Q} = 50^\circ$.



Bepaal:

a) die afstand QR

b) die kortste afstand van die vuurtoring na die denkbeeldige lyn wat die twee skepe verbind (PQ)

Oplossing:

a)

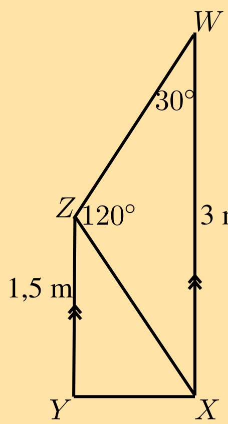
$$\begin{aligned}\frac{QR}{\sin 50°} &= \frac{10}{\sin 80°}\\ QR &= \frac{10 \sin 50°}{\sin 80°}\\ \therefore QR &= 7{,}78 \text{ km}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{h}{5} &= \tan 50°\\ \therefore h &= 6 \text{ km}\end{aligned}$$

2. $WXYZ$ is 'n trapesium, $WX \parallel YZ$ met $WX = 3$ m; $YZ = 1{,}5$ m; $\hat{Z} = 120°$ en $\hat{W} = 30°$.

   Bepaal die afstande XZ en XY.



Oplossing:

$$\begin{aligned}\text{In } \triangle XWZ, \quad \frac{ZX}{\sin 30°} &= \frac{3}{\sin 120°}\\ XZ &= \frac{3 \sin 30°}{\sin 120°}\\ \therefore XZ &= 1{,}73 \text{ km}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}X\hat{Z}Y &= 180° - 120° - 30°\\ \therefore X\hat{Z}Y &= 30°\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{In } \triangle XZY, XY^2 &= (1{,}73)^2 + (1{,}5)^2 - 2(1{,}73)(1{,}5)\cos 30°\\ \therefore XY &= 0{,}87 \text{ km}\end{aligned}$$

3. Tydens 'n vlug vanaf Johannesburg na Kaapstad ontdek die loods dat hy $3°$ van koers af gevlieg het. Op hierdie tydstip is die vliegtuig 500 km van Johannesburg af. Die direkte afstand tussen Kaapstad en Johannesburg lughawens is 1552 km. Bepaal, tot die naaste km:

    a) Die afstand wat die vliegtuig moet vlieg om by Kaapstad te kom en vervolgens die addisionele afstand wat die vliegtuig moet vlieg weens die loods se fout.

    b) Die korreksie, tot een honderste van 'n graad, aan die vliegtuig se koers (of rigting).

    Oplossing:

    a)

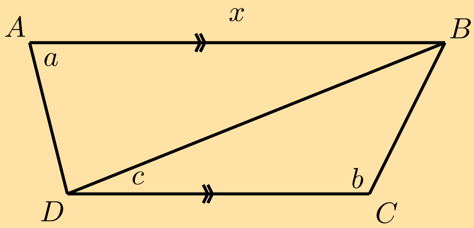
$$\begin{aligned} x^2 &= (500)^2 + (1552)^2 - 2(500)(1552)\cos 3° \\ \therefore x &= 1053 \text{ km} \end{aligned}$$

    b)

$$\begin{aligned} \frac{\sin\theta}{1552} &= \frac{\sin 3°}{1053} \\ \sin\theta &= \frac{1552\sin 3°}{1053} \\ \therefore \theta &= 4{,}42° \end{aligned}$$

4. $ABCD$ is 'n trapesium (bedoelende dat $AB \parallel CD$). $AB = x$; $B\hat{A}D = a$; $B\hat{C}D = b$ en $B\hat{D}C = c$.

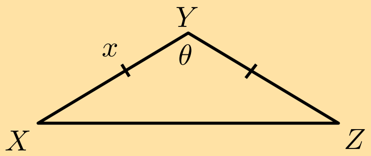
    Vind 'n uitdrukking vir die lengte van CD in terme van x, a, b en c.



    Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{DB}{\sin a} &= \frac{x}{\sin[180° - (a+c)]} \\ DB &= \frac{x\sin a}{\sin(a+c)} \\ \text{en } \frac{DC}{\sin[180° - (b+c)]} &= \frac{DB}{\sin b} \\ \therefore \frac{DC}{\sin(b+c)} &= \frac{x\sin a}{\sin(a+c)\sin b} \\ \text{dus } DC &= \frac{x\sin a\sin(b+c)}{\sin(a+c)\sin b} \end{aligned}$$

5. 'n Landmeter probeer om die afstand tussen twee punte X en Z te bepaal. Die afstand kan egter nie direk bepaal word nie omdat daar 'n rif tussen die twee punte lê. Vanaf 'n punt Y wat ewe ver is van X en Z, meet hy die hoek $X\hat{Y}Z$.



a) As $XY = x$ en $X\hat{Y}Z = \theta$, wys dat $XZ = x\sqrt{2(1-\cos\theta)}$.

b) Bereken XZ (tot die naaste kilometer) as $x = 240$ km en $\theta = 132°$.

Oplossing:

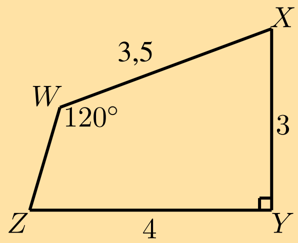
a)

$$\begin{aligned} XZ^2 &= 2x^2 - 2x^2\cos\theta \\ &= 2x^2\left(1-\cos\theta\right) \\ \therefore XZ &= \sqrt{2x^2\left(1-\cos\theta\right)} \\ &= x\sqrt{2\left(1-\cos\theta\right)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} XZ^2 &= x\sqrt{2\left(1-\cos\theta\right)} \\ &= 240\sqrt{2\left(1-\cos 132°\right)} \\ &= 438{,}5 \text{ km} \end{aligned}$$

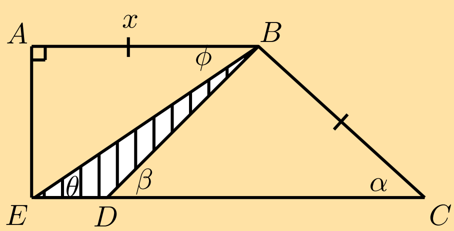
6. Vind die area van $WXYZ$ (tot twee desimale plekke):



Oplossing:

$$\begin{aligned} \frac{\sin W\hat{Z}X}{3{,}5} &= \frac{\sin 120°}{5} \\ \therefore W\hat{Z}X &= 37{,}3° \\ \therefore W\hat{X}Z &= 180° - 120° - 37{,}3° \\ &= 22{,}7° \\ \therefore \text{Area}WXYZ &= \frac{1}{2}(3{,}5)(5)\sin 22{,}7° + \frac{1}{2}(4)(3) \\ &= 9{,}38 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

7. Vind die area van die geskakeerde driehoek in terme van x, α, β, θ en ϕ:



Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle ABE, \quad \frac{x}{EB} &= \cos\theta \\
\therefore EB &= \frac{x}{\cos\theta} \\
\text{In } \triangle BDC, \quad \frac{DB}{\sin\alpha} &= \frac{x}{\sin\beta} \\
\therefore DB &= \frac{x\sin\alpha}{\sin\beta} \\
\therefore \text{Area}\triangle BED &= \frac{1}{2}(BE)(BD)\sin(\beta-\theta) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{x}{\cos\theta} \times \frac{x\sin\alpha}{\sin\beta} \times \sin(\beta-\theta) \\
&= \frac{x^2\sin\alpha\sin(\beta-\theta)}{2\cos\theta\sin\beta}
\end{aligned}$$

6.6 Opsomming

Oefening 6 – 14: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Skryf die volgende as 'n enkele trigonometriese verhouding: $\dfrac{\cos(90^\circ - A)\sin 20^\circ}{\sin(180^\circ - A)\cos 70^\circ} + \cos(180^\circ + A)\sin(90^\circ + A)$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin A\ .\ \sin 20^\circ}{\sin A\ .\ \sin(90^\circ - 70^\circ)} + (-\cos A)\cos(A) \\
&= \frac{\sin A\ .\ \sin 20^\circ}{\sin A\ .\ \sin 20^\circ} + (-\cos A)\cos A \\
&= 1 - \cos^2 A \\
&= \sin^2 A
\end{aligned}$$

2. Bepaal die waarde van die volgende uitdrukking sonder die gebruik van 'n sakrekenaar: $\sin 240^\circ \cos 210^\circ - \tan^2 225^\circ \cos 300^\circ \cos 180^\circ$

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\sin(180^\circ + 60^\circ)\ .\ \cos(180^\circ + 30^\circ) - \tan^2(180^\circ + 45^\circ)\ .\ \cos(360^\circ - 60^\circ)\ .\ (-1)\\
&= (-\sin 60^\circ)\ .\ (-\cos 30^\circ) - (\tan^2 45^\circ)\ .\ (\cos 60^\circ)\ .\ (-1)\\
&= +\frac{\sqrt{3}}{2}\ .\ \frac{\sqrt{3}}{2} - (1)^2\ .\ (\frac{1}{2})\ .\ (-1)\\
&= \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{3+2}{4}\\
&= 1\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

3. Vereenvoudig: $\dfrac{\sin(180^\circ + \theta)\sin(\theta + 360^\circ)}{\sin(-\theta)\tan(\theta - 360^\circ)}$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(180^\circ + \theta)\ .\ \sin(\theta + 360^\circ)}{\sin(-\theta)\ .\ \tan(\theta - 360^\circ)}\\
&= \frac{(-\sin\theta)\ .\ \sin\theta}{(-\sin\theta)\ .\ (-\tan(360^\circ - \theta))}\\
&= \frac{\sin\theta}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{1}\ .\ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\
&= \cos\theta
\end{aligned}$$

4. Evalueer sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

$$\frac{3\sin 55^\circ \sin^2 325^\circ}{\cos(-145^\circ)} - 3\cos 395^\circ \sin 125^\circ$$

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\frac{3\sin 55^\circ.\sin^2(360^\circ - (35^\circ))}{\cos(145^\circ} - 3\cos((360^\circ + (35^\circ).\sin(90^\circ + 35^\circ)\\
&= \frac{3\sin 55^\circ.(-\sin 35^\circ)^2}{\cos(90^\circ + 55^\circ)} + 3\cos 35^\circ.\cos 35^\circ\\
&= \frac{-3\sin 55^\circ.\sin^2 35^\circ}{-\sin 55^\circ} + 3\cos^2 35^\circ\\
&= 3(\sin^2 35^\circ + \cos^2 35^\circ)\\
&= 3
\end{aligned}$$

5. Bewys die volgende identiteite:

   a) $\dfrac{1}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} = \dfrac{-1}{\tan^2 x \cos^2 x}$

   b) $(1 - \tan\alpha)\cos\alpha = \sin(90 + \alpha) + \cos(90 + \alpha)$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \text{RK} &= \frac{-1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{1}} \\ &= \frac{-1}{\sin^2 x} \\ \text{LK} &= \frac{1}{\cos^2 x - 1} \\ &= \frac{1}{-(1 - \cos^2 x)} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \text{RK} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{LK} &= (1 - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}).\cos \alpha \\ &= (\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha}) \cos \alpha \\ &= \cos \alpha - \sin \alpha \\ \text{RK} &= \cos(-\alpha) + \sin(-\alpha) \\ &= \cos \alpha - \sin \alpha \\ &= \text{LK} \end{aligned}$$

6. a) Bewys: $\tan y + \frac{1}{\tan y} = \frac{1}{\cos^2 y \tan y}$

   b) Vir watter waardes van $y \in [0°; 360°]$ is die identiteit hierbo ongedefiniëer?

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \text{LK} &= \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{1}{\frac{1}{\sin y} \cos y} \\ &= \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{\cos y}{\sin y} \\ &= \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos y.\sin y} \\ &= \frac{1}{\cos y.\sin y} \\ \text{RK} &= \frac{1}{\cos^2 y \frac{\sin y}{\cos y}} \\ &= \frac{\cos y}{\cos^2 y.\sin y} \\ &= \frac{1}{\cos y \sin y} \\ &= \text{LK} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \tan y &= 0° \\ y &= 0°; 180°; 360° \\ \cos y &= 0° \\ y &= 90°; 270° \end{aligned}$$

7. a) Vereenvoudig: $\dfrac{\sin(180° + \theta)\tan(360° - \theta)}{\sin(-\theta)\tan(180° + \theta)}$

   b) Los vervolgens die vergelyking op $\dfrac{\sin(180° + \theta)\tan(360° - \theta)}{\sin(-\theta)\tan(180° + \theta)} = \tan\theta$ vir $\theta \in [0°; 360°]$.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} &\frac{(-\sin\theta).(-\tan\theta)}{(-\sin\theta).\tan\theta} \\ &= -1 \end{aligned}$$

b)

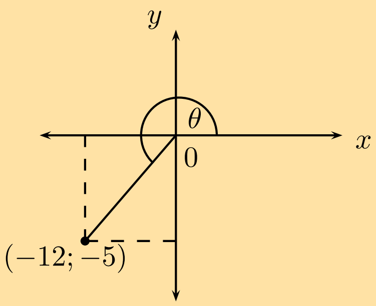
$$\begin{aligned} \tan\theta &= -1 \\ \therefore \theta &= 180° - 45° \text{ of } \theta = 360° - 45° \\ &= 135° \text{ of } 315° \end{aligned}$$

8. Gegee $12\tan\theta = 5$ en $\theta > 90°$.

   a) Teken 'n skets.
   b) Bepaal sonder die gebruik van 'n sakrekenaar $\sin\theta$ en $\cos(180° + \theta)$.
   c) Gebruik 'n sakrekenaar om θ te vind (korrek tot twee desimale plekke).

Oplossing:

a)



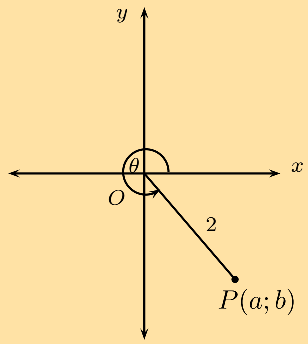
b)

$$\begin{aligned} OP &= \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{144 + 25} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \\ \sin\theta &= -\frac{5}{13} \\ \cos(180° + \theta) &= -\cos\theta \\ &= -(-\frac{12}{13}) \\ &= \frac{12}{13} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{5}{12} \\ \theta &= 180° + 22{,}62° \\ &= 202{,}62° \end{aligned}$$

9.



In die figuur, is P 'n punt in die Cartesiese vlak sodat $OP = 2$ eenhede en $\theta = 300°$. Bepaal, sonder die gebruik van 'n sakrekenaar:

a) die waardes van a en b

b) die waarde van $\sin(180° - \theta)$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \cos 300° &= \cos 60° \\ &= \frac{1}{2} \\ \therefore a &= 1 \\ b &= -\sqrt{4-1} \\ &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin(180° - \theta) &= \sin\theta \\ &= \sin 300° \\ &= \sin(360° - 60°) \\ &= \sin(-60°) \\ &= -\sin 60° \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

10. Los x op vir $x \in [-180°; 180°]$ (korrek tot een desimale plek):

a) $2\sin\frac{x}{2} = 0{,}86$

b) $\tan(x + 10°) = \cos 202{,}6°$

c) $\cos^2 x - 4\sin^2 x = 0$

Oplossing:

a)

$$
\begin{aligned}
\sin \frac{1}{2}x &= 0{,}43 \\
\frac{1}{2}x &= 25{,}467^\circ \\
x &= 50{,}9^\circ \\
\text{of} \quad \frac{1}{2}x &= 180^\circ - 25{,}467^\circ \\
x &= 309{,}1^\circ
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\tan(x + 10^\circ) &= -0{,}92 \\
x + 10^\circ &= 180^\circ - 42{,}7^\circ \\
&= 137{,}3^\circ \\
x &= 127{,}3^\circ \\
\text{of} \quad x + 10^\circ &= 360^\circ - 42{,}7^\circ \\
&= 317{,}3^\circ \\
\therefore x &= 307{,}3^\circ
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\cos x - 2\sin x &= 0 \\
\cos x &= 2\sin x \\
\frac{\sin x}{\cos x} &= \frac{1}{2} \\
\tan x &= \frac{1}{2} \\
x &= 26{,}6^\circ \\
\text{of } x &= -180^\circ + 26{,}6^\circ \\
&= 206{,}6^\circ \\
\text{of} \quad \cos x + 2\sin x &= 0 \\
\cos x &= -2\sin x \\
\frac{\sin x}{\cos x} &= -\frac{1}{2} \\
\tan x &= -\frac{1}{2} \\
x &= 180^\circ - 26{,}6^\circ \\
&= 153{,}4^\circ \\
\text{of } x &= 360^\circ - 26{,}6^\circ \\
&= 333{,}4^\circ
\end{aligned}
$$

11. Vind die algemene oplossing vir die volgende vergelykings:

a) $\frac{1}{2}\sin(x - 25^\circ) = 0{,}25$

b) $\sin^2 x + 2\cos x = -2$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\sin(x - 25°) &= 0.5\\ x - 25° &= 30°\\ \text{of } x - 25° &= 180° - 30°\\ x &= 55° + 360°n, n \in \mathbb{Z}\\ \text{of } x &= 175° + 360°n, n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sin^2 x + 2\cos x + 2 &= 0\\ 1 - \cos^2 x + 2\cos x + 2 &= 0\\ -\cos^2 x + 2\cos x + 3 &= 0\\ \cos^2 x - 2\cos x - 3 &= 0\\ (\cos x - 3)(\cos x + 1) &= 0\\ \cos x &= 3\\ &\text{Geen oplossing}\\ \text{of } \cos x &= -1\\ x &= 180° + 360°n, n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

12. Gegee die vergelyking: $\sin 2\alpha = 0{,}84$

a) Vind die algemene oplossing van die vergelyking.

b) Illustreer hoe hierdie vergelyking grafies opgelos kan word vir $\alpha \in [0°; 360°]$.

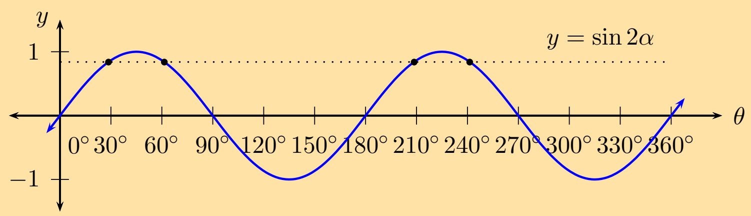
c) Skryf die oplossings neer van $\sin 2\alpha = 0{,}84$ vir $\alpha \in [0°; 360°]$.

Oplossing:

a)

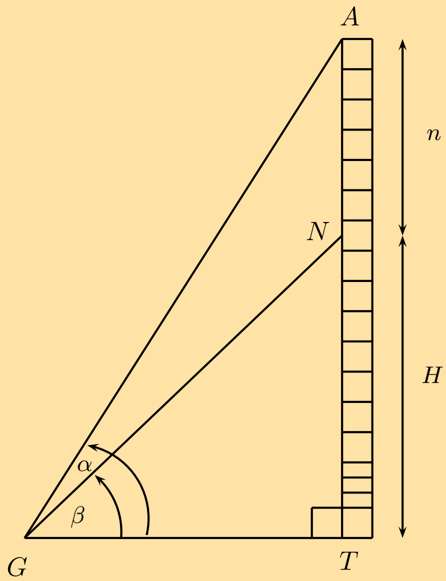
$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 0{,}84\\ 2\alpha &= 57{,}14° + 360°n, n \in \mathbb{Z}\\ \alpha &= 28{,}6° + 180°n\\ \text{of } 2\alpha &= 180° - 57{,}14° + 360°n, n \in \mathbb{Z}\\ 2\alpha &= 122{,}86° + 360°n\\ \alpha &= 61{,}43° + 180°n\end{aligned}$$

b)



c) $28{,}6°; 61{,}4°; 208{,}6°; 241{,}4°$

13.



A is die hootste punt van 'n vertikale toring AT. By punt N op die toring, n meters vanaf die bopunt van die toring, het 'n voël sy nes gemaak. Die hoogtehoek van G na punt A is α en die hoogtehoek van G na punt N is β.

a) Druk $A\hat{G}N$ uit in terme van α en β.

b) Druk $\hat{A}$ uit in terme van α en/of β.

c) Toon aan dat die hoogte van die nes vanaf die grond (H) bepaal kan word met die formule

$$H = \frac{n \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$$

d) Bereken die hoogte van die nes H as $n = 10$ m, $\alpha = 68°$ en $\beta = 40°$ (gee antwoord korrek tot die naaste meter).

Oplossing:

a)

$$A\hat{G}N = \alpha - \beta$$

b)

$$\hat{A} = 90° - \alpha$$

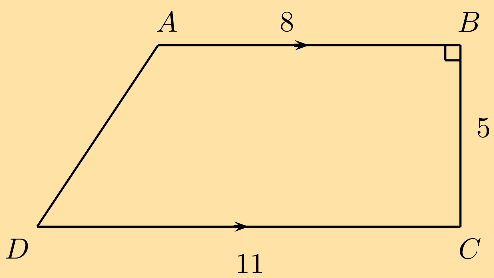
c)

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle GNT,\\
&\frac{H}{GN} = \sin\beta\\
&\therefore H = GN\sin\beta\\
&\text{In } \triangle AGN,\\
&\frac{n}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{GN}{\sin(90^\circ-\alpha)}\\
&\therefore GN = \frac{n\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)}\\
&= \frac{n\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\\
&\text{Substitueer vir } GN,\\
&H = \frac{n\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
H &= \frac{n\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\\
&= \frac{10\cos 68^\circ \sin 40^\circ}{\sin 28^\circ}\\
&= 5{,}1 \text{ m}
\end{aligned}$$

14.



Mnr. Collins wil sy agterplaas, $ABCD$ in die vorm van 'n trapesium, plavei. $AB \parallel DC$ en $\hat{B} = 90^\circ$. $DC = 11$ m, $AB = 8$ m en $BC = 5$ m.

a) Bereken die lengte van die diagonaal AC.

b) Bereken die lengte van die sy AD.

c) Bereken die area van die agterplaas met die gebruik van meetkunde.

d) Bereken die area van die agterplaas met die gebruik van trigonometrie.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
AC^2 &= 8^2 + 5^2\\
&= 64 + 25 = 89\\
AC &= 9{,}43 \text{ m}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle ABC, & \\
\tan B\hat{A}C &= \frac{5}{8} \\
\therefore B\hat{A}C &= 32^\circ \\
A\hat{C}D = B\hat{A}C &= 32^\circ (AB \parallel DC) \\
\text{In } \triangle ADC, & \\
AD^2 &= AC^2 + DC^2 - 2.AC.AD.\cos(A\hat{C}D) \\
&= (9{,}4)^2 + (11)^2 - 2(9{,}4)(11)\cos(32^\circ) \\
&= 89 + 121 - 176 \\
&= 34 \\
\therefore AD &= 6{,}2 \text{ m}
\end{aligned}$$

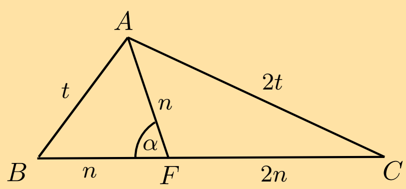
c)

$$\begin{aligned}
\text{Area } &= \frac{1}{2} \times (8 + 11) \times 5 \\
&= 47{,}5 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\text{Area } ABCD &= \text{area } \triangle ABC + \text{area } \triangle ADC \\
&= \frac{1}{2}(8)(5) + \frac{1}{2}(9.43)(11)\sin 32^\circ \\
&= 20 + 27{,}5 \\
&= 47{,}5 \text{ m}^2
\end{aligned}$$

15.



In $\triangle ABC$, $AC = 2A$, $AF = BF$, $A\hat{F}B = \alpha$ en $FC = 2AF$. Bewys dat $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

Oplossing:

In $\triangle ABF$

$$\begin{aligned}
t^2 &= n^2 + n^2 - 2n^2 \cos\alpha \\
t^2 &= 2n^2(1 - \cos\alpha) \\
1 - \cos\alpha &= \frac{t^2}{2n^2} \\
\cos\alpha &= 1 - \frac{t^2}{2n^2}
\end{aligned}$$

In $\triangle AFC$,

$$\begin{aligned}
(2t)^2 &= n^2 + (2n)^2 - 4n^2 \cos(A\hat{F}C) \\
4t^2 &= n^2 + 4n^2 - 4n^2 \cos(180^\circ - \alpha) \\
&= 5n^2 + 4n^2 \cos\alpha \\
t^2 &= \frac{5}{4}n^2 + n^2 \cos\alpha
\end{aligned}$$

Substitueer vir t^2

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= 1 - \frac{\frac{5}{4}n^2 + n^2\cos\alpha}{2n^2} \\
&= \frac{2n^2 - \frac{5}{4}n^2 - n^2\cos\alpha}{2n^2} \\
&= \frac{\frac{3}{4}n^2 - n^2\cos\alpha}{2n^2} \\
&= \frac{3}{8} - \frac{\cos\alpha}{2} \\
\frac{3}{2}\cos\alpha &= \frac{3}{8} \\
\therefore \cos\alpha &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

HOOFSTUK 7

Meting

- Gebruik papier of karton vir die ontvouiing (net) van vaste liggame om leerders te help om die verskillende hoogtes, veral loodregte hoogte en skuinshoogtes te sien.
- Eenhede is noodsaaklik wanneer daar met regte lewe kontekste gewerk word.
- Sketse is waardevolle en belangrike hulpmiddels.
- Afronding behoort alleenlik in die laaste stap gedoen te word en die graad van akkuraatheid behoort relevant tot die konteks te wees.

7.1 Area van 'n poligoon

Oefening 7 – 1: Area van 'n poligoon

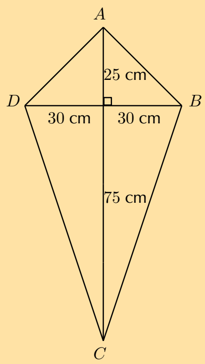
1. Vuyo en Banele kompeteer om te sien wie kan die beste vlieër bou met balsahout ('n lig-gewig hout) en papier. Vuyo besluit om sy vlieër te maak met een diagonaal 1 m lank en die ander diagonaal 60 cm lank. Die snypunt van die twee diagonale verdeel die langer diagonaal in die verhouding $1 : 3$.

   Banele gebruik ook diagonale van 60 cm en 1 m, maar hy ontwerp sy vlieër as 'n rombus.

   a) Maak 'n skets van Vuyo se vlieër en skryf al die bekende afmetings neer.
   b) Bepaal hoeveel balsahout Vuyo benodig om die buite raamwerk van sy vlieër te bou (gee antwoord korrek tot die naaste sentimeter).
   c) Bereken hoeveel papier hy sal nodig hê om die raam van sy vlieër te bou.
   d) Maak 'n skets van Banele se vlieër en skryf al die bekende afmetings neer.
   e) Bepaal hoeveel hout en papier Banele sal benodig vir sy vlieër.
   f) Vergelyk die twee ontwerpe en lewer kommentaar op die ooreenkomste en die verskille. Watter een dink jy is die beste ontwerp? Motiveer jou antwoord.

Oplossing:

a)



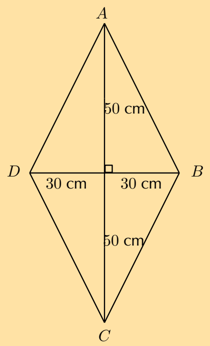
b)

$$\begin{aligned} AD &= AB \\ &= \sqrt{30^2 + 25^2} \quad \text{(Pythagoras)} \\ AD &= 39 \text{ cm} \\ DC &= BC \\ &= \sqrt{30^2 + 75^2} \quad \text{(Pythagoras)} \\ &= 81 \text{ cm} \\ \therefore \text{Balsahout: } &= 2(81 + 39) \\ &= 240 \text{ cm} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{Area } &= 60 \times 100 \\ &= 6000 \text{ cm}^2 \\ &= 0{,}6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

d)

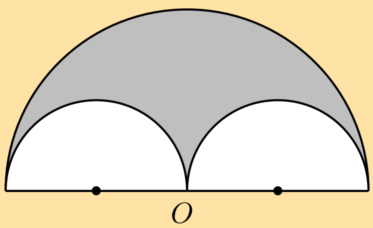


e)

$$\begin{aligned} \text{Sylengte} &= \sqrt{50^2 + 30^2} \\ &= 58{,}3 \text{ cm} \\ \therefore \text{Hout vir raam } &= 4 \times 58{,}3 \text{ cm} \\ &= 233{,}2 \text{ cm} \\ \text{Area } &= 60 \times 100 \\ &= 6000 \text{ cm}^2 \\ &= 0{,}6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

f) Dieselfde hoeveelheid papier word benodig vir beide ontwerpe. Vuyo se ontwerp benodig meer balsahout.

2. O is die middelpunt van 'n halfsirkel met radius 10 eenhede. Twee kleiner semi-sirkels is ingeskrewe in die groter een, soos aangetoon op die diagram. Bereken die volgende (in terme van π):



a) Die area van die ingekleurde gedeelte van die figuur.

b) Die omtrek van die ingekleurde gedeelte.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\text{Area } &= \frac{1}{2}\pi(10)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\pi(5)^2\right)\\ &= 50\pi - 25\pi\\ &= 25\pi \text{ eenhede}^2\end{aligned}$$

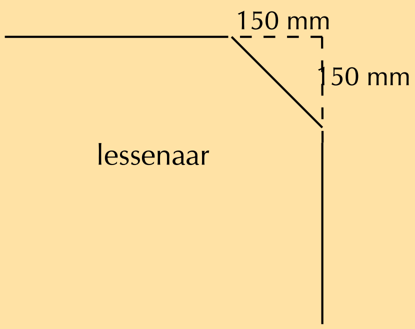
b)

$$\begin{aligned}\text{Omtrek } &= \frac{1}{2}(2\pi(10)) + 2\pi(5)\\ &= 10\pi + 10\pi\\ &= 20\pi \text{ eenhede}^2\end{aligned}$$

3. Karen se ingenieurshandboek is 30 cm lank en 20 cm wyd. Sy let op dat die afmetings van haar lessenaar in dieselfde verhouding is as die afmetings van haar handboek.

   a) As die lessenaar 90 cm wyd is, bereken die area van die boonste oppervlak van die lessenaar.

   b) Karen gebruik karton om elke hoek van haar lessenaar te bedek met 'n gelykbenige driehoek, soos aangetoon op die diagram:



   Bereken die omtrek en area van die sigbare oppervlak van haar lessenaar.

   c) Gebruik hierdie nuwe area om die afmetings te bereken van 'n vierkantige lessenaar met dieselfde oppervlakarea as Karen se lessenaar.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\text{Verhouding } &= \frac{\text{lessenaarwydte}}{\text{boekwydte}}\\ &= \frac{90}{20}\\ &= 4{,}5\\ \therefore \text{ Lengte van lessenaar } &= 30 \times 4{,}5\text{cm}\\ &= 135 \text{ cm}\\ \text{Area van lessenaar } &= 135 \times 90\\ &= 12\ 150 \text{ cm}^2\\ &= 1{,}2 \text{ m}^2\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 15^2 + 15^2 \\
x &= 21{,}2 \text{ cm} \\
\text{Nuwe lengte} &= 135 - 2(15) \\
&= 105 \text{ cm} \\
\text{Nuwe breedte} &= 90 - 2(15) \\
&= 60 \text{ cm} \\
\text{Nuwe omtrek } &= 2(105) + 2(60) + 4(21{,}2) \\
&= 414{,}8 \text{ cm}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Area afgesny } &= 2 \times (15^2) \\
&= 450 \text{ m}^2 \\
\text{Nuwe area } &= 12\ 150 \text{ cm}^2 - 450 \text{ m}^2 \\
&= 11\ \ 700 \text{ cm}^2
\end{aligned}
$$

c)

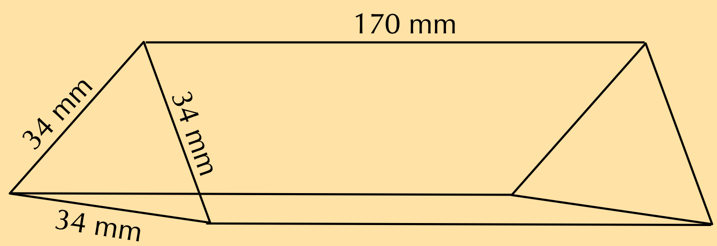
$$
\begin{aligned}
s^2 &= 11\ \ 700 \text{ cm}^2 \\
\therefore s &= 108{,}2 \text{ cm} \\
\text{Vierkantige tafel met lengte} &\approx 108 \times 108\text{cm}^2
\end{aligned}
$$

7.2 Regte prismas en silinders

Buite-oppervlakke van prismas en silinders

Oefening 7 – 2: Berekening van buite-oppervlakke

1. ’n Populêre sjokoladehouer is ’n gelyksydige regte driehoekige prisma met sye 34 mm. Die boks is 170 mm lank. Bereken die buite-oppervlakke van die boks (tot die naaste vierkante sentimeter).



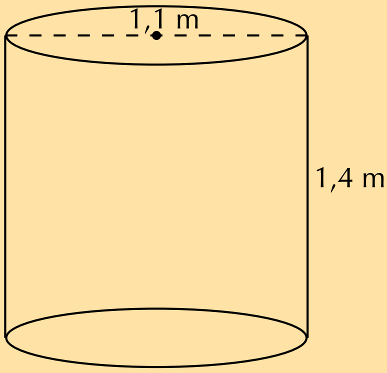
Oplossing:

$$h = \sin 60°$$
$$\therefore h = 29{,}4 \text{ mm}$$
$$\text{Area van } \triangle = 2 \times \frac{1}{2} \times 34 \times 29{,}4$$
$$= 1000 \text{ mm}^2$$
$$\text{Area van reghoekige sye} = 3 \times 170 \times 34$$
$$= 17\ 340 \text{ mm}^2$$
$$\text{Totale Buite-oppervlakke} = 27\ 340 \text{ mm}^2$$
$$= 273 \text{ cm}^2$$

2. Gordon koop 'n silindervormige watertenk om die reënwater van sy dak af op te vang. Hy ontdek 'n vol $2\ \ell$ blik groen verf in sy motorhuis en besluit om die tenk te verf. As hy 250 ml gebruik om 1 m^2 te verf, sal hy genoeg groen verf hê om die tenk een laag verf te gee?

   Afmetings van die tenk:

$$\text{deursnit} = 1{,}1 \text{ m}$$
$$\text{hoogte} = 1{,}4 \text{ m}$$



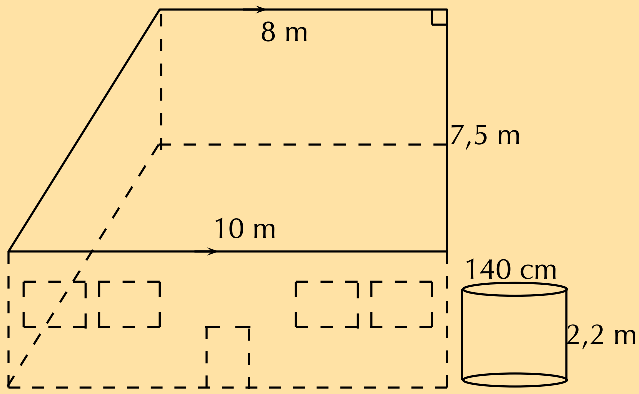
Oplossing:

$$\text{Buite-oppervlakke} = 2 \times \pi \times (0{,}55) \times 1{,}4 + \pi(0{,}55)^2$$
$$= 5{,}788 \text{ m}^2$$
$$\text{Dus benodig hy} \approx 6 \text{ m}^2 \times 250 \text{ ml verf}$$
$$= 1500 \text{ ml}$$
$$= 1{,}5\ \ell$$

Ja, hy het genoeg verf vir 1 laag.

Oefening 7 – 3: Bereken volume

1. Die dak van Phumza se huis is in die vorm van 'n reghoekige trapesium. 'n Silindervormige watertenk is opgerig langs 'n huis sodat reënwater van die dak af in die tenk kan loop. Die deursnit van die tenk is 140 cm en die hoogte is $2{,}2$ m.



   a) Bepaal die area van die dak.

   b) Bepaal hoeveel liters water die tenk kan hou.

Oplossing:

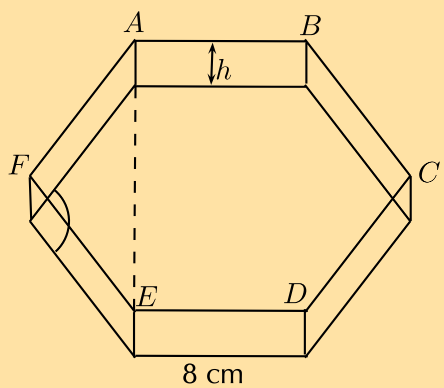
a)

$$\begin{aligned}\text{Area van dak} &= \frac{1}{2}(8+10)\times 7{,}5\\ &= 67{,}5 \text{ m}^2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\text{Volume van tenk} &= \pi(0{,}7)^2\times 2{,}2\\ &= 3{,}39 \text{ m}^3\\ &= 3{,}39\ \ell\end{aligned}$$

2. Die lengte van 'n sy van 'n heksagonale lekkergoedblik is 8 cm en die hoogte is gelyk aan helfte van 'n sylengte.



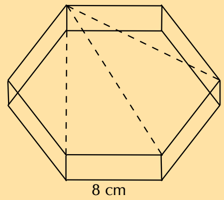
   a) Wys dat die binnehoeke gelyk is aan $120°$.

b) Bepaal die lengte van lyn AE.

c) Bereken die volume van die blik.

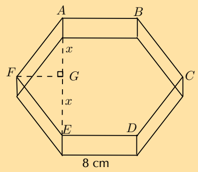
Oplossing:

a)



$$\begin{aligned} \text{Som van binnehoeke} &= 180^\circ \times 4 \\ \therefore \text{Elke hoek} &= \frac{180^\circ \times 4}{6} \\ &= 120^\circ \end{aligned}$$

b)



Teken 'n lyn FG loodreg aan AE sodat G op AE lê. Laat $AG = x$.

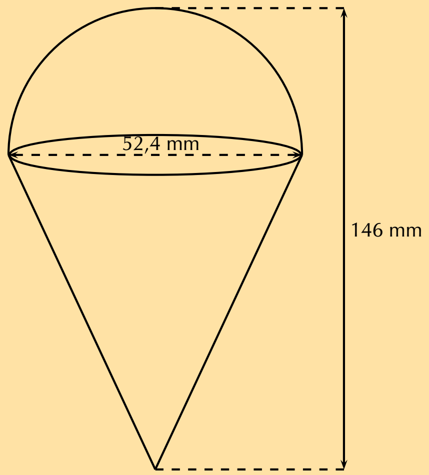
$$\begin{aligned} AG = GE &= x \\ \text{In } \triangle AGF: \quad \frac{x}{8} &= \sin 60^\circ \\ \therefore x &= 6{,}93 \text{ cm} \\ \therefore AE &= 2 \times x \\ &= 13{,}86 \text{ cm} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{Volume } &= \text{area} \times h \\ &= (2 \triangleleft' s + \square) \times 4 \\ FG^2 &= 8^2 - (8 \sin 60^\circ)^2 \\ \therefore FG &= 4 \text{ cm} \\ \text{Of} & \\ \cos 60^\circ &= \frac{FG}{8} \\ \frac{1}{2} &= \frac{FG}{8} \\ \therefore FG &= 4 \text{ cm} \\ \text{Volume van boks } &= \left[2\left(\frac{1}{2} \times 8 \sin 60^\circ \times 4\right) + (2(8 \sin 60^\circ) \times 8)\right] \times (4) \\ &= 138{,}56 \times 4 \\ &= 554{,}24 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Oefening 7 – 4: Vind buite-oppervlakke en volume

1. 'n Roomyshorinkie het 'n deursnit van $52{,}4$ mm en 'n totale hoogte van 146 mm.

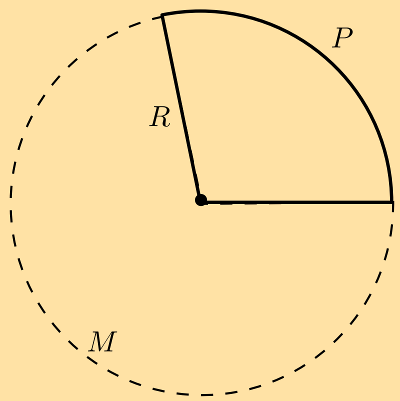


a) Bereken die buite-oppervlakke van die roomys en die horinkie.

b) Bereken die totale volume van die roomys en die horinkie.

c) Hoeveel roomyshorinkies kan gevul word uit 'n $5\ \ell$ houer roomys (neem aan die horinkie word heeltemal volgemaak met roomys)?

d) Beskou die ontvouing van die konus hieronder. R is die lengte vanaf die hoekpunt van die konus tot by sy omtrek is P.



i. Bepaal die waarde van R.

ii. Bereken die lengte van die boog P.

iii. Bereken die lengte van boog M.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
\text{Radius} &= \frac{52{,}4}{2} \\
&= 26{,}2 \text{ mm} \\
\text{Hoogte van horinkie} &= 146 - 26{,}2 \\
&= 119{,}8 \text{ mm} \\
&\approx 120 \text{ mm} \\
\text{Buite-oppervlakke van horinkie} &= \pi \times 26{,}2 \times (26{,}2 + 119{,}8) \\
&= 12{,}0 \text{ mm}^2 \\
&= 120 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\text{Volume} &= \text{volume(konus)} + \text{volume}(\frac{1}{2} \text{ sfeer}) \\
&= \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi(26{,}2)^2 \times 120 + \frac{2}{3}\pi(26{,}2)^3 \\
&= 86\ 260{,}59\ldots + 37\ 667{,}12\ldots \\
&= 123\ 928 \text{ mm}^3 \\
&= 124 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
1000 \text{ cm}^3 &= 1\ \ell \\
\therefore 5\ \ell &= 5000 \text{ cm}^3 \\
\therefore \frac{5000}{124} &\approx 40 \text{ horinkies}
\end{aligned}$$

d) i.

$$\begin{aligned}
R &= 146 - 26{,}2 \\
&= 119{,}8 \text{ mm} \\
&\approx 120 \text{ mm}
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
P &= \text{omtrek van konus} \\
&= 2\pi(26{,}2) \\
&\approx 165 \text{ mm}
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
M &= 2\pi(120) - 165 \\
&= 589 \text{ mm}
\end{aligned}$$

7.4 Vermenigvuldiging van 'n afmeting met 'n konstante faktor

Oefening 7 – 5: Die effek van k

1. Voltooi die volgende sinne:

   a) As een afmeting van 'n kubus met 'n faktor van $\frac{1}{2}$ vermenigvuldig word, sal die volume van die kubus ...

   b) As twee dimensies van 'n kubus vermenigvuldig word met 'n faktor van 7, sal die volume van die kubus ...

   c) As drie afmetings van 'n kubus vermenigvuldig word met 'n faktor van 3, dan sal:

      i. elke sy van die kubus ...

      ii. die buite-oppervlakke van die kubus ...

      iii. die volume van die kubus ...

   d) As elke sy van 'n kubus halveer word, sal:

      i. die buite-oppervlakke van die kubus ...

      ii. die volume van die kubus ...

   Oplossing:

   a) halveer

   b)

   $$\begin{aligned} \text{vermenigvuldig met } 7^2 &= 49 \\ \therefore \approx &\ \text{50 keer groter} \end{aligned}$$

   Ongeveer 50 keer groter.

   c) i. word 3 keer langer.

      ii. word $3^2 = 9$ keer groter.

      iii. word $3^3 = 27$ keer groter.

   d) i. vermenigvuldig word met 'n faktor $\frac{1}{2}^2 = \frac{1}{4}$, dus word die oppervlakke 4 keer kleiner.

      ii. vermenigvuldig word met 'n faktor $\frac{1}{2}^3 = \frac{1}{8}$, dus word die oppervlakke 8 keer kleiner.

2. Die munisipaliteit beoog om 'n swembad te bou met 'n volume van W^3 kubieke meters. Hulle besef egter dit sal baie duur wees om die swembad vol water te maak, so hulle besluit om die swembad kleiner te maak.

   a) Die lengte en die breedte van die swembad word verklein met 'n faktor van $\frac{7}{10}$. Druk die nuwe volume uit in terme van W.

   b) Die afmetings van die swembad word so verminder dat die volume van die swembad verminder met 'n faktor van $0{,}8$. Bepaal die nuwe afmetings van die swembad in terme van W (onthou dat die swembad 'n kubus moet wees).

   Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= W^3\\ \text{Nuwe volume} &= 0{,}7W \times 0{,}7W \times W\\ &= (0{,}7)^2W^3\\ &= 0{,}49W^3\\ &\approx 0{,}5W^3\end{aligned}$$

b)

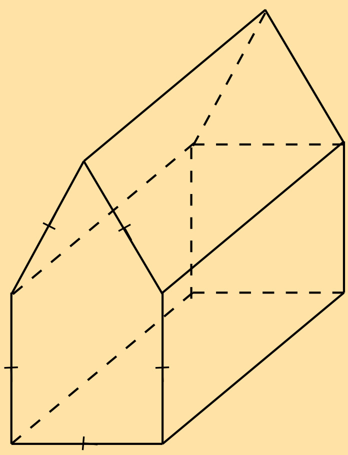
$$\begin{aligned}\text{Volume} &= W^3\\ \text{Nuwe volume} &= 0{,}8W^3\\ \therefore \text{Sylengte} &= \sqrt[3]{0{,}8} \times W\\ &= 0{,}93 \times W\end{aligned}$$

Elke sy behoort nou effens meer as $\frac{9}{10}$ van die oorspronklike lengte te wees.

7.5 Opsomming

Oefening 7 – 6: Einde van die hoofstuk oefeninge

1\.



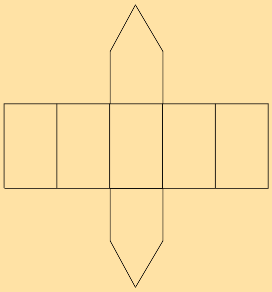
a) Beskryf hierdie figuur in terme van 'n prisma.

b) Teken 'n net, of ontvouing, van hierdie figuur.

Oplossing:

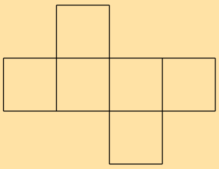
a) Vierkantige prisma met 'n driehoekige prisma aan een kant. Let daarop dat dit nie 'n vyfhoekige prisma is nie, siende dat al die hoeke nie ewe groot is nie.

b)

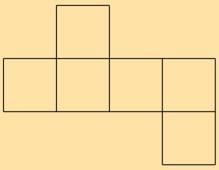


2. Watter van die volgende is 'n net van 'n kubus?

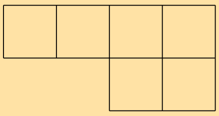
   a)



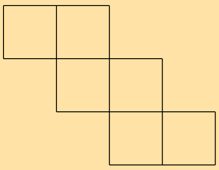
   b)



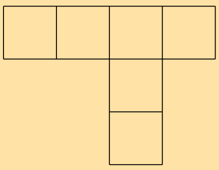
   c)



   d)



   e)



Oplossing:

a en d

3. Benoem en teken die volgende figure:

   a) 'n Prisma met die minste sye.
   b) 'n Piramide met die minste hoekpunte.
   c) 'n Regte prisma met 'n vlieër as basis.

Oplossing:

   a) Driehoekige prisma

b) Driehoekige piramide

c) Rombiese prisma

4. a) i. Bepaal hoeveel papier benodig word om 'n boks te maak met 'n wydte van 16 cm, hoogte van 3 cm en lengte van 20 cm (aanvaar daar is geen oorvleueling by die hoeke nie).

   ii. Gee 'n wiskundige naam vir die vorm van dié boks.

   iii. Bereken die volume van dié boks.

   b) Bepaal hoeveel papier benodig word om 'n kubus te maak met 'n inhoudsmaat van $1\ \ell$.

   c) Vergelyk die boks en die kubus. Watter een het die grootste volume en watter een vereis die meeste papier om te maak?

Oplossing:

a) i.

$$\begin{aligned}\text{Boks buite-oppervlakke} &= 2[3 \times 16 + 3 \times 20 + 16 \times 20] \\ &= 2[428] \\ &= 856 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

ii. Reghoekige prisma

iii.

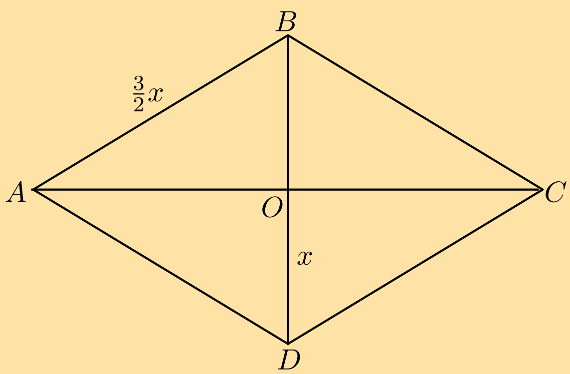
$$\begin{aligned}\text{Volume } &= 3 \times 16 \times 20 \\ &= 960 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}1 \text{ liter } &= 1000 \text{ cm}^3 \\ \therefore \text{Sylengte} &= 10 \text{ cm} \\ \text{Buite-oppervlakke} &= 6 \times (10 \times 10) \\ &= 600 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

c) Die kubus het 'n groter volume en meer papier word benodig om die boks te maak.

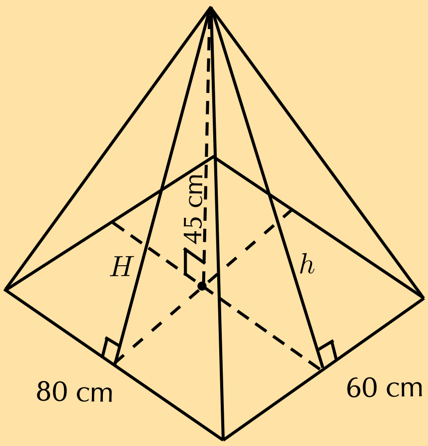
5. $ABCD$ is 'n rombus met sylengtes van $\frac{3}{2}x$ millimeters. Die diagonale sny by O en lengte van $DO = x$ millimeters. Druk die area van $ABCD$ uit in terme van x.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
AD &= \frac{3}{2}x \\
DO &= x \\
AO^2 &= \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - x^2 \quad (\text{ Pythagoras}) \\
&= \frac{9}{4}x^2 - x^2 \\
&= \frac{5}{4}x^2 \\
\therefore AO &= \frac{x\sqrt{5}}{2} \\
\therefore AC &= x\sqrt{5} \\
\text{Area } &= \frac{1}{2}AC \times BD \\
&= \frac{1}{2} \times x\sqrt{5} \times 2x \\
&= \sqrt{5}x^2
\end{aligned}
$$

6. Die diagram wys 'n reghoekige piramide met 'n basis van 80 cm lank en 60 cm breed. Die vertikale hoogte van die piramide is 45 cm.



   a) Bereken die volume van die piramide.
   b) Bereken H en h.
   c) Bereken die buite-oppervlakke van die piramide.

Oplossing:

a)

$$
\begin{aligned}
\text{Volume } &= \frac{1}{3} \times \text{oppervlakke basis} \times \text{hoogte} \\
&= \frac{1}{3}(80 \times 60) \times 45 \\
&= 72\ 000 \text{ cm}^3
\end{aligned}
$$

b)

$$\begin{aligned} H^2 &= 30^2 + 45^2 \quad (\text{ Pythagoras}) \\ &= 2925 \\ \therefore H &= 54 \text{ cm} \\ h^2 &= 45^2 + 40^2 \quad (\text{ Pythagoras}) \\ h &= 60{,}2 \text{ cm} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{Buite-oppervlakke } &= 2\left(\frac{1}{2} \times 80 \times H\right) + 2\left(\frac{1}{2} \times 60 \times h\right) + 80 \times 60 \\ &= (80 \times 54) + (60 \times 60{,}2) + 4800 \\ &= 12\ 732 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

7. 'n Groep kinders speel sokker op 'n oop stuk veld. Die sokkerbal het 'n inhoudsmaat van 5000 cc (kubieke sentimeters). 'n Afvoerpyp in die hoek van die veld het 'n deursnit van 20 cm. Is dit moontlik dat die kinders se bal in die pyp kan inval? Toon jou berekenings.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Volume van bal } &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= 5000 \\ \therefore r &= 10{,}6 \\ \text{en deursnit } &= 21{,}2 \text{ cm} \\ \text{deursnit van pyp} &= 20 \text{ cm} \end{aligned}$$

Nee, die bal is te groot om by die pyp af te gaan.

8. 'n Liter waspoeier pas in 'n standaard kubiese houer by die fabriek.

   a) Bepaal die lengte van die sye van die houer.

   b) Bepaal die afmetings van die kubiese houer wat dubbeld hierdie volume waspoeier kan hou.

Oplossing:

a)

$$\text{Afmetings: } 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$$

b)

$$\begin{aligned} 2l &= 2000 \text{ cm}^3 \\ \therefore s &= \sqrt[3]{2000} \\ &= 12{,}6 \text{ cm} \end{aligned}$$

9. 'n Kubus het sye met lengte k eenhede.

   a) Beskryf die effek op die volume van die kubus as die hoogte verdrievoudig word.

b) As al drie afmetings van die kubus verdrievoudig word, bepaal die effek op die buite-oppervlakke van die kubus.

c) As al drie afmetings op die kubus verdrievoudig word, bepaal die effek op die volume.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= k \times k \times k \\ &= k^3 \\ \text{Nuwe volume} &= k \times k \times 3k \\ &= 3k^3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\text{Buite-oppervlakke} &= 6 \times k^2 \\ &= 6k^2 \\ \text{Nuwe buite-oppervlakke} &= 6 \times (3k)^2 \\ &= 54k^2\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\text{Volume} &= k^3 \\ \text{Nuwe volume} &= (3k)^3 \\ &= 27k^3\end{aligned}$$

HOOFSTUK 8

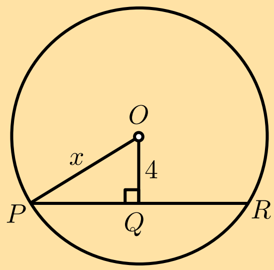
Euklidiese meetkunde

- Bespreek terminologie.
- Omgekeerde stellings is nie eksamineerbaar nie.
- Goeie praktyk vir die beantwoording van vrae:
  - maak 'n netjiese en akkurate skets
  - noem die driehoek/figuur wat ter sprake is
  - gee bewering en toepaslike rede
  - gee 'n gevolgtrekking

8.1 Sirkelmeetkunde

Oefening 8 – 1: Loodregte lyn van die middelpunt halveer die koord

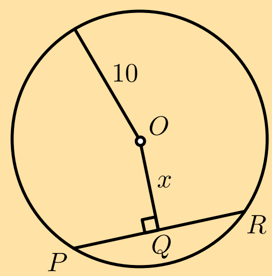
1. In die sirkel met middelpunt O, $OQ \perp PR$, $OQ = 4$ eenhede en $PR = 10$. Bepaal x.



Oplossing:

$$\begin{aligned} PR &= 10 && (\perp \text{ gegee }) \\ \therefore PQ &= 5 && (\perp \text{ vanaf middelpunt halveer koord}) \\ OP^2 &= OQ^2 + QP^2 && (\text{Pythagoras}) \\ x^2 &= 4^2 + 5^2 \\ \therefore x^2 &= 25 + 16 \\ x^2 &= 41 \\ x &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

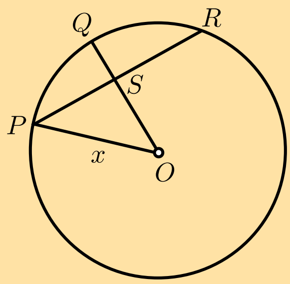
2. In die sirkel met middelpunt O en radius $= 10$ eenhede, $OQ \perp PR$ en $PR = 8$. Bepaal x.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
PR &= 8 && (\perp \text{ gegee }) \\
\therefore PQ &= 4 && (\perp \text{ vanaf middelpunt halveer koord}) \\
OP^2 &= OQ^2 + QP^2 && (\text{Pythagoras}) \\
10^2 &= x^2 + 4^2 \\
\therefore x^2 &= 100 - 16 \\
x^2 &= 84 \\
x &= \sqrt{84}
\end{aligned}
$$

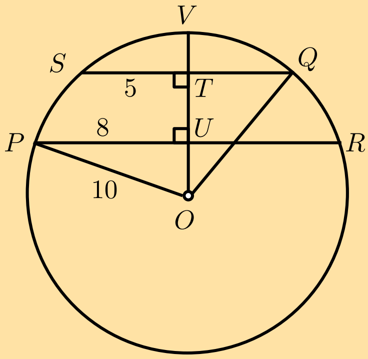
3. In die sirkel met middelpunt O, $OQ \perp PR$, $PR = 12$ eenhede en $SQ = 2$ eenhede. Bepaal x.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
SO &= x - 2 \\
OP^2 &= OS^2 + SP^2 && (\text{Pythagoras}) \\
x^2 &= (x-2)^2 + 6^2 \\
x^2 &= x^2 - 4x + 4 + 6^2 \\
4x &= 40 \\
\therefore x &= 10
\end{aligned}
$$

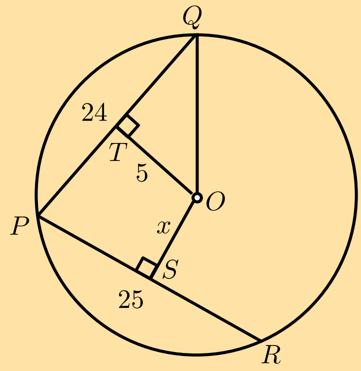
4. In die sirkel met middelpunt O, $OT \perp SQ$, $OT \perp PR$, $OP = 10$ eenhede, $ST = 5$ eenhede en $PU = 8$ eenhede. Bepaal TV.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{In } \triangle POU, \quad OP^2 &= OU^2 + PU^2 && (\text{Pythagoras}) \\
10^2 &= OU^2 + 8^2 \\
100 - 64 &= OU^2 \\
\therefore OU^2 &= 36 \\
\therefore OU &= 6 \\
\text{In } \triangle QTO, \quad QO^2 &= OT^2 + TQ^2 && (\text{Pythagoras}) \\
10^2 &= OT^2 + 5^2 \\
100 - 25 &= OT^2 \\
\therefore OT^2 &= 75 \\
\therefore OT &= \sqrt{75} \\
\therefore TU &= OT - OU \\
&= \sqrt{75} - 6 \\
&= 2{,}66
\end{aligned}
$$

5. In die sirkel met middelpunt O, $OT \perp QP$, $OS \perp PR$, $OT = 5$ eenhede, $PQ = 24$ eenhede en $PR = 25$ eenhede. Bepaal $OS = x$.



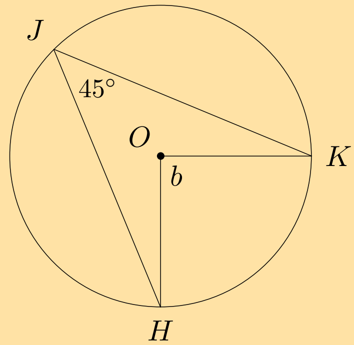
Oplossing:

$$
\begin{aligned}
\text{In } \triangle QTO, \quad QO^2 &= OT^2 + QT^2 && \text{(Pythagoras)}\\
QO^2 &= 5^2 + 12^2\\
&= 25 + 144\\
\therefore QO^2 &= 169\\
\therefore QO &= 13\\
\text{In } \triangle OSR, \quad OR^2 &= SR^2 + OS^2 && \text{(Pythagoras)}\\
13^2 &= 12{,}5^2 + OS^2\\
\therefore OS^2 &= 12{,}75\\
\therefore OS &= 3{,}6
\end{aligned}
$$

Oefening 8 – 2: Hoek by die middelpunt van die sirkel is tweemaal die hoek by die omtrek

Gegee O is die middelpunt van die sirkel, bepaal die onbekende hoek in elk van die volgende diagramme:

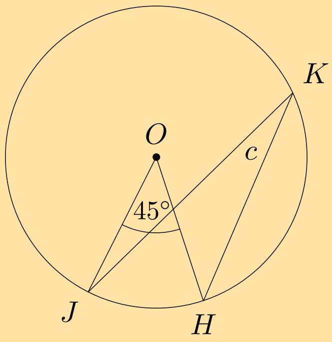
1.



Oplossing:

$$
\begin{aligned}
b &= 2 \times 45° && (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek })\\
\therefore b &= 90°
\end{aligned}
$$

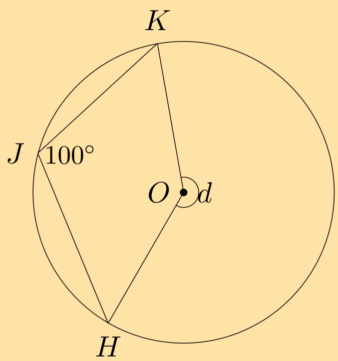
2.



Oplossing:

$$c = \frac{1}{2} \times 45^\circ \qquad (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek })$$
$$\therefore c = 22{,}5^\circ$$

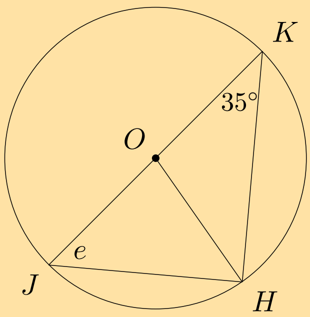
3.



Oplossing:

$$d = 2 \times 100^\circ \qquad (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek})$$
$$\therefore d = 200^\circ$$

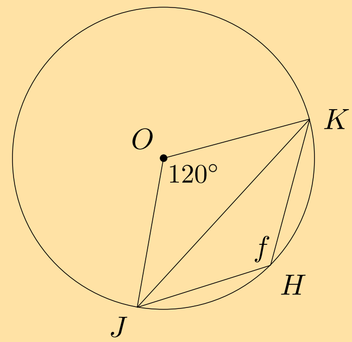
4.



Oplossing:

$$e = 100^\circ - 90^\circ - 35^\circ \qquad (\angle \text{ in halfsirkel })$$
$$\therefore e = 55^\circ$$

5.



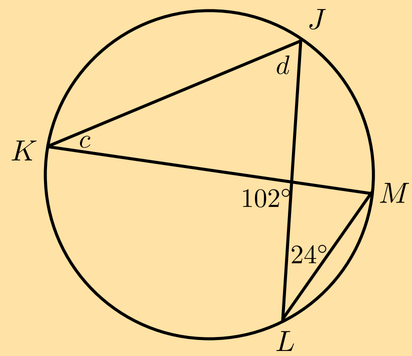
Oplossing:

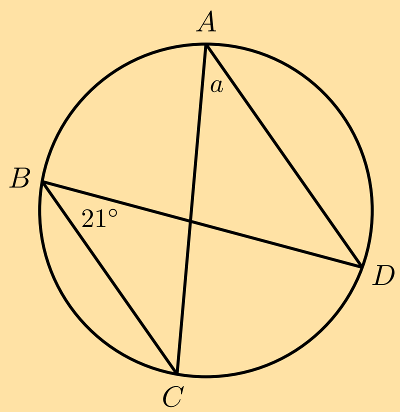
$$f = \frac{1}{2} \times 240° \qquad (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek })$$
$$\therefore f = 120°$$

Oefening 8 – 3: Omtrekshoeke in 'n sirkelsegment

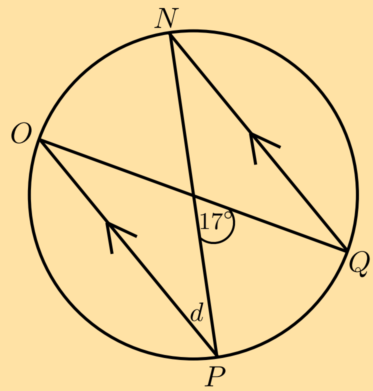
1. Bepaal die waardes van die onbekende hoeke.

   a)





   c)



   b)

Oplossing:

a)

$$a = 21° \qquad (\angle\text{e in dieselfde segment})$$

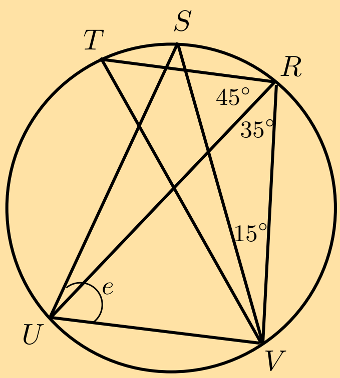
b)

$$\begin{aligned} c &= 24^\circ && \text{(}\angle\text{e in dieselfde segment)} \\ d &= 102^\circ - 24^\circ && \text{(buite } \angle\triangle = \text{ som teenoorst. binne } \angle\text{)} \\ \therefore d &= 78^\circ \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} d &= \hat{N} && \text{(verwisselende } \angle\text{e, } PO \parallel QN\text{)} \\ \hat{N} &= \tfrac{1}{2} \times 17^\circ && \text{(}\angle\text{ by mid.pt } = 2\angle\text{ by omtrek)} \\ \hat{O} &= \hat{N} && \text{(}\angle\text{e in dieselfde segment)} \\ 17^\circ &= \hat{O} + d && \text{(buitehoek } \triangle\text{)} \\ \therefore 2d &= 17^\circ \\ \therefore d &= 8{,}5^\circ && \text{(verwisselende } \angle\text{e, } PO \parallel QN\text{)} \end{aligned}$$

2.



a) Gegee $T\hat{V}S = S\hat{V}R$, bepaal die waarde van e.

b) Is TV die middellyn van die sirkel? Verduidelik jou antwoord.

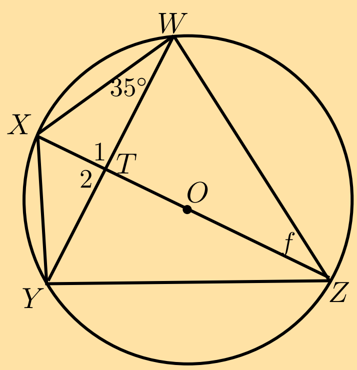
Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle TRV, \hat{T} &= 180^\circ - (80^\circ + 30^\circ) && \text{(som } \angle\triangle\text{)} \\ \therefore \hat{T} &= 70^\circ \\ \therefore e &= 15^\circ + 70^\circ \\ &= 85^\circ \end{aligned}$$

b) Nee, aangesien $45^\circ + 35^\circ \neq 90^\circ$

3. Gegee 'n sirkel met middelpunt O, $WT = TY$ en $X\hat{W}T = 35^\circ$. Bepaal f.



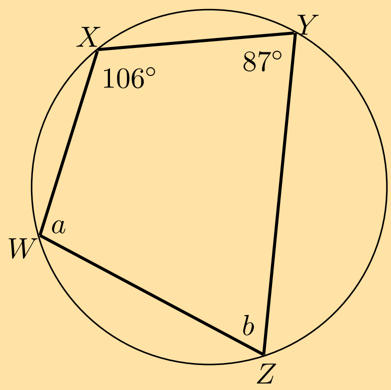
Oplossing:

$$\begin{aligned}
\text{In } \triangle WTZ \text{ en in } \triangle YTZ, & \\
WT = YT & \quad \text{(gegee)} \\
ZT = ZT & \quad \text{(gemene sy)} \\
Y\hat{T}Z = W\hat{T}Z = 90^\circ & \quad \text{(radius } \perp \text{ mid.pt. koord)} \\
\therefore T\hat{Z}Y = T\hat{Z}W & \quad \text{(SHS)} \\
T\hat{Z}Y = T\hat{Z}W = f & \\
\text{en } T\hat{Z}Y = 35^\circ & \quad (\angle\text{e in dieselfde segment}) \\
\therefore T\hat{Z}W = f = 35^\circ &
\end{aligned}$$

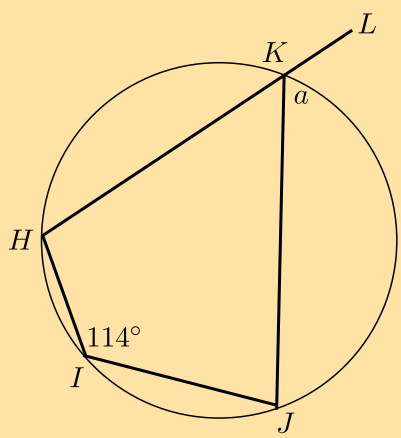
Oefening 8 – 4: Koordevierhoeke

1. Vind die waardes van die onbekende hoeke.

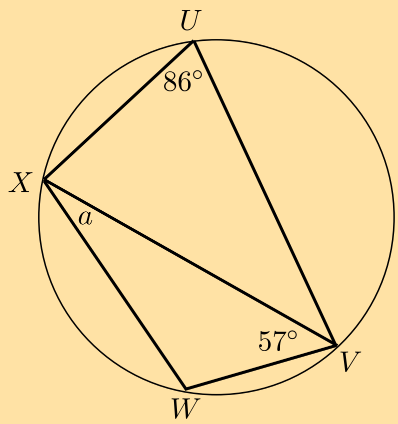
a)



b)



c)



Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
a + 87^\circ = 180^\circ & \quad \text{(teenoorst. binne}\angle\text{e supplementer)} \\
\therefore a = 93^\circ & \\
b + 106^\circ = 180^\circ & \quad \text{(teenoorst. binne}\angle\text{e supplementer)} \\
\therefore b = 74^\circ &
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
a &= H\hat{I}J \quad \text{(buite } \angle = \text{ som teenoorst. binne } \angle\text{e)} \\
&= 114^\circ
\end{aligned}$$

c)

$$\hat{W} + 86° = 180°$$ (teenoorst. binne∠e supplementer)

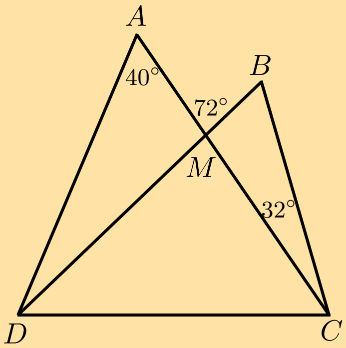
$$\therefore \hat{W} = 94°$$

$$a + \hat{W} + 57° = 180°$$ (som hoeke van △)

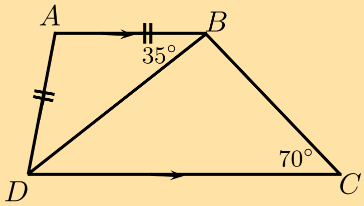
$$\therefore a = 29°$$

2. Bewys dat $ABCD$ is 'n koordevierhoek.

a)



b)



Oplossing:

a)

$$A\hat{M}B = 32° + D\hat{B}C$$ (buite ∠△ = som teenoorst. binne∠e)

$$\therefore 72° = 32° + D\hat{B}C$$

$$\therefore D\hat{B}C = 40°$$ (som hoeke van △)

$$\therefore D\hat{B}C = D\hat{A}C$$

$\therefore ABCD$ is koordevierhoek (∠e in dieselfde segment gelyk)

b)

In $\triangle ABD$,

$$A\hat{B}D = A\hat{D}B = 35°$$ (∠e teenoor gelyke sye)

$$\therefore 35° + 35° + D\hat{A}B = 180°$$ (som hoeke van △)

$$\therefore D\hat{A}B = 110°$$ (som hoeke van △)

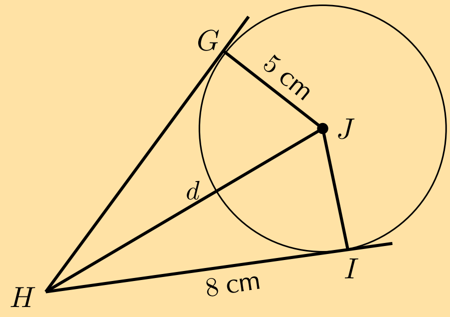
En $D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180°$

$\therefore ABCD$ is koordevierhoek (teenoorst. binne∠e suppl.)

Oefening 8 – 5: Raaklyne aan 'n sirkel

Bepaal die waardes van die onbekende lengtes.

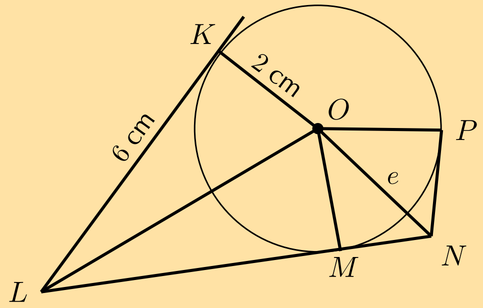
1.



Oplossing:

$$\begin{aligned} HI &= HG && \text{(raaklyne uit een pt.)} \\ \text{In } \triangle HIJ, \quad d^2 &= 8^2 + 5^2 && \text{(Pythagoras, radius } \perp \text{ raaklyn)} \\ \therefore d^2 &= 89 \\ \therefore d &= 9{,}4 \text{ cm} \end{aligned}$$

2.

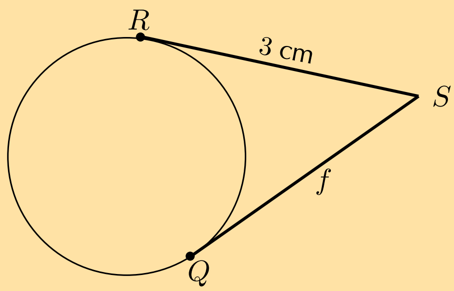


$LN = 7{,}5$ cm

Oplossing:

$$\begin{aligned} LM = LK &= 6 && \text{(raaklyne uit een pt.)} \\ LN &= 7{,}5 \text{ cm} && \text{(gegee)} \\ \therefore MN &= 7{,}5 - 6 = 1{,}5 \text{ cm} \\ OM &= 2 \text{ cm} && \text{(radius)} \\ \text{In } \triangle OMN, \quad e^2 &= 2^2 + (1{,}5)^2 && \text{(Pythagoras, radius } \perp \text{ raaklyn)} \\ \therefore e^2 &= 6{,}25 \\ \therefore e &= 2{,}5 \text{ cm} \end{aligned}$$

3.

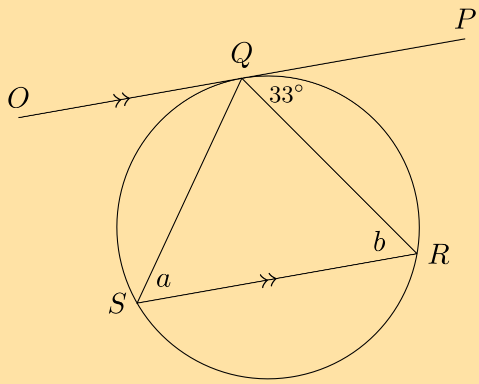


Oplossing: $f = 3$ cm

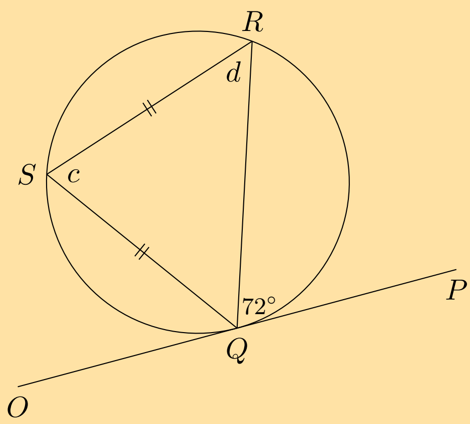
Oefening 8 – 6: Raaklyn-koord stelling

1. Bepaal die waardes van die onbekende simbole en gee redes vir jou antwoord.

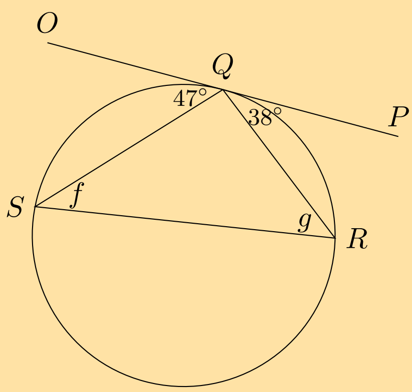
a)



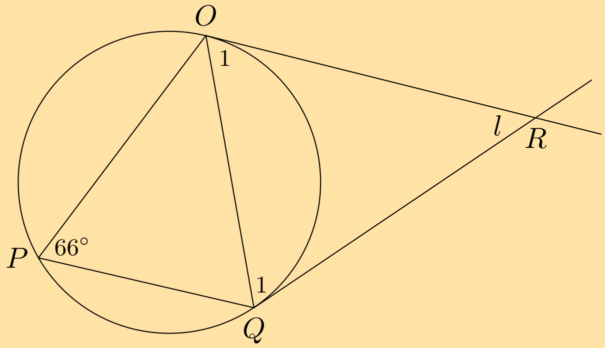
b)



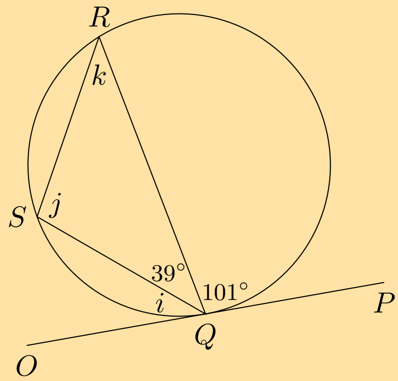
c)



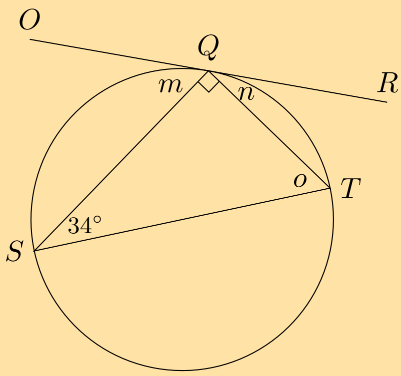
d)



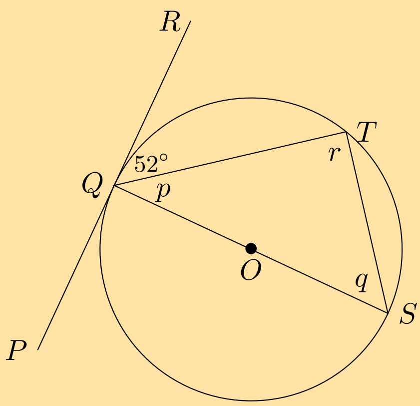
e)



f)



g)



Oplossing:

a)

$$a = 33^\circ \qquad \text{(raaklyn-koord)}$$
$$b = 33^\circ \qquad \text{(verwisselende } \angle\text{e}, OP \parallel SR)$$

b)

$$\begin{aligned} c &= 72^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \\ d &= \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} && \text{(gelykbenige } \triangle) \\ &= 54^\circ && \text{(verwisselende } \angle\text{e}, OP \parallel SR) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f &= 38^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \\ g &= 47^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 = \hat{Q}_1 &= 66^\circ && \text{(gelykbenig, raaklyn-koord)} \\ \therefore l &= 180^\circ - 2 \times 66^\circ && \text{(som hoeke van } \triangle) \\ &= 48^\circ \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} i &= 180^\circ - 101^\circ - 39^\circ && (\angle\text{e op reguitlyn }) \\ \therefore i &= 40^\circ \\ j &= 101^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \\ k = i &= 40^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \end{aligned}$$

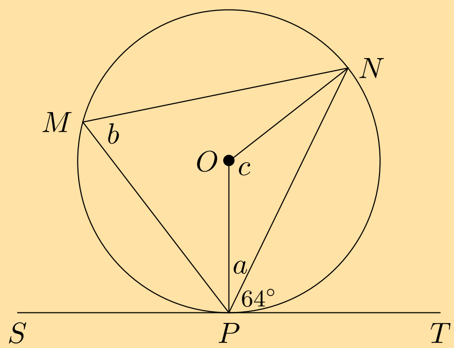
f)

$$\begin{aligned} n &= 34^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \\ o &= 180^\circ - 90^\circ - 34^\circ && \text{(som hoeke van } \triangle) \\ \therefore o &= 56^\circ \\ m &= 56^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} q &= 52^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \\ p &= 90^\circ - 52^\circ && \text{(raaklyn } \perp \text{ radius)} \\ \therefore p &= 38^\circ \\ r &= 90^\circ && (\angle \text{ in halfsirkel}) \end{aligned}$$

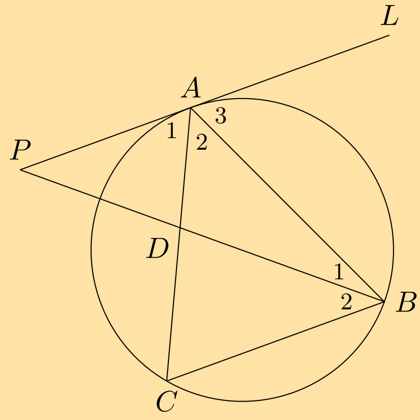
2. O is die middelpunt van die sirkel en SPT is 'n raaklyn, met $OP \perp ST$. Bepaal a, b en c, met redes.



Oplossing:

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - 64^\circ && \text{(raaklyn } \perp \text{ radius)} \\ &= 26^\circ \\ b &= 64^\circ && \text{(raaklyn-koord)} \\ c &= 2 \times 64^\circ && (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek)} \\ &= 128^\circ \end{aligned}$$

3.



Gegee $AB = AC$, $AP \parallel BC$ en $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$. Bewys.

a) PAL is 'n raaklyn aan die sirkel ABC.

b) AB is 'n raaklyn aan die sirkel ADP.

Oplossing:

a)

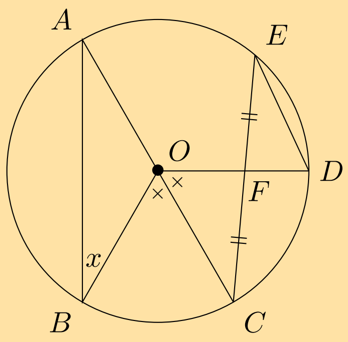
$$\begin{aligned} \hat{A}_1 &= A\hat{C}B && \text{(verwisselende } \angle\text{e, } AP \parallel BC) \\ A\hat{C}B &= A\hat{B}C && (\angle\text{e teenoor gelyke sye , } AB = AC) \\ \therefore \hat{A}_1 &= A\hat{B}C \\ \therefore PAL & \text{ is raaklyn aan sirkel } ABC && (\angle \text{ lyn/koord } = \angle \text{ in teenoorst. seg.)} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \hat{A}_2 &= \hat{B}_2 && \text{(gegee)} \\ A\hat{P}B &= \hat{B}_2 && \text{(verwisselende } \angle\text{e, } AP \parallel BC) \\ \therefore A\hat{P}B &= \hat{A}_2 ABC \\ \therefore AB & \text{ is raaklyn aan sirkel } ADP && (\angle \text{ lyn/koord } = \angle \text{ in teenoorst. seg.)} \end{aligned}$$

Oefening 8 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1.



AOC is die middellyn van die sirkel met middelpunt O. F is die middelpunt van koord EC. $B\hat{O}C = C\hat{O}D$ en $\hat{B} = x$. Druk die volgende hoeke uit in terme van x, met vermelding van redes:

a) $\hat{A}$

b) $C\hat{O}D$

c) $\hat{D}$

Oplossing:

a)

$$\hat{A} = x \qquad \text{(radius } OA = OB\text{)}$$

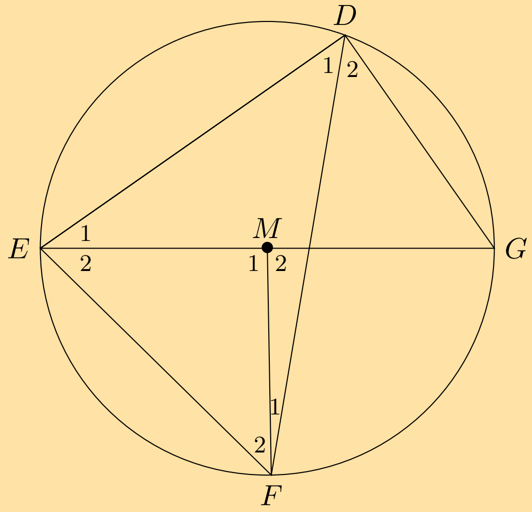
b)

$$\begin{aligned} C\hat{O}B &= 2x && \text{(hoeke by midpunt en op omtrek)} \\ &= C\hat{O}D && \text{(gegee)} \\ &= 2x \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \tfrac{1}{2}C\hat{O}D \\ &= x && \text{(hoeke by midpunt en op omtrek)} \\ \therefore \hat{D} &= 90^\circ - x && \text{(som } \angle\text{e}\triangle = 180^\circ\text{)} \end{aligned}$$

2.



D, E, F en G is punte op die sirkel met middelpunt M. $\hat{F}_1 = 7°$ en $\hat{D}_2 = 51°$. Bepaal die groottes van die volgende hoeke, met vermelding van redes:

a) $\hat{D}_1$

b) $\hat{M}_1$

c) $\hat{F}_2$

d) $\hat{G}$

e) $\hat{E}_1$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 &= \tfrac{1}{2} \times 78° && (\angle \text{ by mid.pt } = 2 \times \angle \text{ by omtrek}) \\ \therefore \hat{D}_1 &= 39° \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \hat{M}_2 &= 2 \times 51° && (\angle \text{ by mid.pt } = 2 \times \angle \text{ by omtrek}) \\ \therefore \hat{M}_2 &= 102° \\ \hat{M}_1 &= 180° - 102° && (\angle\text{e op reguitlyn}) \\ \therefore \hat{M}_1 &= 78° \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \hat{F}_2 + \hat{E}_2 &= 102° && (\text{buite } \angle\triangle) \\ \hat{F}_2 &= \hat{E}_2 && (ME = MF) \\ &= 51° \end{aligned}$$

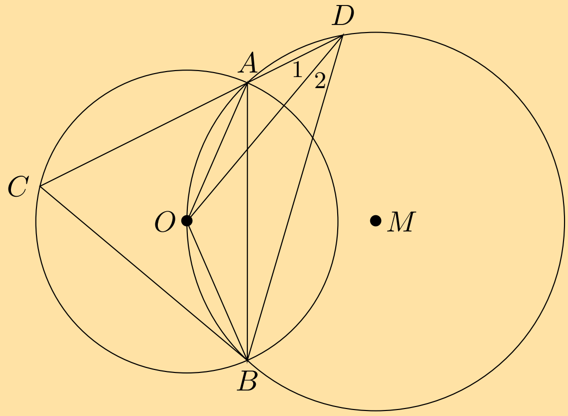
d)

$$\begin{aligned} \hat{G} &= E\hat{F}D && (\angle\text{e op dieselfde koord}) \\ &= 58° \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \hat{E}_1 &= 180° - 90° - \hat{G} \\ &= 180° - 90° - 58° \\ \therefore \hat{E}_1 &= 32° \end{aligned}$$

3.



O is 'n punt op die sirkel met middelpunt M. O is ook die middelpunt van 'n tweede sirkel. DA sny die kleiner sirkel by C en $\hat{D}_1 = x$. Druk die volgende hoeke uit in terme van x; met redes:

a) $\hat{D}_2$

b) $O\hat{A}B$

c) $O\hat{B}A$

d) $A\hat{O}B$

e) $\hat{C}$

Oplossing:

a)
$$\begin{aligned} \hat{D}_2 &= \hat{D}_1 \qquad (\angle\text{e op gelyke koorde, } OA = OB) \\ &= x \end{aligned}$$

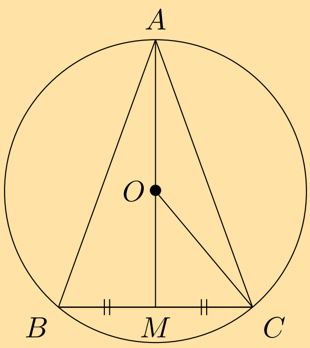
b)
$$O\hat{A}B = x \qquad (\angle\text{e op dieselfde koord})$$

c)
$$O\hat{B}A = x \qquad (\text{gelyke radii, } OA = OB)$$

d)
$$A\hat{O}B = 180° - 2x \qquad (\text{som } \angle\text{e } \triangle = 180°)$$

e)
$$\hat{C} = 90° - x \qquad (\angle\text{e op dieselfde koord}))$$

4.



O is die middelpunt van die sirkel met radius 5 cm en koord $BC = 8$ cm. Bereken die lengtes van:

a) OM

b) AM

c) AB

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} \text{In } OMC, \quad OC^2 &= OM^2 + MC^2 \qquad \text{(Pythagoras)} \\ 5^2 &= OM^2 + 4^2 \\ \therefore OM &= 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

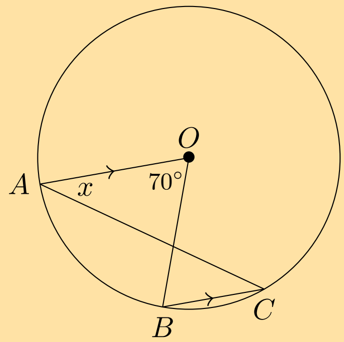
b)

$$\begin{aligned} AM &= 5 + 3 \\ \therefore AM &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \text{In } ABM, \quad AB^2 &= BM^2 + AM^2 \qquad \text{(Pythagoras)} \\ AB^2 &= 8^2 + 4^2 \\ AB &= \sqrt{80} \\ \therefore AB &= 4\sqrt{5}\text{cm} \end{aligned}$$

5.

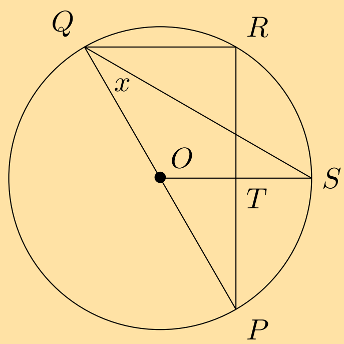


$AO \parallel CB$ in sirkel met middelpunt O. $A\hat{O}B = 70°$ en $O\hat{A}C = x$. Bereken die waarde van x, met opgaaf van redes.

Oplossing:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \tfrac{1}{2}A\hat{O}B \qquad (\angle \text{ by mid.pt } = 2\angle \text{ by omtrek}) \\ &= 35° \\ \therefore x &= 35° \qquad (\text{verwisselende } \angle\text{e}, AO \parallel BC) \end{aligned}$$

6.



PQ is die middellyn van die sirkel met middelpunt O. SQ halveer $P\hat{Q}R$ en $P\hat{Q}S = x$.

a) Skryf nog twee hoeke neer wat ook gelyk is aan x.

b) Bereken $P\hat{O}S$ in terme van x, met opgaaf van redes.

c) Bewys dat OS 'n loodregte halveerlyn is van PR.

Oplossing:

a)

$$R\hat{Q}S = x$$
$$Q\hat{S}O = x$$

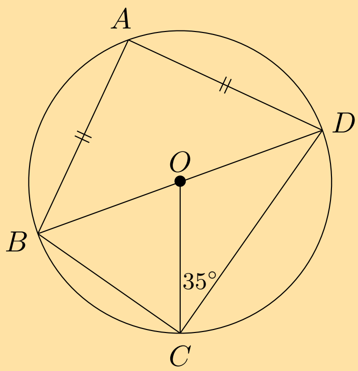
b)

$$\begin{aligned} P\hat{O}S &= 2 \times P\hat{Q}S && \text{(hoeke by midpunt en op omtrek)} \\ &= 2x \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 && \text{(bewys)} \\ \therefore QR &\parallel OS \\ \therefore \hat{R} &= R\hat{T}S && \text{(verwisselende } \angle\text{e}, QR \parallel OS) \\ &= 90^\circ && (\hat{R} = \angle \text{ in halfsirkel}) \\ \therefore PT &= TR \\ \therefore OS & \text{ halveer loodreg } PR \end{aligned}$$

7.



$B\hat{O}D$ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. $AB = AD$ en $O\hat{C}D = 35^\circ$. Bereken die waarde van die volgende, met redes:

a) $O\hat{D}C$

b) $C\hat{O}D$

c) $C\hat{B}D$

d) $B\hat{A}D$

e) $A\hat{D}B$

Oplossing:

a)

$$O\hat{D}C = 35^\circ \qquad \text{(gelyke radii, } OC = OD)$$

b)

$$\begin{aligned} C\hat{O}D &= 180^\circ - 70^\circ && (\text{som}\angle\text{e } \triangle = 180^\circ) \\ &= 110^\circ \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} C\hat{B}D &= \tfrac{1}{2} C\hat{O}D && (\angle\text{e op reguitlyn } CD) \\ &= 55^\circ \end{aligned}$$

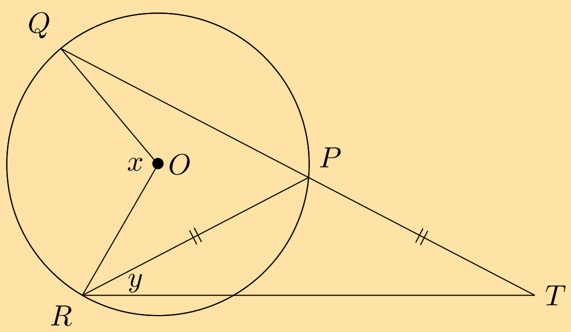
d)

$$B\hat{A}D = 90° \qquad (\angle \text{ in halfsirkel})$$

e)

$$A\hat{D}B = \frac{180°-90°}{2} \qquad (\text{som } \angle\text{e in } \triangle = 180°)$$
$$= 45°$$

8.

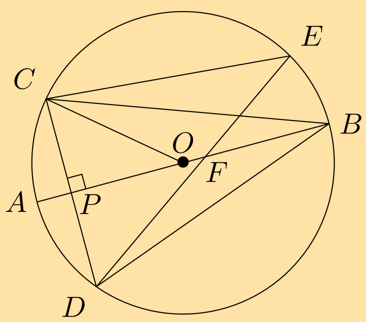


QP in die sirkel met middelpunt O, is verleng na T sodat $PR = PT$. Druk y uit in terme van x.

Oplossing:

$$\begin{aligned} T &= y && (PT = PR) \\ \therefore Q\hat{P}R &= 2y && (\text{buite}\angle\triangle = \text{ som binne } \angle\text{e}) \\ \therefore x &= 2(2y) && (\angle\text{e by midpunt en op omtrek op } QR) \\ x &= 4y \end{aligned}$$

9.



O is die middelpunt van die sirkel met middellyn AB. $CD \perp AB$ by P en koord DE sny AB by F. Bewys dat:

a) $C\hat{B}P = D\hat{P}B$

b) $C\hat{E}D = 2C\hat{B}A$

c) $A\hat{B}D = \frac{1}{2}C\hat{O}A$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle CBP \text{ en } \triangle DBP\text{:} && \\
&CP = DP && (OP \perp CD) \\
&C\hat{P}B = D\hat{P}B = 90^\circ && \text{(gegee)} \\
&BP = BP && \text{(gemeen)} \\
&\therefore \triangle CBP \equiv DBP && \text{(SHS)}
\end{aligned}$$

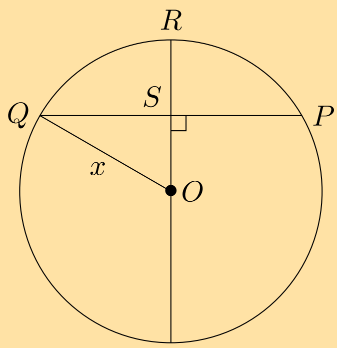
b)

$$\begin{aligned}
C\hat{E}D &= C\hat{B}D && (\angle\text{'s on } CD) \\
\text{Maar } C\hat{B}A &= D\hat{B}A && (\triangle CBP \equiv \triangle DBP) \\
\therefore C\hat{E}D &= 2C\hat{B}A &&
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
D\hat{B}A &= C\hat{B}A && (\triangle CBP \equiv \triangle DBP) \\
C\hat{B}A &= \tfrac{1}{2}C\hat{O}A && (\angle\text{e by midpunt en omtrek op boog } AC) \\
\therefore A\hat{B}D &= \tfrac{1}{2}C\hat{O}A &&
\end{aligned}$$

10.

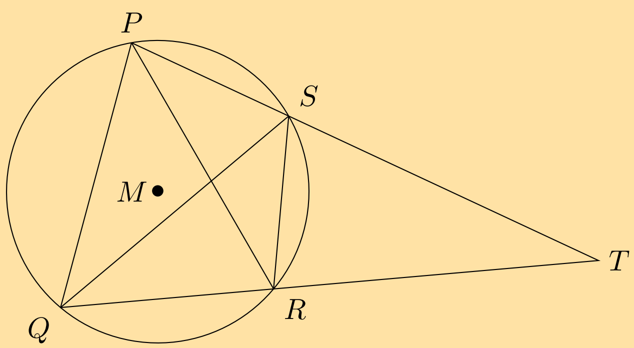


In die sirkel met middelpunt O, $OR \perp QP$, $PQ = 30$ mm en $RS = 9$ mm. Bepaal die lengte van OQ.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
&\text{In } \triangle QOS, && \\
&QO^2 = OS^2 + QS^2 && \text{(Pythagoras)} \\
&x^2 = (x-9)^2 + 15^2 && \\
&x^2 = x^2 - 18x + 81 + 225 && \\
&\therefore 18x = 306 && \\
&\therefore x = 17 &&
\end{aligned}$$

11.



P, Q, R en S is punte op die sirkel met middelpunt M. PS en QR word verleng en ontmoet by T. $PQ = PR$ en $P\hat{Q}R = 70°$.

a) Bepaal, met redes, nog drie hoeke gelyk aan $70°$.
b) As $Q\hat{P}S = 80°$, bereken $S\hat{R}T$, $S\hat{T}R$ en $P\hat{Q}S$.
c) Verduidelik hoekom PQ 'n raaklyn is aan die sirkel QST by punt Q.
d) Bepaal $P\hat{M}Q$.

Oplossing:

a) $Q\hat{R}P, Q\hat{S}P, R\hat{S}T$

b)

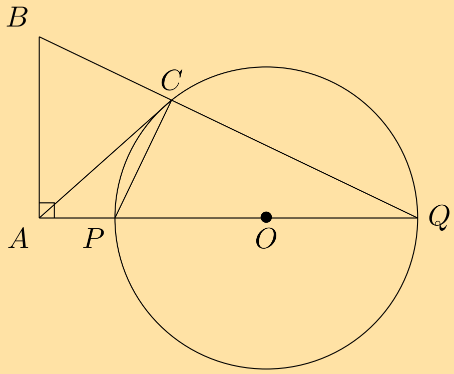
$$\begin{aligned} &\text{In } \triangle QOS, && \\ & S\hat{R}T = 80° && \text{(buite hoek koordevierhoek)} \\ & S\hat{T}R = 180° - 80° - 30° && (\text{som } \angle\text{e in } \triangle = 180°) \\ \therefore\ & S\hat{T}R = 30° && \\ \text{In } \triangle PQS,\ & P\hat{Q}S = 180° - 80° - 30° && (\text{som } \angle\text{e in } \triangle = 180°) \\ \therefore\ & P\hat{Q}S = 30° && \end{aligned}$$

c) $P\hat{Q}S = Q\hat{T}S = 30°$, dus PQ is 'n raaklyn aan die sirkel deur QST (hoek tussen lyn en koord gelyk aan in teenoorst. segment)

d)

$$\begin{aligned} \text{In } \triangle PMQ,\ & P\hat{M}Q = 180° - 30° - 40° && (\text{som } \angle\text{e in } \triangle = 180°) \\ \therefore\ & P\hat{M}Q = 110° && \end{aligned}$$

12.



POQ is 'n middellyn van die sirkel met middelpunt O. QP is verleng na A en AC is 'n raaklyn aan die sirkel. $BA \perp AQ$ en BCQ is 'n reguitlyn. Bewys:

a) $P\hat{C}Q = B\hat{A}P$
b) $BAPC$ is 'n koordevierhoek
c) $AB = AC$

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} & P\hat{C}Q = 90° && (\angle \text{ in halfsirkel)} \\ & B\hat{A}Q = 90° && (\text{ gegee } BA \perp AQ) \\ \therefore\ & P\hat{C}Q = B\hat{A}Q && \end{aligned}$$

b)

$P\hat{C}Q = B\hat{A}Q$ (bewys)

$\therefore BAPC$ is 'n koordevierhoek (buitehoek = teenoorst. binne $\angle$)

c)

$C\hat{P}Q = A\hat{B}C$ (buite $\angle$ koordevierhoek)

$B\hat{C}P = C\hat{P}Q + C\hat{Q}P$ (buite $\angle\triangle$)

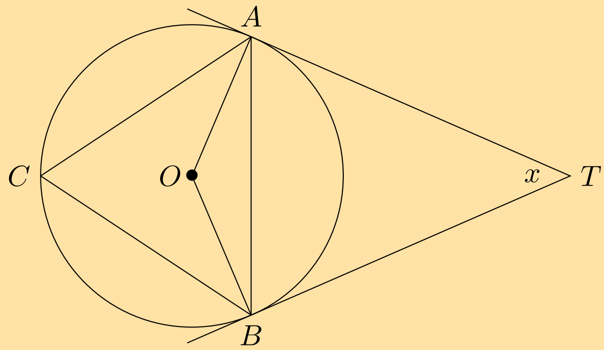
$A\hat{C}P = C\hat{Q}P$ (raaklyn-koord)

$\therefore B\hat{C}A = C\hat{P}Q$

$\therefore = A\hat{B}C$

$\therefore AB = AC$ (hoeke teenoor gelyke sye)

13.



TA en TB is raaklyne aan die sirkel met middelpunt O. C is 'n punt op die omtrek van $A\hat{T}B = x$. Druk die volgende uit in terme van x, met vermelding van redes:

a) $A\hat{B}T$

b) $O\hat{B}A$

c) $\hat{C}$

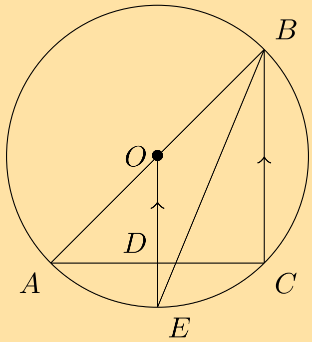
Oplossing:

a) $90° - \frac{x}{2}$

b) $O\hat{B}A = \frac{x}{2}$

c) $90° - \frac{x}{2}$

14.



AOB is 'n middellyn van die sirkel $AECB$ met middelpunt O. $OE \parallel BC$ en sny AC by D.

a) Bewys $AD = DC$

b) Toon dat $A\hat{B}C$ halveer word deur EB

c) As $O\hat{E}B = x$, druk $B\hat{A}C$ uit in terme van x

d) Bereken die radius van die sirkel as $AC = 10$ cm en $DE = 1$ cm

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} BC &\parallel OE && (\text{ gegee }) \\ A\hat{C}B &= 90° && (\angle \text{ in halfsirkel }) \\ \therefore O\hat{D}C &= 90° && (\text{ ooreenkomstige } \angle\text{e}, BC \parallel OE) \\ \therefore AD &= DC && (\text{loodlyn van midpt. sirkel na midpt. koord }) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} O\hat{E}B &= E\hat{B}C && ((\text{verwisselende } \angle\text{e}, OE \parallel BC) \\ OE &= OB && (\text{ gelyke radii}) \\ \therefore O\hat{E}B &= O\hat{B}E && (\angle\text{e teenoor gelyke sye }) \\ \therefore O\hat{B}E &= E\hat{B}C && \\ \therefore A\hat{B}C & \text{ word halveer} && \end{aligned}$$

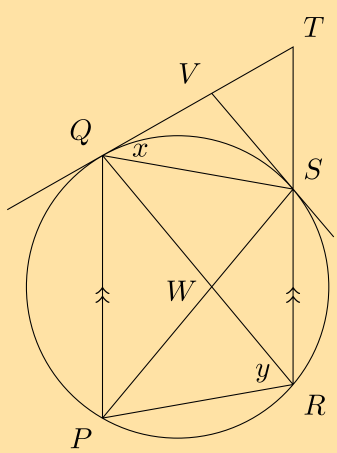
c)

$$\begin{aligned} \text{In } & \triangle BAC, \\ B\hat{A}C &= 180° - 90° - 2x && (\text{ som } \angle\triangle) \\ \therefore B\hat{A}C &= 90° - 2x \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \text{In } & \triangle AOD, \\ \text{Laat } AO &= r \\ AO^2 &= 5^2 + (r-1)^2 && (\text{ Pythagoras }) \\ r^2 &= 25 + r^2 - 2r + 1 \\ 2r &= 26 \\ \therefore r &= 13 \text{ cm} \end{aligned}$$

15.



PQ en RS is koorde van die sirkel en $PQ \parallel RS$. Die raaklyn aan die sirkel by Q ontmoet RS verleng by T. Die raaklyn by S ontmoet QT by V. QS en PR word getrek.

Laat $T\hat{Q}S = x$ en $Q\hat{R}P = y$. Bewys dat:

a) $T\hat{V}S = 2Q\hat{R}S$

b) $QVSW$ is 'n koordevierhoek

c) $Q\hat{P}S + \hat{T} = P\hat{R}T$

d) W is die middelpunt van die sirkel

Oplossing:

a)

$$\begin{array}{rll} \text{In } & \triangle VQS, & \\ & VQ = VS & \text{(raaklyne vanaf een punt)} \\ & \therefore V\hat{S}Q = V\hat{Q}S = x & \text{(}\angle\text{e teenoor gelyke sye)} \\ & \therefore T\hat{V}S = x + x & \text{(buite } \angle\triangle\text{)} \\ & = 2x & \\ & \text{En } Q\hat{R}S = Q\hat{P}S = x & \text{(}\angle\text{e in dieselfde segment)} \\ & \therefore T\hat{V}S = 2Q\hat{R}S & \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rl} T\hat{V}S = 2Q\hat{R}S & \text{(bewys)} \\ V\hat{Q}S = Q\hat{P}S & \text{(raaklyn-koord)} \\ Q\hat{P}S = P\hat{S}R = x & \text{(verwisselende } \angle\text{e, } PQ \parallel RT\text{)} \\ \text{En } Q\hat{W}S = 2Q\hat{R}S & \text{(buite } \angle\triangle WSR\text{)} \\ \therefore T\hat{V}S = Q\hat{W}S = 2x & \\ \therefore QVSW = \text{ is 'n koordevierhoek} & \text{(buite } \angle\text{van koordevierhoek)} \end{array}$$

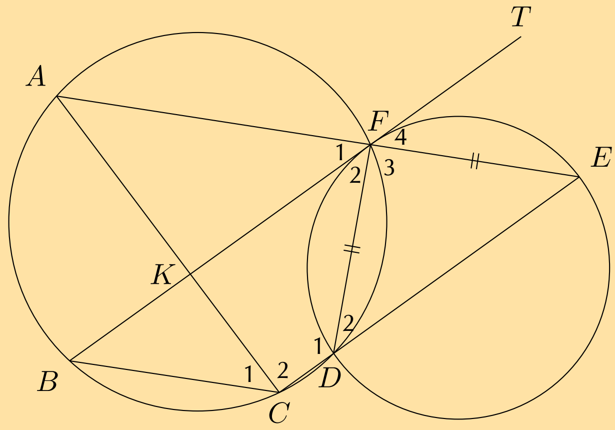
c)

$$\begin{array}{rl} \hat{Q} = Q\hat{R}P = y & \text{(raaklyn-koord)} \\ \hat{Q} = \hat{T} = y & \text{(verwisselende } \angle\text{e, } PQ \parallel RT\text{)} \\ P\hat{R}T = x + y & \\ \text{En } Q\hat{P}S = x & \text{(}\angle\text{ bewys)} \\ \therefore Q\hat{P}S + \hat{T} = x + y & = P\hat{R}T \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rl} Q\hat{R}S = x & \text{(bewys)} \\ Q\hat{W}S = 2x & \text{(bewys)} \\ \therefore W = \text{ is mid.pt sirkel} & \text{(}\angle\text{ by mid.pt } = 2\angle\text{ by omtrek)} \end{array}$$

16.



Die twee sirkels sny by punte F en D. BFT is 'n raaklyn aan die kleiner sirkel by F. Reguitlyn AFE word so getrek dat $DF = EF$. CDE 'n reguitlyn is en koord AC en BF sny by K. Bewys dat:

a) $BT \parallel CE$

b) $BCEF$ is 'n parallelogram

c) $AC = BF$

Oplossing:

a)

$$\begin{array}{rl} \hat{E} = \hat{D}_2 & (\angle\text{e teenoor gelyke sye}) \\ \hat{F}_4 = \hat{F}_1 & (\text{regoorstaande } \angle\text{e}) \\ \text{en } \hat{F}_4 = \hat{D}_2 & (\text{raaklyn-koord}) \\ \therefore \hat{F}_1 = \hat{D}_2 & \\ \therefore BT \parallel CE & (\text{ooreenkomst. } \angle\text{e gelyk}) \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rl} \therefore BT \parallel CE & (\text{bewys}) \\ \therefore \hat{F}_1 = \hat{C}_1 & (\angle\text{e in dieselfde segment}) \\ \therefore AE \parallel BC & (\text{verwisselende } \angle\text{e}) \\ \therefore BCEF \text{ is parallelogram} & (\angle \text{ beide teenoorst. sye } \parallel) \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rl} \hat{F}_1 = \hat{C}_1 & (\text{bewys}) \\ \hat{F}_1 = \hat{E} & (\text{bewys}) \\ \hat{A} = \hat{C}_1 & (\text{verwisselende } \angle\text{e}, AE \parallel BC) \\ \therefore \hat{A} = \hat{E} & \\ \therefore AC = CE & (\text{hoeke teenoor gelyke sye}) \\ BF = CE & (\text{teenoorst. sye parm} =) \\ \therefore AC = BF & \end{array}$$

HOOFSTUK 9

Finansies, groei en verval

- Bespreek terminologie.
- Baie belangrik om te beklemtoon dat berekeninge nie afgerond moet word voor die finale antwoord nie.
- Leerders behoort berekeninge in een stap te kan doen deur die geheuefunksie van hulle sakrekenaars te gebruik.
- Trek tydlyne wat die verskillende tydsperiodes, rentekoerse en enige deposito-s/onttrekkings aantoon.
- Bespreek regte lewe finansiële sake: spaar, begrotings, belasting, aftrede, ens.

9.1 Hersiening

Oefening 9 – 1: Hersiening

1. Bepaal die waarde van 'n belegging van R 10 000 teen $12{,}1\%$ enkelvoudige rente per jaar vir 3 jaar.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= 10\ 000(1 + 0{,}121 \times 3) \\ &= \text{R } 13\ 630 \end{aligned}$$

2. Bereken die waarde van R 8000 belê teen $8{,}6\%$ p.j. saamgestelde rente vir 4 jaar.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + i)^n \\ &= 8000(1 + 0{,}086)^3 \\ &= \text{R } 10\ 246{,}59 \end{aligned}$$

3. Bereken hoeveel rente John sal verdien as hy R 2000 vir 4 jaar belê teen:

   a) $6{,}7\%$ p.j. enkelvoudige rente
   b) $5{,}4\%$ p.j. saamgestelde rente

   Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ &= 2000(1 + 0{,}067 \times 4) \\ &= \text{R } 2536 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} A &= P(1 + i)^n \\ &= 2000(1 + 0{,}054)^4 \\ &= \text{R } 2468{,}27 \end{aligned}$$

4. Die waarde van die belegging groei van R 2200 tot R 3850 in 8 jaar. Bepaal die enkelvoudige rentekoers waarteen dit belê is.

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + in) \\ 3850 &= 2200(1 + 8i) \\ \frac{3850}{2200} - 1 &= 8i \\ \therefore \frac{1}{8}\left(\frac{3850}{2200} - 1\right) &= i \\ \therefore i &= 9{,}38\% \end{aligned}$$

5. James het R 12 000 gehad en het dit vir 5 jaar belê. As die waarde van sy belegging R 15 600 is, watter saamgestelde rente het dit verdien?

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1 + i)^n \\ 15\ 000 &= 12\ 000(1 + i)^5 \\ \frac{15\ 000}{12\ 000} &= (1 + i)^5 \\ \sqrt[5]{\frac{15\ 000}{12\ 000}} - 1 &= i \\ \therefore i &= 4{,}56\% \end{aligned}$$

9.2 Enkelvoudige of saamgestelde waardevermindering

Enkelvoudige waardevermindering

Oefening 9 – 2: Enkelvoudige verval

1. 'n Besigheid koop 'n vragmotor vir R 560 000. Oor 'n periode van 10 jaar depresiëer die waarde van die vragmotor na R 0 volgens die reguitlynmetode. Wat is die waarde van die vragmotor na 8 jaar?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Depresiasiebedrag } &= \frac{560\ 000}{10} \\ &= \text{R } 56\ 000 \text{ per jaar} \\ \text{Vir } n &= 8 \\ A &= 560\ 000 - 8(56\ 000) \\ &= \text{R } 112\ 000 \end{aligned}$$

2. Harry wil sy oupa se donkie vir R 800 koop. Sy oupa is ingenome met die aanbod, aangesien die donkie slegs teen 3% per jaar gedepresiëer het op die reguitlynmetode. Oupa het die donkie 5 jaar gelede gekoop. Wat het oupa oorspronklik vir die donkie betaal?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1 - in) \\ 800 &= P(1 - (0{,}03 \times 5)) \\ \therefore \frac{800}{0{,}85} &= P \\ \therefore P &= \text{R } 941{,}18 \end{aligned}$$

3. Sewe jaar gelede het Rocco se drommestel hom R 12 500 gekos. Dit is nou gewaardeer op R 2300. Teen watter koers van enkelvoudige waardevermindering het dit gedepresiëer?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1 - in) \\ 2300 &= 12\ 500(1 - (i \times 7)) \\ \therefore \frac{2300}{12\ 500} &= 1 - 7i \\ 0{,}184 - 1 &= -7i \\ \frac{-0{,}816}{-7} &= i \\ \therefore i &= 11{,}66\% \end{aligned}$$

4. Fiona koop 'n DStv satellietskottel vir R 3000. As gevolg van verwering depresiëer die waarde daarvan met 15% per jaar. Na hoe lank sal die satellietskottel 'n boekwaarde van nul hê?

Oplossing:

$$\begin{aligned} \text{Depresiasiebedrag } &= 3000 \times \frac{15}{100} \\ &= \text{R 450 per jaar} \\ \therefore n &= \frac{3000}{450} \\ &= 6{,}666\ldots \\ \therefore n &= 7 \text{ jare} \end{aligned}$$

Of

$$\begin{aligned} A &= P(1 - in) \\ 0 &= 3000(1 - 0{,}15 \times n) \\ \therefore 0 &= 1 - 0{,}15n \\ 0{,}15n &= 1 \\ n &= \frac{1}{0{,}15} \\ &= 6{,}666\ldots \\ \therefore n &= 7 \text{ jare} \end{aligned}$$

Saamgestelde depresiasie

Oefening 9 – 3: Saamgestelde depresiasie

1. Jwayelani koop 'n vragmotor vir R 89 000 en depresiëer dit teen 9% p.j. deur die saamgestelde waardeverminderingsmetode te gebruik. Wat is die waarde van die vragmotor na 14 jaar?

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1 - i)^n \\ &= 89\ 000(1 - 0{,}09)^{14} \\ &= 89\ 000(0{,}91)^{14} \\ \therefore A &= \text{R } 23\ 766{,}73 \end{aligned}$$

2. Die aantal rietduikers by die Amanzimtoti-riviermond neem af met 'n saamgestelde koers van 8% p.j. As daar nou $10\ 000$ rietduikers is, hoeveel sal daar 18 jaar van nou af wees?

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ &= 10\ 000(1-0{,}08)^{18} \\ &= 10\ 000(0{,}92)^{18} \\ &= 2229{,}36\ldots \\ \therefore A &= 2229 \text{ rietduikers} \end{aligned}$$

3. Op 1 Januarie 2008 is die waarde van my Kia Sorento R 320 000. Elke jaar daarna sal die motor se waarde verminder met 20% van die vorige jaar se waarde. Wat is die waarde van die motor op 1 Januarie 2012?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ &= 320\ 000(1-0{,}2)^{4} \\ &= 320\ 000(0{,}8)^{4} \\ \therefore A &= \text{R } 131\ 072 \end{aligned}$$

4. Die bevolking van Bonduel verminder teen 'n verminderde-balans koers van 9,5% per jaar, soos mense na die stede migreer. Bereken die afname in bevolking oor 'n periode van 5 jaar as die oorspronklike bevolking 2 178 000 was.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ &= 2\ 178\ 000(1-0{,}095)^{5} \\ &= 2\ 178\ 000(0{,}905)^{5} \\ \therefore A &= 132\ 221 \end{aligned}$$

5. 'n 20 kg waatlemoen bestaan uit 98% water. As dit buite in die son gelaat word verloor dit elke dag 3% van hierdie water. Hoeveel weeg dit na 'n maand van 31 dae?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ A &= \left(20 \times \frac{98}{100}\right)(1-0{,}03)^{31} \\ &= 19{,}6(0{,}97)^{31} \\ \therefore A &= 7{,}62 \text{ kg} \end{aligned}$$

6. Richard het 15 jaar gelede 'n motor gekoop en dit het met 17% p.j. op 'n saamgestelde basis gedepresiëer. Hoeveel het hy vir die motor betaal as dit nou R 5256 werd is?

Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ 5256 &= P(1-0{,}17)^{15} \\ \frac{5256}{0{,}83^{15}} &= P \\ \therefore P &= \text{R } 85\ 997{,}13 \end{aligned}$$

Om i te bepaal

Oefening 9 – 4: Om i te bepaal

1. 'n masjien kos R 45 000 en het 'n afskryfwaarde van R 9000 na 10 jaar. Bepaal die jaarlikse depresiasiekoers bereken op die verminderde-balans metode.

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ 9000 &= 45\ 000(1-i)^{10} \\ \frac{9000}{45\ 000} &= (1-i)^{10} \\ \sqrt[10]{\frac{9000}{45\ 000}} - 1 &= -i \\ \therefore i &= 14{,}9\% \end{aligned}$$

2. Na 15 jaar is 'n vliegtuig $\frac{1}{6}$ van sy oorspronklike waarde werd. Teen watter jaarlikse koers is waardevermindering saamgestel?

   Oplossing:

$$\begin{aligned} A &= P(1-i)^n \\ \frac{1}{6}P &= P(1-i)^{15} \\ \frac{1}{6} &= (1-i)^{15} \\ \sqrt[10]{\frac{1}{6}} - 1 &= -i \\ \therefore i &= 16{,}4\% \end{aligned}$$

3. Mnr. Mabula koop meubels teen R 20 000. Na 6 jaar verkoop hy die meubels vir R 9300. Bereken die jaarlikse saamgestelde waardeverminderingskoers van die meubels.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
A &= P(1-i)^n \\
9300 &= 20\ 000(1-i)^6 \\
\frac{9300}{20\ 000} &= (1-i)^6 \\
\sqrt[6]{\frac{9300}{20\ 000}} - 1 &= -i \\
\therefore i &= 12{,}0\%
\end{aligned}$$

4. Ayanda het 7 jaar gelede 'n nuwe motor gekoop teen dubbel wat dit vandag werd is. Teen watter jaarlikse saamgestelde koers het haar motor gedepresiëer?

Oplossing:

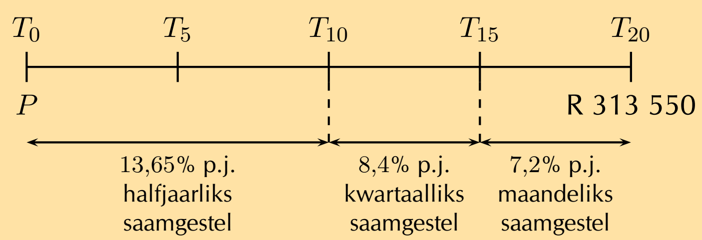
$$\begin{aligned}
A &= P(1-i)^n \\
\frac{1}{2}P &= P(1-i)^7 \\
\frac{1}{2} &= (1-i)^7 \\
\frac{1}{2} &= (1-i)^7 \\
\sqrt[7]{\frac{1}{2}} - 1 &= -i \\
\therefore i &= 9{,}4\%
\end{aligned}$$

9.3 Tydlyne

Oefening 9 – 5: Tydlyne

1. Na 'n 20-jaar periode word Josh se enkelbedragbelegging uitbetaalbaar tot 'n bedrag van R 313 550. Hoeveel het hy belê as sy geld rente teen 'n koers van $13{,}65\%$ p.j. verdien het, halfjaarliks saamgestel vir die eerste 10 jaar, dan $8{,}4\%$ p.j. kwartaalliks saamgestel vir die volgende vyf jaar, en dan $7{,}2\%$ p.j. maandeliks saamgestel vir die oorblywende tydperk?

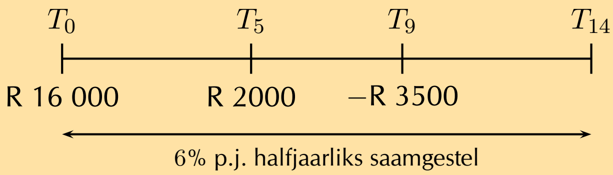
Oplossing:



$$\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
313\ 550 &= P\left(1+\frac{0{,}1365}{2}\right)^{10\times 2}\left(1+\frac{0{,}084}{4}\right)^{5\times 4}\left(1+\frac{0{,}072}{12}\right)^{5\times 12} \\
&= P\,(1{,}06825)^{20}\,(1{,}021)^{20}\,(1{,}006)^{60} \\
&= \text{R } 38\ 588{,}25
\end{aligned}$$

2. Sindisiwe wil 'n motorfiets koop. Die koste van die motorfiets is R 55 000. In 1998 het Sindisiwe 'n rekening by Sutherland Bank met R 16 000 oopgemaak. Toe het sy in 2003 nog R 2000 in die rekening inbetaal. In 2007 het Sinidisiwe nog 'n verandering gemaak: sy het R 3500 onttrek vanuit die rekening. As die rekening 6% betaal, halfjaarliks saamgestel, sal Sinidisiwe teen die einde van 2012 genoeg geld hê om die motorfiets te koop?

   Oplossing:



$$\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 16\ 000\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{14\times 2} + 2000\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{9\times 2} - 3500\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{5\times 2} \\
&= 16\ 000\,(1{,}03)^{28} + 2000\,(1{,}03)^{18} - 3500\,(1{,}03)^{10} \\
&= \text{R } 35\ 308{,}00
\end{aligned}$$

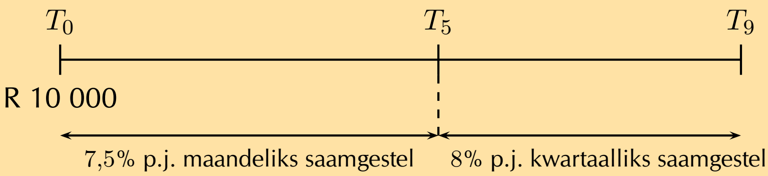
3. 'n Lening moet terugbetaal word in twee gelyke halfjaarlikse paaiemente. As die rentekoers 16% per jaar is, halfjaarliks saamgestel, en elke paaiement is R 1458, bereken die bedrag wat geleen is.

   Oplossing:

$$\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= P_1(1+\frac{0{,}16}{2})^1 \\
&= P_1(1{,}08) \\
\text{Dus } P_1(1{,}08) &= 1458 + P_2 \\
\text{en } P_2(1{,}08) &= 1458 \\
\therefore P_2 &= \frac{1458}{1{,}08} \\
\therefore P_1(1{,}08) &= 1458 + P_2 \\
\therefore P_1 &= \frac{1458}{1{,}08} + \frac{1458}{(1{,}08)^2} \\
&= \text{R } 2600
\end{aligned}$$

4. 'n Man met die naam van Phillip belê R 10 000 in 'n rekening by North Bank teen 'n rentekoers van 7,5% p.j. maandeliks saamgestel. Na 5 jaar verander die bank die rentekoers na 8% p.j. kwartaalliks saamgestel. Hoeveel geld sal Phillip in sy rekening hê 9 jaar na die oorspronklike deposito?

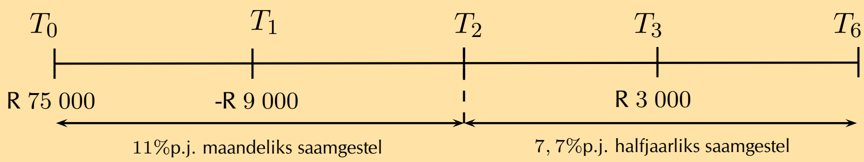
Oplossing:



$$
\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 10\ 000\left(1+\frac{0{,}075}{12}\right)^{5\times 12}\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4\times 4} \\
&= 10\ 000\,(1{,}00625)^{60}\,(1{,}02)^{16} \\
&= \text{R } 19\ 950{,}62
\end{aligned}
$$

5. R 75 000 is belê in 'n rekening wat rente bied teen 11% p.j. maandeliks saamgestel vir die eerste 24 maande. Dan verander die rentekoers na 7,7% p.j. halfjaarliks saamgestel. As R 9000 vanuit die rekening onttrek word na een jaar, en 'n addisionele deposito van R 3000 drie jaar na die oorspronklike belegging gemaak word, hoeveel geld sal in die rekening wees teen die einde van 6 jaar?

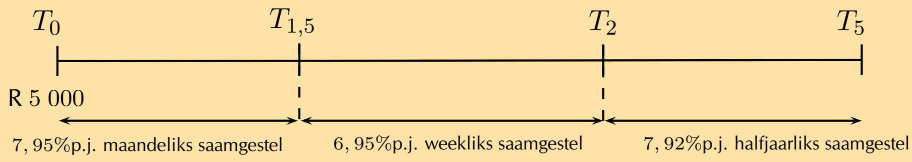
Oplossing:



$$
\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 75\ 000\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{2\times 12}\left(1+\frac{0{,}077}{2}\right)^{4\times 2} \\
&- 9000\left(1+\frac{0{,}11}{12}\right)^{1\times 12}\left(1+\frac{0{,}077}{2}\right)^{4\times 2} + 3000\left(1+\frac{0{,}077}{2}\right)^{3\times 2} \\
&= \text{R } 1\ 149\ 283{,}50
\end{aligned}
$$

6. Christopher wil 'n rekenaar koop, maar op die oomblik het hy nie genoeg geld nie. 'n Vriend het vir hom gesê dat die rekenaar oor 5 jaar R 9150 sal kos. Christopher besluit om vandag geld te begin spaar by Durban United Bank. Hy deponeer R 5000 in 'n spaarrekening met 'n rentekoers van 7,95% p.j. maandeliks saamgestel. Dan, na 18 maande, verander die bank die rentekoers na 6,95% p.j. weekliks samgestel. Na nog 6 maande verander die rentekoers weer na 7,92% p.j. wat twee keer per jaar saamgestel word. Hoeveel geld sal Christopher in die rekening hê na 5 jaar, en sal hy dan genoeg geld hê om die rekenaar te koop?

Oplossing:



$$
\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 5000\left(1+\frac{0{,}0795}{12}\right)^{1{,}5\times 12}\left(1+\frac{0{,}0695}{52}\right)^{0{,}5\times 52}\left(1+\frac{0{,}0792}{2}\right)^{3\times 2} \\
&= 5000\left(1+\frac{0{,}0795}{12}\right)^{18}\left(1+\frac{0{,}0695}{52}\right)^{26}\left(1+\frac{0{,}0792}{2}\right)^{6} \\
&= \text{R } 7359{,}83
\end{aligned}
$$

9.4 Nominale en effektiewe rentekoerse

Oefening 9 – 6: Nominale en effektiewe rentekoerse

1. Bepaal die effektiewe jaarlikse rentekoers as hierdie die nominale rentekoers is:
   a) 12% p.j. kwartaalliks saamgestel.
   b) $14{,}5\%$ p.j. weekliks saamgestel.
   c) 20% p.j. daagliks saamgestel.

Oplossing:

a)

$$
\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\
i &= \left(1+\frac{0{,}12}{4}\right)^4 - 1 \\
&= (1{,}03)^4 - 1 \\
&= 0{,}121255\ldots \\
\therefore i &= 12{,}6\%
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\
i &= \left(1+\frac{0{,}145}{12}\right)^{12} - 1 \\
&= 0{,}155035\ldots \\
\therefore i &= 15{,}5\%
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \\
i &= \left(1+\frac{0{,}2}{365}\right)^{365} - 1 \\
&= 0{,}221335\ldots \\
\therefore i &= 22{,}1\%
\end{aligned}$$

2. Beskou die volgende:

- $16{,}8\%$ p.j. jaarliks saamgestel.
- $16{,}4\%$ p.j. maandeliks saamgestel.
- $16{,}5\%$ p.j. kwartaalliks saamgestel.

a) Bepaal die effektiewe jaarlikse rentekoers van elk van die nominale koerse wat hierbo gelys word.

b) Watter rentekoers is die beste vir 'n belegging?

c) Watter rentekoers is die beste vir 'n lening?

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \\
i &= \left(1+\frac{0{,}164}{12}\right)^{12} - 1 \\
&= 0{,}176906\ldots \\
\therefore i &= 17{,}7\%
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \\
i &= \left(1+\frac{0{,}165}{4}\right)^{4} - 1 \\
&= 0{,}175493\ldots \\
\therefore i &= 17{,}5\%
\end{aligned}$$

b) $17{,}7\%$

c) $16{,}8\%$

3. Bereken die effektiewe jaarlikse rentekoers wat gelyk is aan 'n nominale rentekoers van $8{,}75\%$ p.j. maandeliks saamgestel.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \\
i &= \left(1+\frac{0{,}0875}{12}\right)^{12} - 1 \\
&= 0{,}091095\ldots \\
\therefore i &= 9{,}1\%
\end{aligned}$$

4. Cebela ontvang 'n nominale rentekoers van $9{,}15\%$ per jaar, wat elke vier maande op haar belegging van R 85 000 saamgestel word. Bereken die effektiewe koers per jaar.

Oplossing:

$$\begin{aligned} 1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\ i &= \left(1+\frac{0{,}0915}{3}\right)^3 - 1 \\ &= 0{,}094319\ldots \\ \therefore i &= 9{,}4\% \end{aligned}$$

5. Bepaal watter van die volgende 'n beter ooreenkoms sal wees om 'n studentelening terug te betaal:

   a) $9{,}1\%$ p.j. kwartaalliks saamgestel.
   b) 9% p.j. maandeliks saamgestel.
   c) $9{,}3\%$ p.j. halfjaarliks saamgestel.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned} 1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\ i &= \left(1+\frac{0{,}091}{4}\right)^4 - 1 \\ &= 0{,}094152\ldots \\ \therefore i &= 9{,}42\% \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\ i &= \left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{12} - 1 \\ &= 0{,}093806\ldots \\ \therefore i &= 9{,}38\% \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\ i &= \left(1+\frac{0{,}093}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 0{,}095162\ldots \\ \therefore i &= 9{,}52\% \end{aligned}$$

6. Miranda belê R 8000 vir 5 jaar vir haar seun se studiefonds. Bepaal hoeveel geld sy aan die einde van die periode sal hê, en die effektiewe jaarlikse rentekoers as die nominale rentekoers van 6% as volg saamgestel word:

	Berekening	Opgeloopte bedrag	Effektiewe jaarlikse rentekoers
jaarliks			
halfjaarliks			
kwartaalliks			
maandeliks			

Oplossing:

	Berekening	Opgeloopte bedrag	Effektiewe jaarlikse rentekoers
jaarliks	$8000\left(1+\frac{0{,}06}{1}\right)^{5}$	R 10 705,80	6%
halfjaarliks	$8000\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{10}$	R 10 751,33	$\left(1+\frac{0{,}06}{2}\right)^{2}-1=6{,}09\%$
kwartaalliks	$8000\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{20}$	R 10 774,84	$\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4}-1=6{,}14\%$
maandeliks	$8000\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{60}$	R 10 790,80	$\left(1+\frac{0{,}06}{12}\right)^{12}-1=6{,}17\%$

9.5 Opsomming

Oefening 9 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Thabang koop 'n Mercedes wat R 385 000 in 2007 werd is. Wat sal die waarde van die Mercedes teen die einde van 2013 wees as:

   a) die motor teen 6% p.j. reglynige waardevermindering depresiëer.

   b) die motor teen 6% p.j. verminderde-saldo waardevermindering depresiëer.

   Oplossing:

   a)

$$\begin{aligned} A &= P(1-in) \\ &= 385\ 000(1-0{,}06\times 6) \\ &= 385\ 000(0{,}64) \\ \therefore i &= \text{R } 246\ 400 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} A &= P(1-in) \\ &= 385\ 000(1-0{,}06)^{6} \\ &= 385\ 000(0{,}94)^{6} \\ \therefore i &= \text{R } 265\ 599{,}87 \end{aligned}$$

2. Greg gaan 'n 5-jaar huurkoop ooreenkoms aan om 'n rekenaar vir R 8900 te koop. Die rentekoers word genoteer as 11% per jaar gebaseer op enkelvoudige rente. Bereken die maandelikse betaling vir hierdie kontrak.

Oplossing:

$$\begin{aligned}
A &= P(1+in)\\
&= 8900(1+0{,}11\times 5)\\
&= 8900(1{,}55)\\
&= \text{R } 13\ 795\\
\therefore \text{ maandelikse terugbetaling} &= \frac{13\ 795}{5\times 12}\\
&= \text{R } 229{,}92
\end{aligned}$$

3. 'n Rekenaar word aangekoop teen R 16 000. Dit depresiëer teen 15% per jaar.

   a) Bepaal die boekwaarde van die rekenaar na 3 jaar as waardevermindering met die reglynige metode bereken word.

   b) Vind die koers volgens die verminderde-saldo metode wat na 3 jaar dieselfde boekwaarde sou oplewer as wat bereken is in die vorige vraag.

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
A &= P(1-in)\\
&= 16\ 000(1-0{,}15\times 3)\\
&= 16\ 000(0{,}55)\\
&= \text{R } 8800
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
A &= P(1-i)^n\\
8800 &= 16\ 000(1-i)^3\\
\frac{8800}{16\ 000} &= (1-i)^3\\
\sqrt[3]{\frac{8800}{16\ 000}} &= 1-i\\
\sqrt[3]{\frac{8800}{16\ 000}}-1 &= -i\\
\therefore i &= 0{,}180678\ldots\\
\therefore i &= 18{,}1\%
\end{aligned}$$

4. Maggie belê R 12 500 vir 5 jaar teen 12% per jaar, maandeliks saamgestel vir die eerste 2 jaar, en dan 14% per jaar, halfjaarliks saamgestel vir die volgende 3 jaar. Hoeveel sal Maggie na 5 jaar ontvang, in totaal?

Oplossing:

$$
\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 125\ 000\left(1+\frac{0{,}12}{12}\right)^{2\times 12}\left(1+\frac{0{,}14}{2}\right)^{3\times 2} \\
&= 125\ 000\,(1{,}01)^{24}\,(1{,}07)^{6} \\
\therefore A &= \text{R } 238\ 191{,}17
\end{aligned}
$$

5. Tintin belê R 120 000. Hy ontvang 'n nominale rentekoers van 7,2% per jaar, maandeliks saamgestel.

   a) Bereken die effektiewe koers per jaar (korrek tot twee desimale plekke).

   b) Gebruik die effektiewe koers om die waarde van Tintin se belegging te bereken as hy die geld vir 3 jaar belê het.

   c) Veronderstel dat Tintin sy geld vir 'n totale periode van 4 jaar belê, maar na 18 maande 'n onttrekking van R 20 000 maak. Hoeveel sal hy ontvang aan die einde van die 4 jaar?

   Oplossing:

   a)

$$
\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \\
i &= \left(1+\frac{0{,}072}{12}\right)^{12} - 1 \\
&= 0{,}074424\ldots \\
\therefore i &= 7{,}44\%
\end{aligned}
$$

   b)

$$
\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 120\ 000\,(1+0{,}0744)^{3} \\
&= 120\ 000\,(1{,}0744)^{3} \\
\therefore A &= \text{R } 148\ 826{,}15
\end{aligned}
$$

   c)

$$
\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 120\ 000\,(1+0{,}0744)^{4} - 20\ 000\,(1+0{,}0744)^{2{,}5} \\
&= 120\ 000\,(1{,}0744)^{4} - 20\ 000\,(1{,}0744)^{2{,}5} \\
\therefore A &= \text{R } 135\ 968{,}69
\end{aligned}
$$

6. Ntombi maak rekeninge by 'n aantal klerewinkels oop en bestee kwistig. Sy maak groot skuld en kan nie haar rekeninge afbetaal nie. Sy skuld R 5000 aan Fashion World en die winkel stem in dat sy die rekening teen 'n nominale rentekoers van 24%, maandeliks saamgestel, kan afbetaal.

   a) Hoeveel geld sal sy aan Fahion World verskuldig wees na twee jaar?

   b) Wat is die effektiewe rentekoers wat Fashion World haar laat betaal?

   Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}A &= P(1+i)^n \\ &= 5000\left(1+\frac{0{,}24}{12}\right)^{2\times 12} \\ &= 5000\,(1{,}02)^{24} \\ \therefore A &= \text{R } 8042{,}19\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \\ i &= \left(1+\frac{0{,}24}{12}\right)^{12} - 1 \\ &= 0{,}268241\ldots \\ \therefore i &= 26{,}82\%\end{aligned}$$

7. John belê R 30 000 in die bank vir 'n periode van 18 maande. Bereken hoeveel geld hy teen die einde van die periode sal hê en bereken die effektiewe jaarlikse rentekoers as die nominale rente van 8% as volg saamgestel word:

	Berekening	Opgeloopte bedrag	Effektiewe jaarlikse rentekoers
jaarliks			
halfjaarliks			
kwartaalliks			
maandeliks			
daagliks			

Oplossing:

	Berekening	Opgeloopte bedrag	Effektiewe jaarlikse rentekoers
jaarliks	$30\ 000\,(1+0{,}08)^{1}$	R 33 671,07	
halfjaarliks	$30\ 000\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{1{,}5\times 2}$	R 33 745,92	$\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^{2}-1=$ 8,16%
kwartaalliks	$30\ 000\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{1{,}5\times 4}$	R 33 784,87	$\left(1+\frac{0{,}08}{4}\right)^{4}-1=$ 8,24%
maandeliks	$30\ 000\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{1{,}5\times 12}$	R 33 811,44	$\left(1+\frac{0{,}08}{12}\right)^{12}-1=$ 8,30%
daagliks	$30\ 000\left(1+\frac{0{,}08}{365}\right)^{1{,}5\times 365}$	R 33 828,17	$\left(1+\frac{0{,}08}{365}\right)^{365}-1=$ 8,33%

8. Skakel 'n effektiewe jaarlikse rentekoers van 11,6% p.j. oor na 'n nominale rentekoers wat as volg bereken word:

   a) halfjaarliks

b) kwartaalliks

c) maandeliks

Oplossing:

a)

$$\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\
1+0{,}116 &= \left(1+\frac{i^{(2)}}{2}\right)^2 \\
\sqrt[2]{1{,}116}-1 &= \frac{i^{(2)}}{2} \\
2\left(\sqrt[2]{1{,}116}-1\right) &= i^{(2)} \\
\therefore i^{(2)} &= 11{,}3\%
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\
1+0{,}116 &= \left(1+\frac{i^{(4)}}{4}\right)^4 \\
\sqrt[4]{1{,}116}-1 &= \frac{i^{(4)}}{4} \\
4\left(\sqrt[4]{1{,}116}-1\right) &= i^{(4)} \\
\therefore i^{(4)} &= 11{,}1\%
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
1+i &= \left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \\
1+0{,}116 &= \left(1+\frac{i^{(12)}}{12}\right)^{12} \\
\sqrt[12]{1{,}116}-1 &= \frac{i^{(12)}}{12} \\
12\left(\sqrt[12]{1{,}116}-1\right) &= i^{(12)} \\
\therefore i^{(12)} &= 11{,}0\%
\end{aligned}$$

9. Joseph moet sy erf in die Weskus verkoop en hy moet R 300 000 inkry uit die verkoop van die grond. As die eiendomsagent 7% kommissie neem op die verkoopsprys, hoeveel moet die koper vir die erf betaal?

Oplossing:

$$\text{Laat die verkoopsprys} = k$$

$$\begin{aligned}
300\ 000 + \frac{7}{100} \times k &= k \\
300\ 000 &= k - 0{,}07k \\
300\ 000 &= 0{,}93k \\
\frac{300\ 000}{0{,}93} &= k \\
\therefore k &= \text{R } 322\ 580{,}65
\end{aligned}$$

10. Mev. Brown het afgetree en 'n enkelbedrag van R 200 000 ontvang. Sy het die geld in 'n vaste spaarrekening gedeponeer vir 6 jaar. Aan die einde van die 6 jaar was die waarde van die belegging R 265 000. As die rente op haar belegging maandeliks saamgestel is, bepaal:

    a) die nominale rentekoers per jaar

    b) die effektiewe jaarlikse rentekoers

    Oplossing:

    a)

    $$\text{Laat die verkoopsprys} = k$$

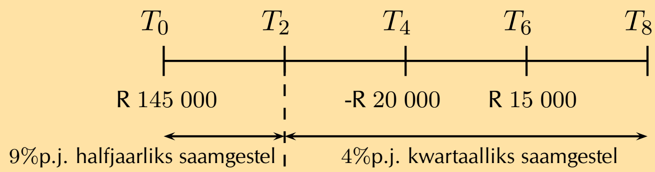
    $$\begin{aligned}
    265\ 000 &= 200\ 000\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{6\times 12} \\
    \frac{265\ 000}{200\ 000} &= \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{72} \\
    \sqrt[72]{\frac{265\ 000}{200\ 000}} - 1 &= \frac{i}{12} \\
    \therefore i &= 12\left(\sqrt[72]{\frac{265\ 000}{200\ 000}} - 1\right) \\
    &= 0{,}046993\ldots \\
    \therefore i &= 4{,}7\%
    \end{aligned}$$

    b)

    $$\begin{aligned}
    1 + i &= \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m} \\
    1 + i &= \left(1 + \frac{0{,}047}{12}\right)^{12} \\
    i &= \left(1 + \frac{0{,}047}{12}\right)^{12} - 1 \\
    \therefore i &= 4{,}8\%
    \end{aligned}$$

11. R 145 000 is belê in 'n rekening wat rente bied teen 9% p.j. halfjaarliks saamgestel vir die eerste 2 jaar. Dan verander die rentekoers na 4% p.j. kwartaalliks saamgestel. Vier jaar na die oorspronklike belegging word R 20 000 onttrek. 6 jaar na die oorspronklike belegging word 'n deposito van R 15 000 gemaak. Bepaal die balans van die rekening aan die einde van 8 jaar.

    Oplossing:



$$
\begin{aligned}
A &= P(1+i)^n \\
&= 145\ 000\left(1+\frac{0{,}09}{2}\right)^{2\times 2}\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{6\times 4} \\
&- 20\ 000\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{4\times 4} + 15\ 000\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{2\times 4} \\
&= 145\ 000\,(1{,}045)^4\,(1{,}01)^{24} - 20\ 000\,(1{,}01)^{16} + 15\ 000\,(1{,}01)^8 \\
\therefore A &= \text{R } 212\ 347{,}69
\end{aligned}
$$

HOOFSTUK 10

Waarskynlikheid

- Bespreek terminologie. Hierdie hoorstuk bevat baie woorde wat verwarrend vir leerders kan wees.
- Hierdie hoofstuk bied goeie geleentheid vir eksperimente en aktiwiteite in die klaskamer.
- Vereniging- en snydingsimbole is ingesluit, maar "en" en "of", is die voorkeur notasie.
- Die komplementsimbool is ingesluit, maar "nie" is die voorkeurnotasie.
- Dit is baie belangrik om die gebeurtenisse - ewekansige dobbelstene, volle stel kaarte ens. - te definieer.

10.1 Hersiening

Oefening 10 – 1: Hersiening

1. 'n Sak bevat r rooi balle, b blou balle en y geel balle. Wat is die waarskynlikheid dat 'n bal, wat ewekansig uit die sak gehaal word, geel is?

   Oplossing:

   Om die waarskynlikheid dat 'n geel bal getrek word te bereken moet ons die aantal uitkomste wat daartoe lei dat 'n geel bal getrek word deel deur die totale aantal uitkomste. Die aantal geel balle is y en die totale aantal balle is $r+b+y$. Dus is die waarskynlikheid dat 'n geel bal getrek word

   $$P(\text{geel}) = \frac{y}{r+b+y}$$

2. 'n Pakkie bevat geel en pienk lekkers. Die waarskynlikheid dat 'n pienk lekker uitgehaal word is $\frac{7}{12}$. Wat is die waarskynlikheid dat 'n geel lekker uitgehaal word?

   Oplossing:

   Aangesien daar net geel en pienk lekkers in die pakkie is, is die gebeurtenis om 'n geel lekker te kry die komplement van die gebeurtenis om 'n pienk lekker te kry. Dus,

   $$\begin{aligned} P(\text{geel}) &= 1 - P(\text{pienk}) \\ &= 1 - \frac{7}{12} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

3. Jy skiet 'n muntstuk 4 keer op. Wat is die waarskynlikheid dat 2 uitkomste kruis sal wees en 2 uitkomste munt sal wees? Skryf die steekproefruimte en die gebeurtenisversameling neer om die waarskynlikheid van hierdie gebeurtenis te bepaal.

Oplossing:

Die steekproefruimte is die saamestelling van al die maniere waarop 'n muntstuk kan land wanneer dit 4 keer geloot word. Ons gebruik H om kruis voor te stel en T om munt voor te stel. Die steekproefruimte is

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} (K;K;K;K) & (K;K;K;S) & (K;K;S;K) & (K;K;S;S) \\ (K;S;K;K) & (K;S;K;S) & (K;S;S;K) & (K;S;S;S) \\ (S;K;K;K) & (S;K;K;S) & (S;K;S;K) & (S;K;S;S) \\ (S;S;K;K) & (S;S;K;S) & (S;S;S;K) & (S;S;S;S) \end{array} \right\}$$

Ons wil die waarskynlikheid van die gebeurtenis om 2 keer kruis en 2 munt te kry bereken. Vanaf die steekproefruimte vind ons al die uitkomste waarvoor dit die geval is:

$$\{(K;K;S;S);(K;S;K;S);(K;S;S;K);(S;K;K;S);(S;K;S;K);(S;S;K;K)\}$$

Aangesien daar 6 uitkomste in die gebeurtenis E is en 16 in die steekproefruimte S is, is die waarskynlikheid van 'n gebeurtenis

$$P(E) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

4. In 'n klas van 37 kinders, is daar 15 kinders wat skool toe stap, 20 wat troeteldiere by die huis het en 12 wat 'n troeteldier by die huis het en ook skool toe stap. Hoeveel van die kinders wat skool toe stap het nie 'n troeteldier by die huis nie?

Oplossing:

Laat E die gebeurtenis wees dat 'n kind skool toe stap en laat F die gebeurtenis wees dat 'n kind 'n troeteldier by die huis het. Dan kry ons vanaf die probleemstelling dat

$$\begin{aligned} n(E) &= 15 \\ n(F) &= 20 \\ n(E \text{ en } F) &= 12 \end{aligned}$$

Ons word gevra om $n(E \text{ en } (\text{nie } F))$ te bereken.

$$\begin{aligned} n(E \text{ en } (\text{nie } F)) &= n(E) - n(E \text{ en } F) \\ &= 15 - 12 \\ &= 3 \end{aligned}$$

5. Jy rol twee 6-kantige dobbelstene en stel belang in die volgende twee gebeurtenisse:

   - A: die som van die dobbelstene is gelyk aan 8
   - B: ten minste een van die dobbelstene vertoon 'n 1

   Toon aan dat hierdie gebeurtenisse onderling uitsluitend is.

Oplossing:

Die gebeurtenis A het die volgende elemente:

$$\{(2;6);(3;5);(4;4);(5;3);(6;2)\}$$

Siende dat A geen uitkomste bevat waar die dobbelsteen 'n 1 wys nie en B vereis dat 'n dobbelsteen ten minste een 1 wys, het die twee gebeurtenisse geen gemene uitkomste nie: $(A \text{ en } B) = \emptyset$. Dus is die twee gebeurtenisse, volgens die definisie, onderling uitsluitend.

6. Vra vir jou vriendin om te dink aan 'n getal van 1 tot 100. Jy vra dan vir haar die volgende vrae:

   - Is die getal ewe?
   - Is die getal deelbaar deur 7?

   Hoeveel moontlike getalle is kleiner as 80 as sy "ja" antwoord opbeide hierdie vrae?

   Oplossing:

   Die eerste vraag vereis dat die getal deur 2 deelbaar moet wees. Die tweede vraag vereis dat die getal deur 7 deelbaar moet wees. Dus moet ons die veelvoude van 14 tel wat kleiner is as 80. Hulle is $\{14; 28; 42; 56; 70\}$, wat 'n totaal van 5 getalle gee.

7. In 'n groep van 42 leerlinge het almal behalwe 3, 'n pakkie skyfies of 'n Fanta of altwee. As 23 'n pakkie skyfies het en 7 van hierdie 23 ook 'n Fanta het, wat is die waarskynlikheid dat 'n leerling wat ewekansig gekies word die volgende het:

   a) skyfies sowel as 'n Fanta
   b) net Fanta

   Oplossing:

   a) $\frac{7}{42} = \frac{1}{6}$
   b) Siende dat $42 - 3 = 39$ ten minste 'n pakkie skyfies en 'n Fanta gehad het en 23 'n pakkie skyfies gehad het, het $39 - 23 = 16$ dus net 'n Fanta gehad.

   $$\frac{16}{42} = \frac{8}{21}$$

8. Tamara het 18 sokkies in 'n laai. Agt van hierdie is oranje en twee is pienk. 'n Sokkie word ewekansig uit die laai uitgehaal. Bereken die waarskynlikheid dat die sokkie beskryf kan word as:

   a) oranje
   b) nie oranje nie
   c) pienk
   d) nie pienk nie
   e) oranje of pienk
   f) nie oranje of pienk nie

   Oplossing:

   a) $\frac{8}{18} = \frac{4}{9}$
   b) $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$
   c) $\frac{2}{18} = \frac{1}{9}$
   d) $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
   e) $\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$
   f) $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$

9. 'n Boks het gekleurde blokkies. Die aantal blokkies van elke kleur word gegee in die volgende tabel:

Kleur	Pers	Oranje	Wit	Pienk
Aantal blokkies	24	32	41	19

’n Blokkie word willekeurig gekies. Wat is die waarskynlikheid dat die blokkie die volgende kleur sal hê?

a) pers
b) pers of wit
c) pienk en oranje
d) nie oranje nie?

Oplossing:

a) Voordat ons die vrae beantwoord gaan ons eers die totale hoeveelheid blokkies uitwerk. Dit sal vir ons die grootte van die steekproefruimte gee as

$$n(S) = 24 + 32 + 41 + 19 = 116$$

Die waarskynlikheid dat die blokkie pers is:

$$\begin{aligned} P(\text{pers}) &= \frac{n(E)}{n(S)} \\ &= \frac{24}{116} \\ &= 0{,}21 \end{aligned}$$

b) Die waarskynlikheid dat die blokkie pers of wit is:

$$\begin{aligned} P(\text{pers of wit}) &= P(\text{pers}) + P(\text{wit}) \\ &= \frac{24}{116} + \frac{41}{116} \\ &= 0{,}56 \end{aligned}$$

c) Aangesien een blokkie nie twee kleure kan wees nie word die waarskynlikheid van die gebeurtenis gegee as 0.

d) Ons werk eers die waarskynlikheid uit, dat ’n blokkie oranje is uit:

$$\begin{aligned} P(\text{oranje}) &= \frac{32}{116} \\ &= 0{,}28 \end{aligned}$$

Die waarskynlikheid dat die blokkie nie oranje is nie:

$$\begin{aligned} P(\text{nie oranje}) &= 1 - 0{,}28 \\ &= 0{,}72 \end{aligned}$$

10. Die oppervlak van ’n sokkerbal is saamgestel uit 32 vlakke. 12 vlakke is reëlmatige vyfhoeke, waarvan elkeen se oppervlakte ongeveer 37 cm^2 is. Die ander 20 vlakke is reëlmatige seshoeke, elkeen met ’n oppervlakte van ongeveer 56 cm^2.

Jy rol die sokkerbal. Wat is die waarskynlikheid dat dit stop sodat een van die vyfhoekige kante die grond raak?

Oplossing:

Siende dat ’n sokkerbal rond is, is die waarskynlikheid dat dit op ’n vyfhoekige kant sal stop eweredig aan die oppervlakte van die kant. Daar is 12 vyfhoeke, elk met ’n oppervlakte van 37 cm^2, wat ’n totale oppervlakte van $12 \times 37 = 444$ cm^2 het. Daar is 20 seshoeke, elk met ’n oppervlakte van 56 cm^2, wat ’n totale oppervlakte van $20 \times 56 = 1120$ cm^2 het. Dus is die waarskynlikheid dat dit op 'n vyfhoek sal stop:

$$\begin{aligned}\frac{\text{oppervlakte van vyfhoeke}}{\text{totale oppervlakte}} &= \frac{444}{444+1120} \\ &= 0{,}28\end{aligned}$$

tot 2 desimale.

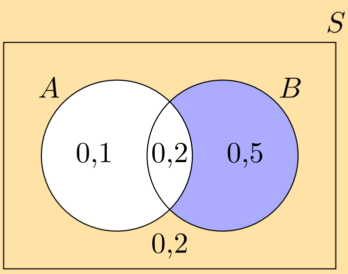
Venndiagram

Oefening 10 – 2: Venndiagram hersiening

1. Gegewe die volgende inligting:
    - $P(A) = 0{,}3$
    - $P(B \text{ en } A) = 0{,}2$
    - $P(B) = 0{,}7$

    Skets eers 'n Venndiagram wat die inligting voorstel. Bereken dan die waarde van $P(B \text{ en } (\text{nie } A))$.

    Oplossing:

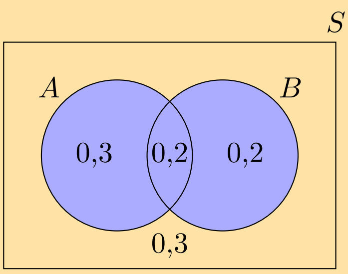
    

    $P(B \text{ en } (\text{nie } A)) = 0{,}5$ is met blou gemerk in die Venn-diagram.

2. Jy word die volgende inligting gegee:
    - $P(A) = 0{,}5$
    - $P(A \text{ en } B) = 0{,}2$
    - $P(\text{nie } B) = 0{,}6$

    Skets 'n Venndiagram wat hierdie inligting voorstel en bepaal $P(A \text{ of } B)$.

    Oplossing:

$P(A \text{ of } B) = 0{,}7$ is met blou gemerk in die Venn-diagram.

3. 'n Studie is onderneem om te bepaal hoeveel mense in Port Elizabeth besit of 'n Volkswagen of 'n Toyota. 3% besit beide, 25% besit 'n Toyota en 60% besit 'n Volkswagen. Watter persentasie van mense besit nie een van die twee nie?

   Oplossing:

   Laat T die gebeurtenis dat 'n persoon 'n Toyota besit, verteenwoordig en V die gebeurtenis dat 'n persoon 'n Volkswagen besit, verteenwoordig. Volgende die informasie gaande die probleem:

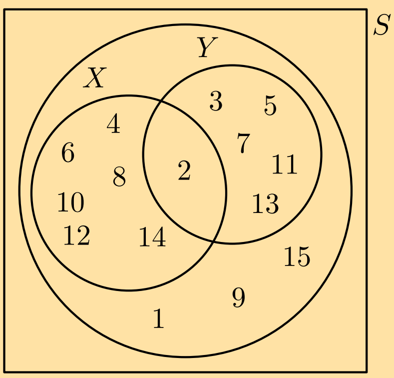
$$\begin{aligned} P(T \text{ en } V) &= 0{,}03 \\ P(T) &= 0{,}25 \\ P(V) &= 0{,}6 \end{aligned}$$

   Ons is gevra om $P(\text{nie } (T \text{ of } V))$ te bereken.

$$\begin{aligned} & P(\text{nie } (T \text{ of } V)) & \\ &= 1 - P(T \text{ of } V) & \text{(komplementreël)} \\ &= 1 - (P(T) + P(V) - P(T \text{ en } V)) & \text{(somreël)} \\ &= 1 - (0{,}25 + 0{,}6 - 0{,}03) & \\ &= 0{,}18 & \end{aligned}$$

4. Laat S die versameling telgetalle van 1 tot 15 voorstel, X die versameling ewe getalle van 1 tot 15 en Y die versameling van priemgetalle van 1 tot 15. Skets 'n Venndiagram wat S, X en Y uitbeeld.

   Oplossing:



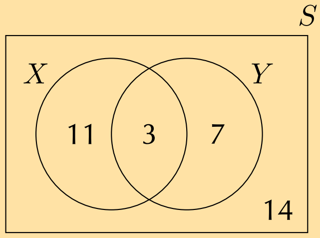
10.2 Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse

Oefening 10 – 3: Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse

1. Gebruik die volgende Venndiagram om te bepaal of toestande X en Y

   a) onderling uitsluitende of nie-wedersyds eksklusief is;

b) afhanklik of onafhanklik is



Oplossing:

a) Die toestande is onderling uitsluitend as $(X \text{ en } Y) = \emptyset$. Vanaf die Venn-diagram sien ons dat $(X \text{ en } Y)$ 3 elemente bevat. Dus is X en Y nie-wedersyds eksklusief nie.

b) Die toestande is onafhanklik as $P(X \text{ en } Y) = P(X) \times P(Y)$. In hierdie geval,

$$P(X \text{ en } Y) = \frac{3}{35}$$
$$P(X) = \frac{14}{35}$$
$$P(Y) = \frac{10}{35}$$

Dus $P(X) \times P(Y) = \frac{4}{35} \neq P(X \text{ en } Y)$. Daarom is X en Y afhanklik.

2. Van die 30 leerders in 'n klas het 17 swart hare, 11 het bruin hare en 2 het rooi hare. 'n Leerder word gekies uit die klas.

   a) Wat is die waarskylikheid dat die leerder swart hare het?
   b) Wat is die waarskylikheid dat die leerder bruin hare het?
   c) Is die twee toestande onderling uitsluitend?
   d) Is die twee toestande onafhanklik?

Oplossing:

a) $\frac{17}{30}$
b) $\frac{11}{30}$
c) Ja, aangesien elke leerder net een haarkleur het, dus $P(\text{swart en bruin}) = 0$.
d) Nee, aangesien $P(\text{swart en bruin}) = 0 \neq P(\text{swart}) \times P(\text{bruin})$.

3. $P(M) = 0{,}45$; $P(N) = 0{,}3$ en $P(M \text{ of } N) = 0{,}615$. Is die toestande in M en N onderling uitsluitend, onafhanklik of nie-onderling uitsluitend of nie-onafhanklik?

Oplossing:

Vanaf die somreël,

$$\begin{aligned} P(M \text{ en } N) &= P(M) + P(N) - P(M \text{ of } N) \\ &= 0{,}45 + 0{,}3 - 0{,}615 \\ &= 0{,}135 \end{aligned}$$

$P(M \text{ en } N) \neq 0$, dus is die gebeurtenisse nie onderling uitsluitend nie.

Die gebeurtenisse is onafhanklik, siende dat

$$P(M) \times P(N) = 0{,}135 = P(M \text{ en } N)$$

4. (Vir verryking)

   Bewys dat as toestand A en toestand B onderling uitsluitend is met $P(A) \neq 0$ en $P(B) \neq 0$, dan is A en B is altyd afhanklik.

   Oplossing:

   Bewys deur teenstelling.

   Neem aan dat A en B onafhanklike gebeurtenisse is. Vanaf die definisie vir onafhanklikheid het ons $P(A \text{ en } B) = P(A) \times P(B)$. Siende dat A en B wedersyds onafhanklik is, weet ons dat $P(A \text{ en } B) = 0$. Dus $P(A) \times P(B) = 0$.

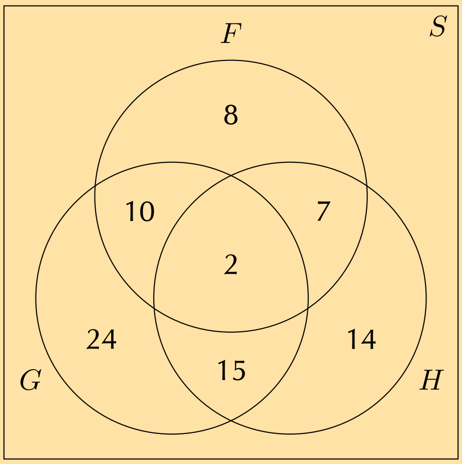
   Vir die produk van twee getalle om nul te kan wees, moet een van die twee getalle nul wees, maar ons is in die probleemstelling gesê dat $P(A) \neq 0$ en $P(B) \neq 0$. Dus het ons 'n teenstelling en moet ons aanvanklike aanname, dat A en B onafhanklike gebeurtenisse is, vals wees.

   Gevolgtrekking: A en B is afhanklik.

10.3 Meer Venndiagramme

Oefening 10 – 4: Venndiagramme

1. Gebruik die Venndiagram hieronder en beantwoord die volgende vrae. Ook gegee: $n(S) = 120$.



   a) Bereken $P(F)$.

   b) Bereken $P(G \text{ of } H)$.

   c) Bereken $P(F \text{ en } G)$.

   d) Is F en G afhanklik of onafhanklik?

   Oplossing:

   a) $\frac{27}{120} = \frac{9}{40}$

   b) $\frac{72}{120} = \frac{3}{5}$

   c) $\frac{12}{120} = \frac{1}{10}$

d)

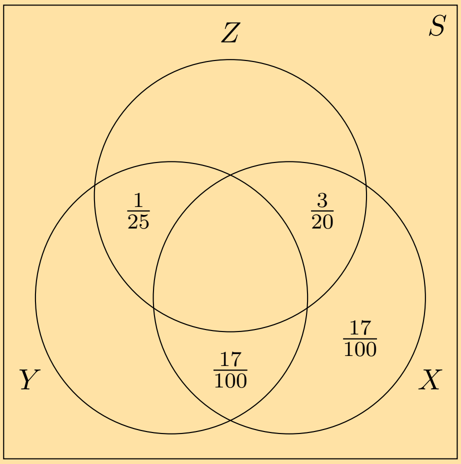
$$\begin{aligned} P(F) \times P(G) &= \frac{9}{40} \times \frac{51}{120} \\ &= \frac{153}{1600} \end{aligned}$$

en

$$P(F \text{ en } G) = \frac{1}{10}$$

Dus is $P(F \text{ en } G) \neq P(F) \times P(G)$ en is die twee gebeurtenisse afhanklik.

2. Die onderstaande Venndiagram dui die waarskynlikhede van 3 gevalle aan. Voltooi die Venndiagram deur gebruik te maak van die addisionele inligting wat gegee is.



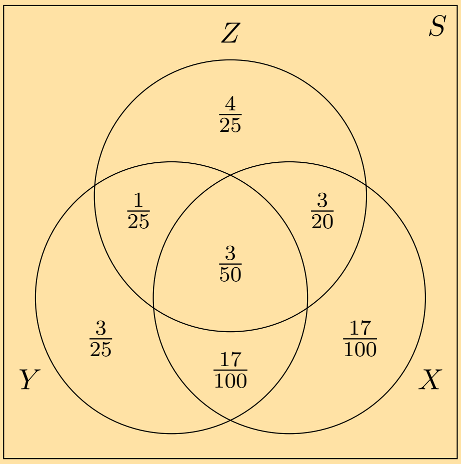
- $P(Z \text{ en (nie } Y)) = \frac{31}{100}$
- $P(Y \text{ en } X) = \frac{23}{100}$
- $P(Y) = \frac{39}{100}$

Na die voltooiing van die Venndiagram, bereken die volgende:

$$P\left(Z \text{ en nie } (X \text{ of } Y)\right)$$

Oplossing:

Die volledige Venn-diagram is hieronder.



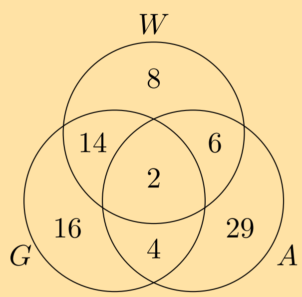
(Z en nie (X of Y)) is die boonste deel van Z, wat die hele X en Y uitsluit. Dus P (Z en nie (X of Y)) $= \frac{4}{25}$.

3. Daar is 79 Graad 10 leerders by die skool. Al die leerders neem een of ander kombinasie van Wiskunde, Aardrykskunde en Geskiedenis. Die aantal leerders wat Aardrykskunde neem is 41; 36 wat Geskiedenis neem, en 30 neem Wiskunde. Die aantal leerders wat Wiskunde en Geskiedenis neem is 16; die aantal leerders wat Aardrykskunde en Geskiedenis neem is 6, en daar is 8 leerders wat slegs Wiskunde neem en 16 wat slegs Geskiedenis neem.

   a) Teken 'n Venndiagram om al hierdie inligting te illustreer.
   b) Hoeveel leerders neem Wiskunde en Aardrykskunde, maar nie Geskiedenis nie?
   c) Hoeveel leerders neem slegs Aardrykskunde?
   d) Hoeveel leerders neem al drie vakke?

Oplossing:

a)



b) Elke student moet presies een van die volgende doen:

- neem slegs Aardrykskunde
- neem slegs Wiskunde en/of Geskiedenis

Daar is $30 + 36 - 16 = 50$ leerders wat Wiskunde en/of Geskiedenis neem, dus met daar $79 - 50 = 29$ leerders wees wat slegs Aardrykskunde neem.

Elke leerder moet presies een van die volgende doen:

- neem slegs Aardrykskunde (29 leerders);
- neem slegs Wiskunde (8 leerders);
- neem Geskiedenis (36 leerders);
- neem Aardrykskunde en Wiskunde, maar nie Geskiedenis nie.

Gegee die lys met die getalle leerders vir elk van die eerste drie items hierbo, is die finale antwoord dat $79 - 29 - 8 - 36 = 6$ leerders Aardrykskunde en Wiskunde neem, maar nie Geskiedenis nie.

c) Alreeds bereken: 29 leerders.

d) Elke leerder moet presies een van die volgende vakke/vakkombinasies neem:

- Aardrykskunde
- slegs Wiskunde
- slegs Geskiedenis
- Wiskunde en Geskiedenis, maar nie Aardrykskunde nie.

Ons gebruik dieselfde metode as van tevore. Die aantal leerders in die laaste groep is $79 - 41 - 8 - 16 = 14$. Maar, 16 leerders neem Wiskunde en Geskiedenis, dus moet daar $16 - 14 = 2$ leerders wees wat al drie neem.

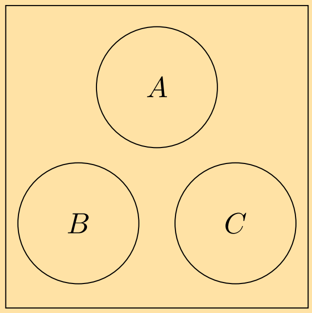
4. Teken 'n Venndiagram met 3 wedersyds uitsluitende gevalle. Gebruik die diagram om te wys dat vir 3 wedersyds uitsluitende gevalle, A, B en C, die volgende waar is:

$$P(A \text{ of } B \text{ of } C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Hierdie is die somreël vir 3 wedersydse uitsluitende gevalle.

Oplossing:

Onthou dat vir gebeurtenisse om onderling uitsluitend te wees moet hulle geen gemene elemente hê nie. Dit bedoel dat in die Venn-diagram moet A, B en C nie oorvleuel nie.



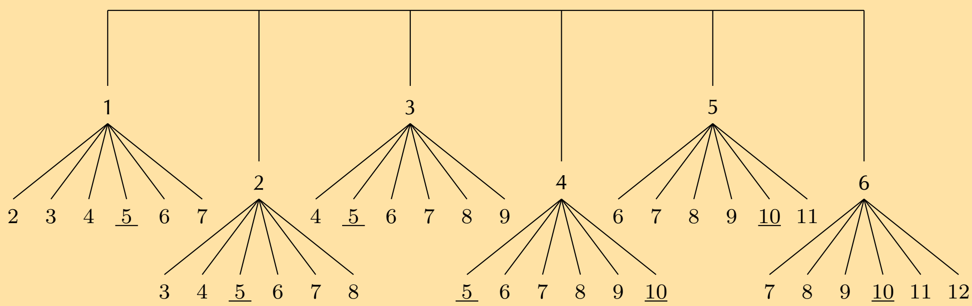
Vanaf die Venn-diagram kan ons sien dat die waarskynlikheid van die drie gebeurtenisse saam is eenvoudig die som van hul onderskeie waarskynlikhede. So $P(A \text{ of } B \text{ of } C) = P(A) + P(B) + P(C)$. Dit sal waar wees vir enige onderling uitsluitende gebeurtenisse omdat hulle nooit in die Venn-diagram oorvleuel nie.

10.4 Boomdiagramme

Oefening 10 – 5: Boomdiagramme

1. Jy rol die dobbelsteen twee keer en tel die kolletjies bymekaar om 'n telling te kry. Teken die boomdiagram om die eksperiment voor te stel. Wat is die waarskynlikheid dat jou telling 'n veelvoud is van 5?

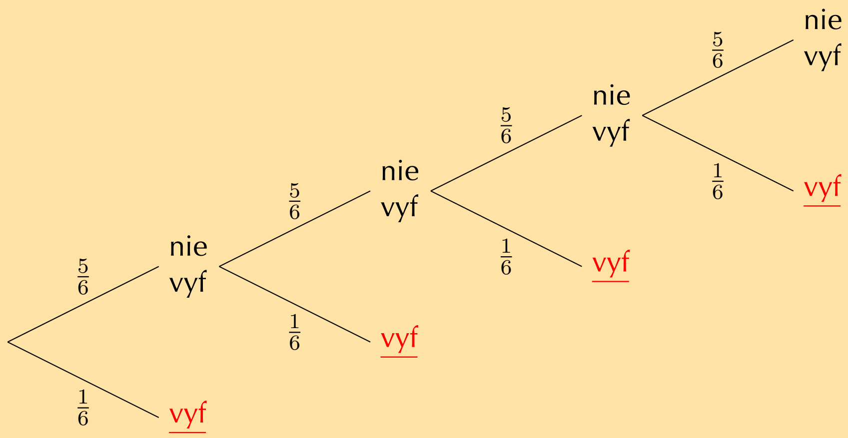
Oplossing:



Die boomdiagram vir die eksperiment word hierbo gegee. Om spasie te spaar word die waarskynlikhede nie op die takke van die boom aangedui nie, maar elke tak het 'n waarskynlikheid van $\frac{1}{6}$. Die veelvoude van 5 is onderstreep. Siende dat die waarskynlikheid van elk van die onderstreepte uitkomste $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ is en daar 7 uitkomste is wat veelvoude van 5 is, is die waarkskynlikheid dat 'n veelvoud van 5 gekry sal word $\frac{7}{36}$.

2. Wat is die waarskynlikheid om ten minste een vyf te gooi in vier gooie van 'n gewone 6-kantige dobbelsteen? Wenk: moenie al die moontlike uitkomste van elke gooi van die dobbelsteen wys nie. Ons stel slegs belang of die uitkomste 5 is of nie-5-nie.

Oplossing:



Die uitkomste wat tot ten minste een 5 lei in vier rolle van die dobbelsteen is in die diagram hierbo gemerk. Die som van die waarskynlikhede met al die takke langs is:

$$\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{671}{1296}$$

3. Jy gooi die muntstuk 4 keer.

   a) Wat is die waarskynlikheid om presies 3 keer kop te kry?

   b) Wat is die waarskynlikheid om ten minste 3 koppe te kry?

Oplossing:

   a) Daar is $2^4 = 16$ moontlike uitkomste as 'n mens 'n muntstuk 4 keer gooi. Daar is 4 uitkomste met presies 3 koppe, naamlik $\{K; K; K; S\}$, $\{K; K; S; K\}$, $\{K; S; K; K\}$ en $\{S; K; K; K\}$. Dus is die waarskynlikheid van presies 3 koppe $\dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$.

   b) **Ten minste** 3 koppe is dieselfde as presies 3 of presies 4 koppe. Ons het reeds gesien dat daar 4 maniere is om presies 3 koppe te kry. Daar is 1 manier om presies 4 koppe te kry, naamlik die uitkoms $\{K; K; K; K\}$. Daar is dus 5 maniere om ten minste 3 koppe te kry en die waarskynlikheid van hierdie gebeurtenis is $\dfrac{5}{16}$.

4. Jy gooi 4 verskillende muntstukke tegelykertyd.

   a) Wat is die waarskynlikheid om presies 3 keer kop te kry?

   b) Wat is die waarskynlikheid om ten minste 3 koppe te kry?

Oplossing:

a) Die wiskunde van hierdie probleem is presies dieselfe as dié van die vorige probleem, aangesien dit nie saak maak of ons 4 verskillende munte gelyktydig gooi of een munt 4 verskillende kere gooi nie. Die korrekte antwoord is $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{5}{16}$

10.5 Gebeurlikheidstabelle

Oefening 10 – 6: Gebeurlikheidstabelle

1. Gebruik die onderstaande gebeurlikheidstabel om die volgende vrae te beantwoord.

	Bruin oë	Nie bruin oë	Totale
Swart hare	50	30	80
Rooi hare	70	80	150
Totale	120	110	230

a) Wat is die waarskynlikheid dat iemand met swart hare, bruin oë sal hê?

b) Wat is die waarskynlikheid dat iemand swart hare het?

c) Wat is die waarskynlikheid dat iemand bruin oë het?

d) Is om swart hare en bruin oë te hê afhanklike of onafhanklike gebeurtenisse?

Oplossing:

a) 80 mense het swart hare en van 50 van hulle het ook bruin oë. Dus is die waarskynlikheid dat iemand met swart hare ook bruin oë het $\frac{50}{80} = \frac{5}{8}$.
Let wel: Dit is anders as om te vra wat is die waarskynlikheid dat iemand swart hare **en** bruin oë het. (Hierdie waarskynlikheid word in deel (d) hieronder bereken.) Die vraag is so gestel om te vra wat is die waarskynlikheid om bruin oë te hê **gegee** dat die persoon swart hare het.

b) Uit 'n totaal van 230, het 80 swart hare. Dus is die waarskynlikheid dat iemand swart hare het $\frac{80}{230} = \frac{8}{23}$.

c) Uit 'n totaal van 230, het 120 bruin oë. Dus is die waarskynlikheid dat ieman bruin oë het $\frac{120}{230} = \frac{12}{23}$.

d) Ons het alreeds bereken dat die waarskynlikheid om

- swart hare te hê is $\frac{8}{23}$ en
- bruin oë te hê is $\frac{12}{23}$.

Siende dat 50 uit 230 swart hare en bruin oë het, is die waarskynlikheid om swart hare en bruin oë te hê $\frac{5}{23}$.
Ons kan aflei dat om swart hare te hê en bruin oë te hê is afhanklike gebeurtenisse omdat $\frac{5}{23} \neq \frac{8}{23} \times \frac{12}{23}$.

2. Gegee die volgende gebeurlikheidstabel, identifiseer die gebeurtenisse en bepaal of hulle afhanklik of onafhanklik is.

	Plek A	Plek B	Totale
Busse vertrek laat	15	40	55
Busse vertrek betyds	25	20	45
Totale	40	60	100

Oplossing:

Die gebeurtenisse is of 'n bus vanaf Plek A vertrek het of nie en of die bus laat vertrek het of nie.

Ons toets of Plek A gebeurtenis en die die laat vertrek gebeurtenis onafhanklik is. Die totale aantal busse op die gebeurlikheidstabel is 100. Ons bepaal die waarskynlikhede van die verskillende gebeurtenisse vanaf die waardes in die tabel —

- vertrek van Plek A: $\frac{40}{100} = 0{,}4$;
- vertrek laat: $\frac{55}{100} = 0{,}55$;
- vertrek van Plek A en vertrek laat: $\frac{15}{100} = 0{,}15$.

Siende dat $0{,}4 \times 0{,}55 = 0{,}22 \neq 0{,}15$ is die gebeurtenisse afhanklik.

3. Jy word die volgende inligting gegee.

- Gebeurtenisse A en B is onafhanklik.
- $P(\text{nie } A) = 0{,}3$
- $P(B) = 0{,}4$

Voltooi die gebeurlikheidstabel hieronder.

	A	nie A	Totale
B			
nie B			
Totale			50

Oplossing:

Vanaf die gegewe tabel sien ons dat die totale aantal uitkomste is 50. Siende dat $P(\text{nie } A) = 0{,}3$ het ons $n(\text{nie } A) = 0{,}3 \times 50 = 15$ en $n(A) = 50 - 15 = 35$. Siende dat $P(B) = 0{,}4$ het ons $n(B) = 0{,}4 \times 50 = 20$ en $n(\text{nie } B) = 50 - 20 = 30$. Ons kan hiervan die table gedeeltelik voltooi:

	A	nie A	Totale
B			20
nie B			30
Totale	35	15	50

Volgende gebruik ons die feit dat A en B onafhanklik is. Vanaf die definisie vir onafhanklikheid het ons:

$$P((\text{nie } A) \text{ en } B) = P(\text{nie } A) \times P(B) = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$$

Dus $n((\text{nie } A) \text{ en } B) = 0{,}12 \times 50 = 6$. Ons vind die res van die waardes in die tabel deur seker te maak dat die som in elke ry en kolom die korrekte totale gee.

	A	nie A	Totale
B	14	6	20
nie B	21	9	30
Totale	35	15	50

10.6 Opsomming

Oefening 10 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Jane het belê op die aandelemark. Die waarskynlikheid dat sy nie al haar geld sal verloor nie is $0{,}32$. Wat is die waarskynlikheid dat sy al haar geld sal verloor? Verduidelik.

   Oplossing:

   Siende dat die gebeurtenisse "Jane verloor al haar geld" en "Jane sal nie al haar geld verloor nie" komplementêre gebeurtenisse is, is die som van hul waarskynlikhede 1. Dus is die waarskynlikheid dat Jane al haar geld sal verloor $1 - 0{,}32 = 0{,}68$.

2. As D en F wedersyds uitsluitende gebeurtenisse is, met $P(D') = 0{,}3$ en $P(D \text{ of } F) = 0{,}94$, vind $P(F)$.

   Oplossing:

   Siende dat D en F onderling uitsluitend is, kan ons die somreël vir onderling uitsluitende gebeurtenisse toepas:

   $$P(D \text{ of } F) = P(D) + P(F)$$

   Ons word gegee dat $P(\text{nie } D) = 0{,}3$, dus $P(D) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Vanaf die somreël het ons dat

   $$\begin{aligned} P(F) &= P(D \text{ of } F) - P(D) \\ &= 0{,}94 - 0{,}7 \\ &= 0{,}24 \end{aligned}$$

3. 'n Motorhandelaar het pienk, lemmetjiegroen en pers modelle van motor A en pers, oranje en veelkleurige modelle van motor B. Een donker nag steel 'n dief 'n motor.

   a) Wat is die steekproef en die steekproefruimte?

   b) Wat is die waarskynlikheid dat 'n model van A of 'n model van B gesteel is?

   c) Wat is die waarskynlikheid dat beide 'n model van A en 'n model van B gesteel word?

   Oplossing:

a) Die steekproef is die uitkoms wanneer 'n spesifieke model en kleur motor vanuit die steekproefruimte gekies word.

Die steekproefruimte is {pienk model A; lemmetjiegroen model A; pers model A; pers model B; oranje model B; veelkleurig model B}.

b) Siende dat daar slegs twee modelle is, naamlik A en B, is die waarskynlikheid dat een van die twee modelle gesteel is 1.

c) Siende dat die twee modelle nie oorvleuel nie en siende dat die dief slegs een kar steel, is die waarskynlikheid dat albei modelle gesteel word 0.

4. Die waarskynlikheid van gebeurtenis X is $0{,}43$ en die waarskynlikheid van gebeurtenis Y is $0{,}24$. Die waarskynlikheid dat beide gelyktydig gebeur, is $0{,}10$. Wat is die waarskynlikheid dat X of Y sal gebeur?

Oplossing:

Vanaf die somreël

$$\begin{aligned} P(X \text{ of } Y) &= P(X) + P(Y) - P(X \text{ en } Y) \\ &= 0{,}43 + 0{,}24 - 0{,}10 \\ &= 0{,}57 \end{aligned}$$

5. $P(H) = 0{,}62$; $P(J) = 0{,}39$ en $P(H \text{ en } J) = 0{,}31$. Bereken:

a) $P(H')$

b) $P(H \text{ of } J)$

c) $P(\text{nie } H \text{ of nie } J)$

d) $P(\text{nie } H \text{ of } J)$

e) $P((\text{nie } H) \text{ en } (\text{nie } J))$

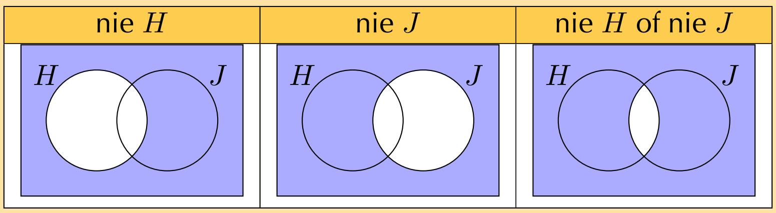
Oplossing:

a) $P(H') = 1 - P(H) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

b) Vanaf die somreël:

$$\begin{aligned} P(H \text{ of } J) &= P(H) + P(J) - P(H \text{ en } J) \\ &= 0{,}62 + 0{,}39 - 0{,}31 \\ &= 0{,}7 \end{aligned}$$

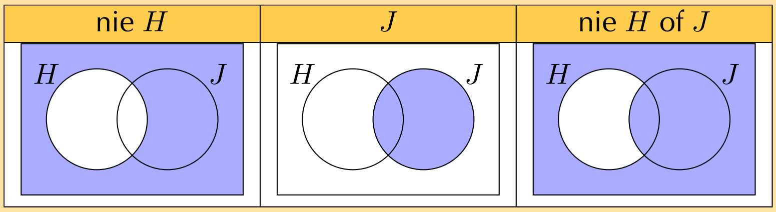
c) Teken eers 'n Venndiagram om te sien hoe die gebeurtenis (nie H of nie J) lyk.



Vanaf die derde diagram sien ons dat

$$\begin{aligned} P(H' \text{ of nie } J) &= 1 - P(H \text{ en } J) \\ &= 0{,}69 \end{aligned}$$

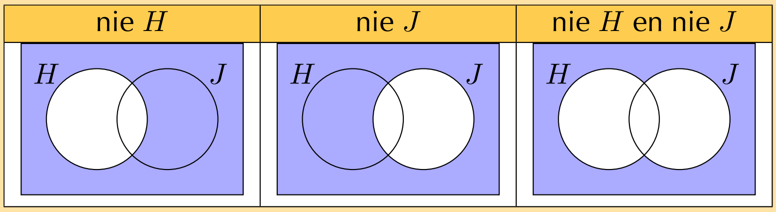
d) Teken eers 'n Venndiagram om te sien hoe die gebeurtenis (nie H of J) lyk.



Vanaf die derde diagram sien ons dat

$$
\begin{aligned}
P((\text{nie } H) \text{ of } J) &= P(\text{nie } H) + P(H \text{ en } J) \\
&= 0{,}38 + 0{,}31 \\
&= 0{,}69
\end{aligned}
$$

e) Teken eers 'n Venndiagram om te sien hoe die gebeurtenis $((\text{nie } H) \text{ en } (\text{nie } J))$ lyk.



Vanaf die derde diagram sien ons dat

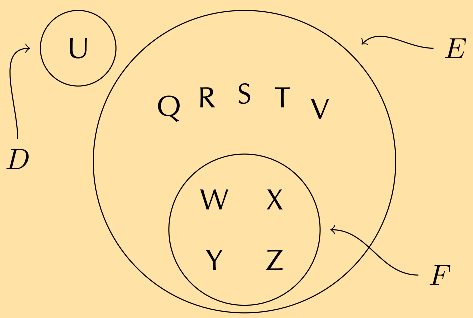
$$
\begin{aligned}
P((\text{nie } H) \text{ en } (\text{nie } J)) &= 1 - P(H \text{ of } J) \\
&= 0{,}3
\end{aligned}
$$

6. Die laaste tien letters van die alfabet word in 'n hoed gesit en mense word gevra om een van hulle te trek. Gebeurtenis D is om 'n klinker te kies, gebeurtenis E 'n medeklinker en gebeurtenis F om een van die laaste vier letters te trek. Trek 'n Venndiagram om die die uitkomste in die steekproefruimte en die verskillende gebeurtenisse te toon. Bereken dan die volgende waarskynlikhede:

   a) $P(\text{nie } F)$
   b) $P(F \text{ of } D)$
   c) $P(\text{nie } E \text{ of } F)$ nie
   d) $P(D \text{ en } E)$
   e) $P(E \text{ en } F)$
   f) $P(E \text{ en nie } D)$

   Oplossing:

   a) Die Venndiagram is hieronder. (Let op dat Y nie 'n klinker is nie.)



Ons kan die gevraagde waarskynlikhede vanaf die Venndiagram lees.
$P(\text{nie } F) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{3}{5}$

b) $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

c) Dit laat slegs die uitkomste in D, dus $P(\text{nie } E \text{ en nie } F) = \frac{1}{10}$.

d) 0 siende dat D en E onderling uitsluitend is.

e) $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

f) Siende dat D en E komplementêr is ('n letter is óf 'n klinker óf 'n medeklinker), $D' = E$, dus $P(E \text{ en } D') = P(E \text{ en } E) = P(E) = \frac{9}{10}$.

7. Thobeka vergelyk drie woonbuurte (ons noem hulle A, B en C) om te sien waar die beste plek is om te woon. Sy ondervra 80 mense en vra hulle of hulle van elk van die woonbuurte hou of nie.

- 40 mense hou van woonbuurt A.
- 35 mense hou van woonbuurt B.
- 40 mense hou van woonbuurt C.
- 21 mense hou van beide woonbuurte A en C.
- 18 mense hou van beide woonbuurte B en C.
- 68 mense hou van ten minste een woonbuurt.
- 7 mense hou van al drie woonbuurte.

a) Gebruik die inligting om 'n Venndiagram te trek.

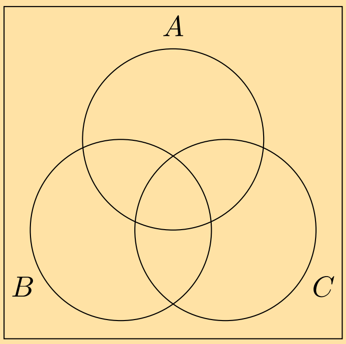
b) Hoeveel mense hou van geeneen van die woonbuurte nie?

c) Hoeveel mense hou van woonbuurte A en B, maar nie van C nie?

d) Wat is die waarskynlikheid dat 'n willekeurig gekose persoon van die proefneming van ten minste een van die woonbuurte sal hou?

Oplossing:

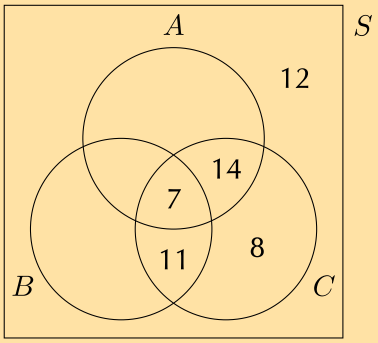
a) Ons trek eers die buitelyn van die Venndiagram.



Vervolgens bepaal ons die tellings van die verskillende areas in die diagram deur die inligting te gebruik wat verskaf is.

- Daar is 7 mense wat van al drie woonbuurte hou, dus $n(A \text{ en } B \text{ en } C) = 7$.
- Daar is 21 mense wat hou van A en C, dus $n(A \text{ en } C) = 21$.
- Daar is 18 mense wat hou van B en C, dus $n(B \text{ en } C) = 18$.
- Daar is 40 mense wat hou van C, dus $n(C) = 40$.
- Aangesien 68 mense van ten minste een buurt hou en aangesien daar 80 mense altesaam is, hou 12 mense van geen van die buurte nie.

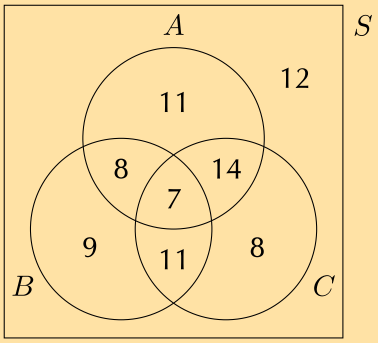
Deur van die bostaande informasie gebruik te maak kan ons die Venn-diagram gedeelteliks voltooi.



Siende dat $n(A \text{ of } B \text{ of } C) = 68$, kan ons van die diagram hierbo sien dat $n(A \text{ of } B) = 60$. Vanaf die somreël

$$n(A \text{ en } B) = n(A) + n(B) - n(A \text{ of } B) = 40 + 35 - 60 = 15$$

Dit laat ons toe om die diagram te voltooi:



b) 12

c) 8

d) $P(A \text{ of } B \text{ of } C) = \frac{68}{80} = \frac{17}{20}$

8. Laat G en H twee gebeurtenisse wees in 'n steekproefruimte. Veronderstel dat $P(G) = 0{,}4$; $P(H) = h$; en $P(G \text{ of } H) = 0{,}7$.

   a) Vir watter waarde van h is G en H wedersyds uitsluitend?

   b) Vir watter waarde van h is G en H onafhanklik?

Oplossing:

a) G en H is wedersyds uitsluitend as $P(G \text{ en } H) = 0$.
Vanaf die somreël weet ons dat

$$P(G \text{ of } H) = P(G) + P(H) - P(G \text{ en } H)$$

Deur die gegewe waardes en $P(G \text{ en } H) = 0$ in die vergelyking te vervang, verkry ons

$$0{,}7 = 0{,}4 + h - 0$$

Dus $h = 0{,}3$.

b) G en H is onafhanklik as $P(G \text{ en } H) = P(G) \times P(H)$.
Vanaf die somreël weet ons dat

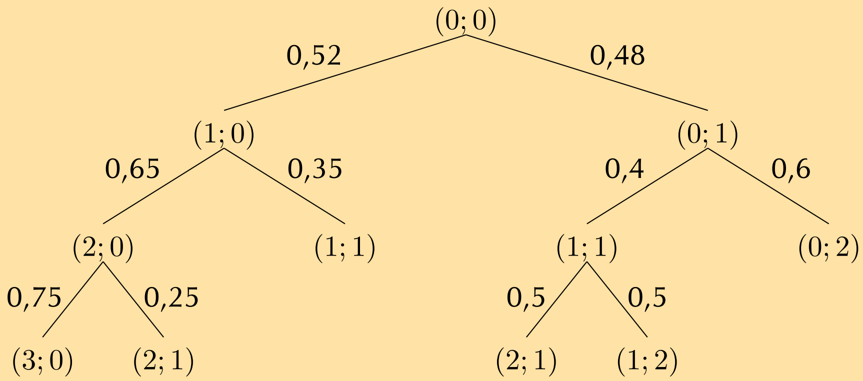
$$P(G \text{ of } H) = P(G) + P(H) - P(G \text{ en } H)$$

Deur die gegewe waardes en $P(G \text{ en } H) = P(G) \times P(H)$ in die vergelyking te vervang, verkry ons

$$\begin{aligned} 0{,}7 &= 0{,}4 + h - 0{,}4 \times h \\ 0{,}3 &= 0{,}6 \times h \end{aligned}$$

Dus $h = 0{,}5$.

9. Die volgende boomdiagram verteenwoordig punte aangeteken deur twee spanne in 'n sokkerwedstryd. By elke vlak in die boom word die punte getoon (punte vir Span 1; punte vir Span 2).

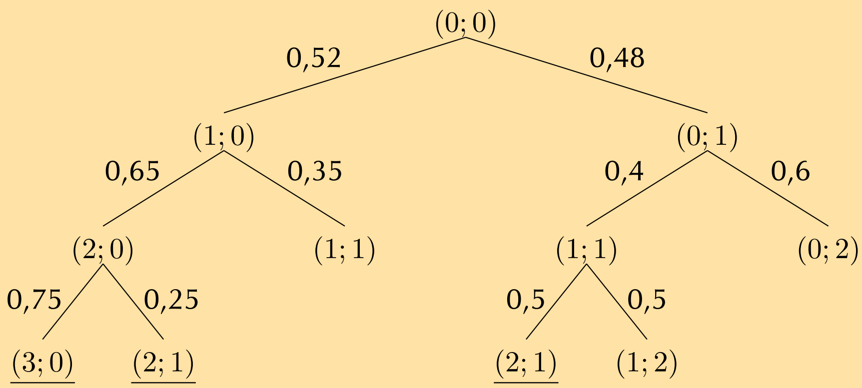


Gebruik die diagram om die waarskynlikheid te bepaal dat:

a) Span 1 sal wen
b) Die wedstryd gelykop sal wees
c) Die wedstryd sal eindig met 'n ewe getal totale punte

Oplossing:

a) Die uitkomste waar Span 1 wen (wanneer die eerste telling groter is as die tweede), is onderstreep in die boomdiagram hieronder.

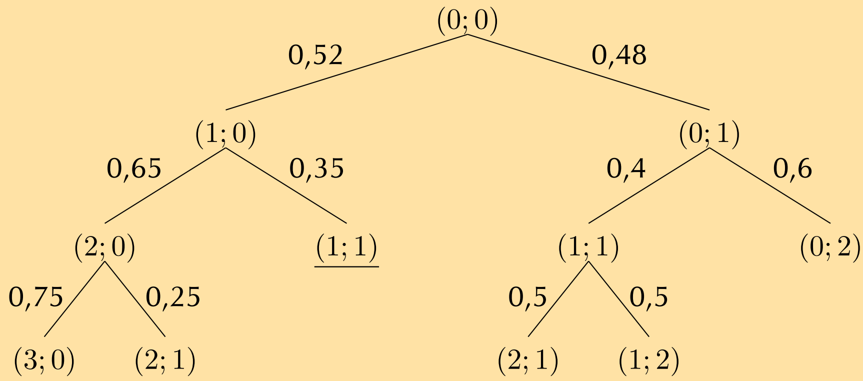


Bereken die waarskynlikheid dat Span 1 wen deur die waarskynlikhede langs elke pad te vermenigvuldig en dan bymekaar te tel.

$$0{,}52 \times 0{,}65 \times 0{,}75 = 0{,}2535$$
$$0{,}52 \times 0{,}65 \times 0{,}25 = 0{,}0845$$
$$0{,}48 \times 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}096$$

$$0{,}2535 + 0{,}0845 + 0{,}096 = \underline{0{,}434}$$

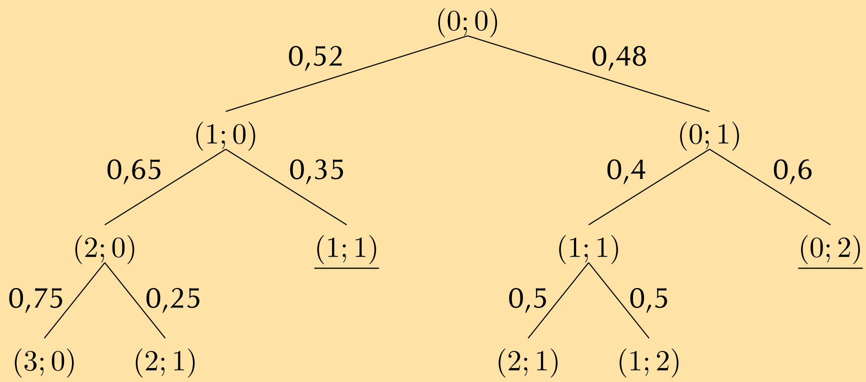
b) Die uitkomste waar die wedstryd gelykop eindig (wanneer die twee tellings gelyk is), is onderstreep in die boomdiagram hieronder.



Daar is slegs een so 'n uitkoms en die waarskynlikheid van 'n gelykoptelling is die produk van die waarskynlikhede langs dié uitkoms se pad.

$$0{,}52 \times 0{,}35 = 0{,}182$$

c) Die uitkomste waar die som van die tellings ewe is, is onderstreep in die boomdiagram hieronder.

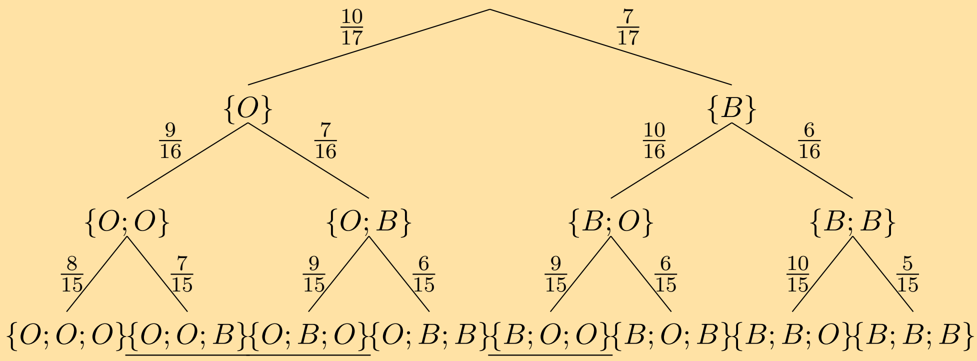


$$0{,}52 \times 0{,}35 = 0{,}182$$
$$0{,}48 \times 0{,}6 = 0{,}288$$

$$0{,}182 + 0{,}288 = \underline{0{,}47}$$

10. 'n Sak bevat 10 oranje balle en 7 blou balle. Jy trek 3 balle uit die sak **sonder terugplasing**. Wat is die waarskynlikheid dat jy sal eindig met presies 2 oranje balle? Stel hierdie proefneming voor met 'n boomdiagram.

Oplossing:



$$\begin{aligned} P(\text{twee oranje balle}) &= \left(\tfrac{10}{17} \times \tfrac{9}{16} \times \tfrac{7}{15}\right) + \left(\tfrac{10}{17} \times \tfrac{7}{16} \times \tfrac{9}{15}\right) + \left(\tfrac{7}{17} \times \tfrac{10}{16} \times \tfrac{9}{15}\right) \\ &= \tfrac{63}{136} \end{aligned}$$

11. Voltooi die volgende gebeurlikheidstabel en bepaal of die gebeurtenisse afhanklik of onafhanklik is.

	Durban	Bloemfontein	Totale
Bly lekker daar	130	30	
Bly nie lekker daar nie	140		340
Totale		230	500

Oplossing:

Ons voltooi die gebeurlikheidstabel deur seker te maak dat al die rye en kolomme sommeer tot die korrekte totale.

	Durban	Bloemfontein	Totale
Bly lekker daar	130	30	160
Bly nie lekker daar nie	140	200	340
Totale	270	230	500

Aangesien

- $P(\text{Durban}) = \frac{270}{500} = 0{,}54$;
- $P(\text{bly lekker daar}) = \frac{160}{500} = 0{,}32$;
- $P(\text{Durban en bly lekker daar}) = \frac{130}{500} = 0{,}26$;

en aangesien $0{,}54 \times 0{,}32 = 0{,}1728 \neq 0{,}26$ is die gebeurtenisse afhanklik.

12. Som die volgende inligting oor 'n mediese proefneming met 2 tipes multivitamine op in 'n gebeurlikheidstabel en bepaal of die gebeurtenisse afhanklik of onafhanklik is.

- 960 mense het deelgeneem aan die mediese proefneming.
- 540 mense het Multivitamine A gebruik vir 'n maand en 400 van daardie mense het 'n verbetering in hulle gesondheid getoon.
- 300 mense het 'n verbetering in gesondheid getoon tow hulle Multivitamine B gebruik het vir 'n maand.

As die gebeurtenisse onafhanklik is, beteken dit dat die twee multivitamines dieselfde uitwerking het op mense. As die gebeurtenisse afhanklik is, beteken dit dat een multivatimine beter is as die ander een. Watter multivitamine is die beste, of is hulle beide ewe effektief?

Oplossing:

Vanuit die inligting in die problemmstelling kan ons die volgende, onvolledige gebeurlikheidstabel optrek.

	Multivitamine A	Multivitamine B	Totale
Verbetering in gesondheid	400	300	
Geen verbetering in gesondheid			
Totale	540		960

Voltooi die tabel deur seker te maak dat elke ry en elke kolom sommeer tot die korrekte totaal.

	Multivitamine A	Multivitamine B	Totale
Verbetering in gesondheid	400	300	700
Geen verbetering in gesondheid	140	120	260
Totale	540	420	960

Aangesien

- $P(\text{Multivitamine A}) = \frac{540}{960} = \frac{9}{16}$;
- $P(\text{Verbetering in gesondheid}) = \frac{700}{960} = \frac{35}{48}$;
- $P(\text{Multivitamine A en Verbetering in gesondheid}) = \frac{400}{960} = \frac{5}{12}$;

en aangesien $\frac{9}{16} \times \frac{35}{48} = \frac{105}{256} \neq \frac{5}{12}$ is die gebeurtenisse afhanklik.

Met Multivitamine A het $\frac{400}{540} = 74{,}1\%$ van die mense 'n verbetering in gesondheid getoon. Met Multivitamine B het $\frac{300}{420} = 71{,}4\%$ van die mense 'n verbetering in gesondheid getoon. Dus is Multivitamine A meer effektief as Multivitamine B.

HOOFSTUK 11

Statistiek

- Ogiewe is nie altyd gegrond by $(0; 0)$ nie.
- Die balke van histogramme moet ewe breed/wyd wees.
- Die formule vir bevolkingsvariansie word gebruik en nie steekproefvariansie nie.
- Moedig leerlinge aan om die STATS-funksie van hulle sakrekenaars te gebruik.
- Leerders hoef nie spreigrafieke te kan teken nie, hulle moet net uitskieters kan identifiseer.
- Bespreek die misbruik van statistiek in die regte wêreld en bevorder bewusmaking.

11.1 Hersiening

Oefening 11 – 1: Hersiening

1. Vir elk van die volgende datastelle, bereken die gemiddelde en al die kwartiele. Rond jou antwoorde af tot een desimale plek.

   a) $-3{,}4$; $-3{,}1$; $-6{,}1$; $-1{,}5$; $-7{,}8$; $-3{,}4$; $-2{,}7$; $-6{,}2$

   b) -6 ; -99 ; 90 ; 81 ; 13 ; -85 ; -60 ; 65 ; -49

   c) 7 ; 45 ; 11 ; 3 ; 9 ; 35 ; 31 ; 7 ; 16 ; 40 ; 12 ; 6

   Oplossing:

   a) Gemiddelde:

   $$\begin{aligned}\overline{x} &= \frac{(-3{,}4) + (-3{,}1) + (-6{,}1) + (-1{,}5) + (-7{,}8) + (-3{,}4) + (-2{,}7) + (-6{,}2)}{8} \\ &= -4{,}275\end{aligned}$$

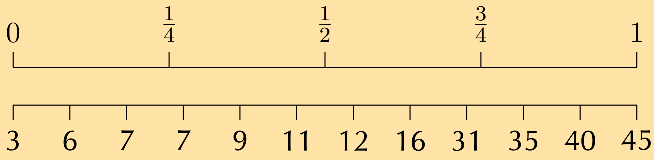
   gemiddeld $= -4{,}3$; eerste kwartiel $= -6{,}2$; tweede kwartiel $= -3{,}4$; derde kwartiel $= -2{,}9$.

   b) gemiddeld $= -5{,}6$; eerste kwartiel $= -60$; tweede kwartiel $= -6$; derde kwartiel $= 65$.

   c) Die gemiddelde is $\overline{x} = 18{,}5$.
   Sorteer die data om die kwartiele te bereken:

   $$3\ ;\ 6\ ;\ 7\ ;\ 7\ ;\ 9\ ;\ 11\ ;\ 12\ ;\ 16\ ;\ 31\ ;\ 35\ ;\ 40\ ;\ 45$$

   Ons gebruik die onderstaande diagram om te vind by of tussen watter getalle die kwartiele lê.

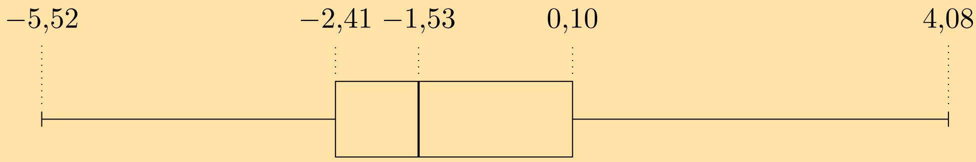


Die eerste kwartiel is tussen die derde en vierde getalle. Omdat albei die getalle gelyk is aan 7, is die eerste kwartiel 7.

Die mediaan (tweede kwartiel) is tussen die sesde en sewende getalle. Die sesde getal is 11 en die sewende getal is 12, wat beteken dat die mediaan is $\frac{11+12}{2} = 11{,}5$.

Die derde kwartiel is tussen die neënde en tiende getalle. Dus is die derde kwartiel $\frac{31+35}{2} = 33$.

2. Gebruik die onderstaande mond-en-snor diagram om die reikwydte en die inter-kwartielwydte van die datastel te bepaal.



Oplossing:

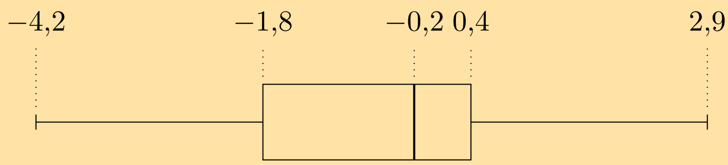
Die reikwydte is die verskil tussen die minimum- en maksimumwaardes. Vanaf die mond-en-snor diagram kry ons dat die minimum is $-5{,}52$ en die maksimum is $4{,}08$. Dus is die reikwydte $4{,}08 - (-5{,}52) = 9{,}6$.

Die inter-kwartielwydte is die verskil tussen die eerste en derde kwartiele. Vanaf die mond-en-snor diagram het ons dat die eerste kwartiel is $-2{,}41$ en die derde kwartiel is $0{,}10$. Dus is die inter-kwartielwydte $0{,}10 - (-2{,}41) = 2{,}51$.

3. Teken die mond-en-snor diagram van die volgende data.

$0{,}2\ ;\ -0{,}2\ ;\ -2{,}7\ ;\ 2{,}9\ ;\ -0{,}2\ ;\ -4{,}2\ ;\ -1{,}8\ ;\ 0{,}4\ ;\ -1{,}7\ ;\ -2{,}5\ ;\ 2{,}7\ ;\ 0{,}8\ ;\ -0{,}5$

Oplossing:

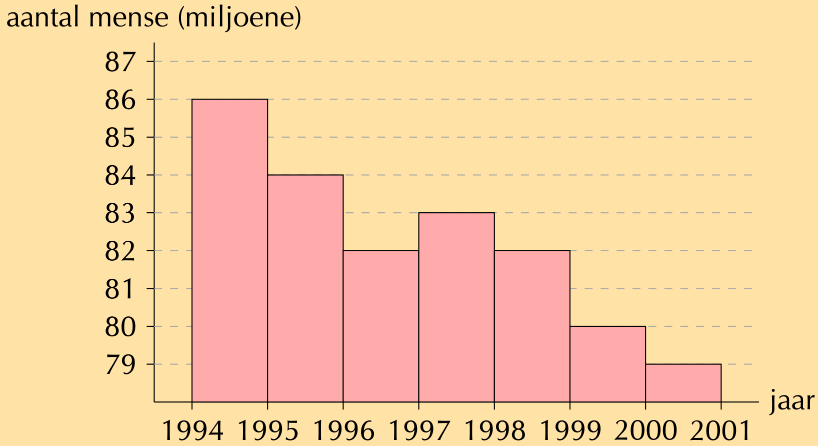


11.2 Histogramme

Frekwensieveelhoek

Oefening 11 – 2: Histogramme

1. Gebruik onderstaande histogram om die volgende vrae te beantwoord. Die histogram toon die aantal mense wat elke jaar wêreldwyd gebore word. Die punte op die x-as toon die begin van elke jaar.



a) Hoeveel mense is gebore tussen die begin van 1994 en die begin van 1996?

b) Neem die aantal mense in die wêreld toe of neem dit af?

c) Hoeveel meer mense is in 1994 gebore as in 1997?

Oplossing:

a) $86 + 84 = 170$ miljoen

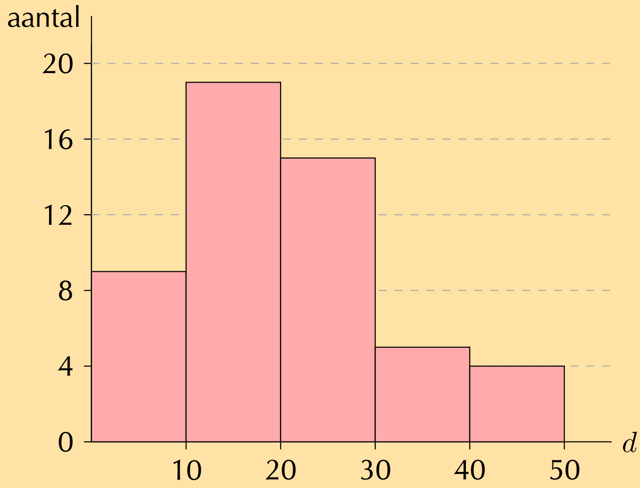
b) Ongeag die feit dat die tempo waarteen mense gebore word, besig is om te verlaag, word daar steeds elke jaar nog mense gebore. Dus is die wˆereldbevolking besig om toe te neem.

c) $86 - 83 = 3$ miljoen

2. In ’n verkeersopname is ’n ewekansige steekproef van 50 motoriste gevra watter afstand hulle elke dag na hulle werk toe ry. Die resultate van die opname word in die tabel hieronder getoon. Trek ’n histogram om die data te verteenwoordig.

d (km)	$0 < d \leq 10$	$10 < d \leq 20$	$20 < d \leq 30$	$30 < d \leq 40$	$40 < d \leq 50$
f	9	19	15	5	4

Oplossing:

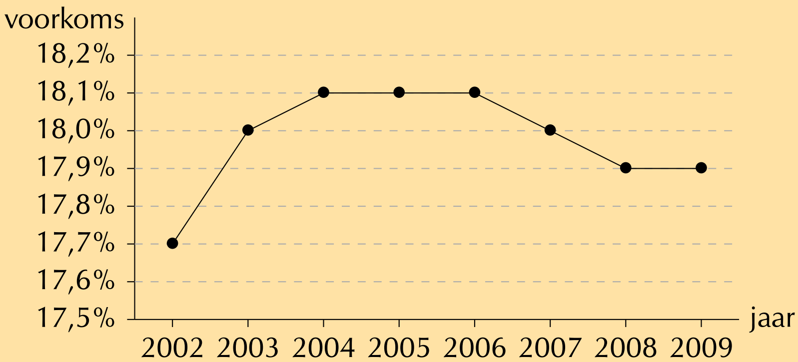


3. Hieronder is die data vir die voorkoms van MIV in Suid-Afrika. MIV-voorkoms verwys na die persentasie mense tussen die ouderdomme van 15 en 49 wat MIV-positief is.

jaar	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
voorkoms (%)	17,7	18,0	18,1	18,1	18,1	18,0	17,9	17,9

Trek 'n frekwensieveelhoek van hierdie datastel.

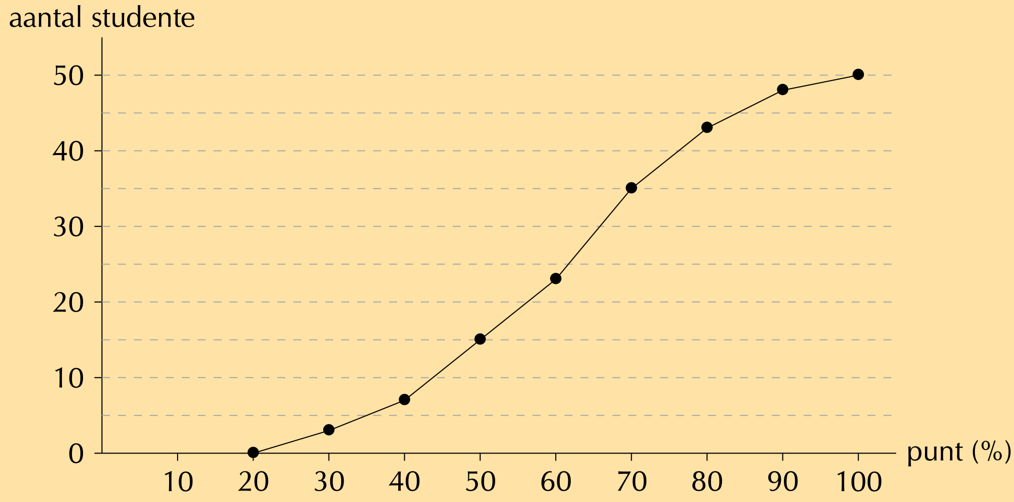
Oplossing:



11.3 Ogiewe

Oefening 11 – 3: Ogiewe

1. Gebruik die ogief om onderstaande vrae te beantwoord.



a) Hoeveel studente het tussen 50% en 70% gekry?

b) Hoeveel studente het ten minste 70% gekry?

c) Bereken die gemiddeld van die klaspunt, rond af tot die naaste heelgetal.

Oplossing:

a) Die kumulatiewe grafiek wys dat 15 studente minder as 50% gekry het en 35 studente minder as 70%. Dus het $35 - 15 = 20$ studente tussen 50% en 70% gekry.

b) Die kumulatiewe grafiek wys dat 35 studente minder as 70% gekry het en daar is 50 studente in totaal. Dus het $50 - 35 = 15$ studente ten minste (groter of gelyk aan) 70% gekry.

c) Om die gemiddeld te bereken, gebruik ons eers die ogief om die frekwensie van elke interval te bepaal. Die frekwensie van 'n interval is die verskil tussen die kumulatiewe waardes aan die bo- end onderkant van dié interval op die ogief. Dit mag dalk moeilik wees om die presiese kumulatiewe waardes vir sommige van die punte op die ogief af te lees, maar aangesien die finale antwoord tot die naaste heelgetal afgerond word, sal klein foute nie 'n verskil maak nie. Die tabel hieronder som die frekwensies op.

Interval	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$
f	3	4	8	8
Interval	$[60,70)$	$[70,80)$	$[80,90)$	$[90,100)$
f	12	8	5	2

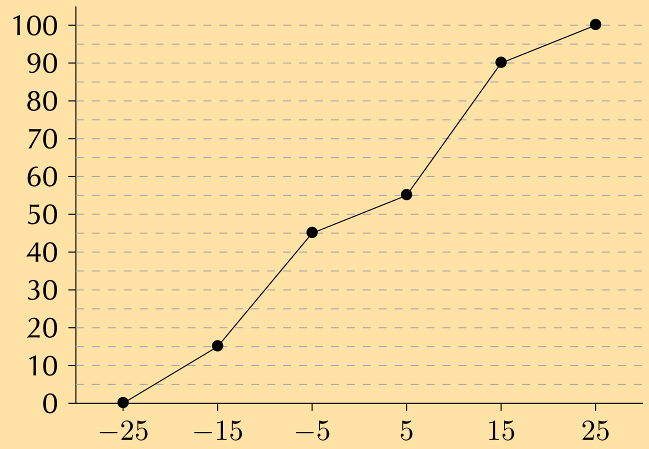
Die gemiddeld is dan die waarde by die middel van elke interval, geweeg met die frekwensie van daardie interval.

$$\frac{3 \times 25 + 4 \times 35 + 8 \times 45 + 8 \times 55 + 12 \times 65 + 8 \times 75 + 5 \times 85 + 2 \times 95}{3 + 4 + 8 + 8 + 12 + 8 + 5 + 2}$$

$$= 60{,}2$$

Die gemiddelde punt, afgerond tot die naaste heelgetal, is 60%.

2. Teken die histogram wat ooreenstem met die ogief.



Oplossing:

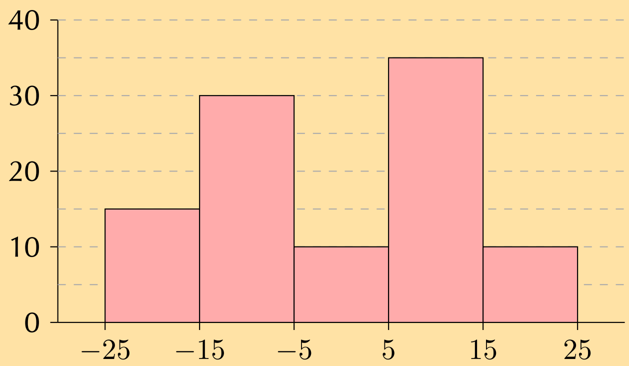
Om die histogram te teken moet ons die telling in elke interval bepaal.

Eerstens, ons kan die intervalle vind deur te kyk waar die punte gestip is op die ogief. Aangesien die punte by x-koordinate van -25; -15; -5; 5; 15 en 25 is, beteken dit dat die intervalle $[-25;-15)$ is, ens.

Om die telling in elke interval te kry trek, trek ons die kumulatiewe telling aan die begin van die interval af van die kumulatiewe telling aan die einde van die interval.

Interval	$[-25;-15)$	$[-15;-5)$	$[-5;5)$	$[5;15)$	$[15;25)$
Aantal	15	30	10	35	10

Vanaf die tellings kan ons die volgende histogram teken:



3. Die volgende datastelle lys die ouderdomme van 24 mense:

   $2; 5; 1; 76; 34; 23; 65; 22; 63; 45; 53; 38$

   $4; 28; 5; 73; 79; 17; 15; 5; 34; 37; 45; 56$

   Gebruik die data om die volgende vrae te beantwoord.

   a) Deur 'n intervalwydte van 8 te gebruik, konstrueer 'n kumulatiewe grafiek.

   b) Hoeveel is jonger as 30?

   c) Hoeveel is jonger as 60?

   d) Gee 'n verduideliking onder watter waarde die onderste 50% van die ouderdomme val.

   e) Onder watter waarde val die onderste 40%?

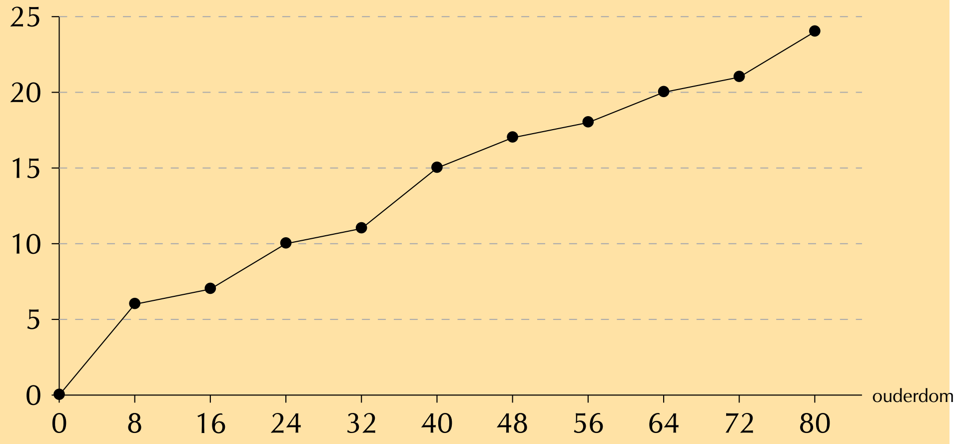
f) Konstrueer 'n frekwensieveelhoek.

Oplossing:

a) Die tabel hieronder wys die aantal mense in elke ouderdomsinterval met breedte 8.

Interval	$[0;8)$	$[8;16)$	$[16;24)$	$[24;32)$	$[32;40)$
Telling	6	1	3	1	4
Kumulatief	6	7	10	11	15
Interval	$[40;48)$	$[48;56)$	$[56;64)$	$[64;72)$	$[72;80)$
Telling	2	1	2	1	3
Kumulatief	17	18	20	21	24

Vanaf hierdie tabel kan ons die kumulatiewe frekwensie grafiek teken:



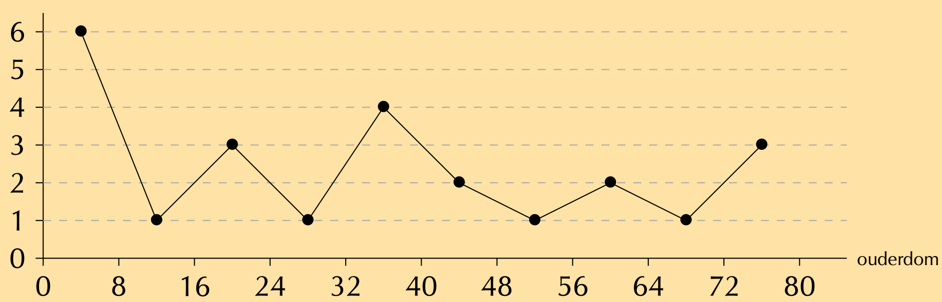
b) 11 mense

c) 19 mense

d) Ons word gevra om die mediaan van die datastel te bereken. Die mediaan is, volgens definisie, die waarde waaronder 50% van die data val. Siende dat daar 24 waardes is, lê die mediaan tussen die twee middelste waardes, dus 34.

e) Daar is 24 waardes. Deur 'n getallelyn te trek, soos ons maak om kwartiele te bepaal, kan ons sien dat die 40% punt tussen die tiende en elfde waardes is. Die tiende waarde is 23 en die elfde waarde is 28. Dus is 40% van die waardes onder $\frac{23+28}{2} = 25{,}5$.

f) Die tabel hierbo bevat alreeds al die waardes wat ons benodig om die frekwensieveelhoek te teken.



4. Die gewig van sandsakke in gram word hieronder gegee (afgerond tot die naaste tiende):

   $50{,}1$; $40{,}4$; $48{,}5$; $29{,}4$; $50{,}2$; $55{,}3$; $58{,}1$; $35{,}3$; $54{,}2$; $43{,}5$

   $60{,}1$; $43{,}9$; $45{,}3$; $49{,}2$; $36{,}6$; $31{,}5$; $63{,}1$; $49{,}3$; $43{,}4$; $54{,}1$

   a) Besluit op ’n intervalwydte en verklaar wat jy waargeneem het oor jou keuse.
   b) Gee jou laagste interval.
   c) Gee jou hoogste interval.
   d) Konstrueer ’n kumulatiewe frekwensie grafiek en ’n frekwensie veelhoek.
   e) Onder watter waarde val 53% van die gevalle?
   f) Onder watter waarde val 60% van die gevalle?

   Oplossing:

   a) Leerder-afhanklike antwoord.
   b) Leerder-afhanklike antwoord.
   c) Leerder-afhanklike antwoord.
   d) Leerder-afhanklike antwoord.
   e) $49{,}25$
   f) $49{,}7$

11.4 Variansie en standaardafwyking

Oefening 11 – 4: Variansie en standaardafwyking

1. Bridget het ’n opname gemaak van die prys van petrol by vulstasies in Kaapstad en Durban. Die data, wat in rand per liter gemeet word, word hieronder gegee.

Kaapstad	$3{,}96$	$3{,}76$	$4{,}00$	$3{,}91$	$3{,}69$	$3{,}72$
Durban	$3{,}97$	$3{,}81$	$3{,}52$	$4{,}08$	$3{,}88$	$3{,}68$

   a) Bepaal die gemiddelde prys in elke stad en stel dan vas watter stad die laagste gemiddeld het.
   b) Bepaal die standaardafwyking vir elk van die stede se prys.
   c) Watter stad het ’n meer konstante prys vir petrol? Gee redes vir jou antwoord.

   Oplossing:

   a) Kaapstad: $3{,}84$. Durban: $3{,}82$. Durban het die laagste gemiddeld.
   b) Standaardafwyking:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \overline{x})^2}{n}}$$

Vir Kaapstad:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{\sum (x - (3{,}84))^2}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{0{,}0882}{6}} \\ &= \sqrt{0{,}0147} \\ &\approx 0{,}121\end{aligned}$$

Vir Durban:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{\sum \left(x - (3{,}82\dot{3})\right)^2}{6}} \\ &= \sqrt{\frac{0{,}20\dot{3}}{6}} \\ &= \sqrt{0{,}033\dot{8}} \\ &\approx 0{,}184\end{aligned}$$

c) Die standaardafwyking van Kaapstad se pryse is laer as dié in Durban. Dit beteken dat Kaapstad het meer konstante (minder veranderlike) pryse as Durban het.

2. Bereken die gemiddelde en variansie van die volgende stel waardes.

   $150 ; 300 ; 250 ; 270 ; 130 ; 80 ; 700 ; 500 ; 200 ; 220 ; 110 ; 320 ; 420 ; 140$

   Oplossing:

   Gemiddeld $= 270{,}7$. Variansie $= 27\,435{,}2$.

3. Bereken die gemiddelde en variansie van die volgende stel waardes.

   $-6{,}9 ; -17{,}3 ; 18{,}1 ; 1{,}5 ; 8{,}1 ; 9{,}6 ; -13{,}1 ; -14{,}0 ; 10{,}5 ; -14{,}8 ; -6{,}5 ; 1{,}4$

   Oplossing:

   Gemiddeld $= -1{,}95$. Variansie $= 127{,}5$.

4. Die tye vir 8 atlete wat 'n 100 m naelloop op dieselfde baan gehardloop het, word hieronder weergegee. Al die tye is in sekondes.

   $10{,}2 ; 10{,}8 ; 10{,}9 ; 10{,}3 ; 10{,}2 ; 10{,}4 ; 10{,}1 ; 10{,}4$

   a) Bereken die gemiddelde tyd.
   b) Bereken die standaardafwyking vir die data.
   c) Hoeveel van die atlete se tye is meer as een standaardafwyking weg vanaf die gemiddeld?

   Oplossing:

   a) $\overline{x} = 10{,}4$
   b) $\sigma = 0{,}27$
   c) Die gemiddeld is $10{,}4$ en die standaardafwyking is $0{,}27$. Dus is die interval, wat al die waardes binne een standaardafwyking vanaf die gemiddeld bevat, $[10{,}4 - 0{,}27; 10{,}4 + 0{,}27] = [10{,}13; 10{,}67]$. Ons moet nou bepaal hoeveel waardes **verder** as een standaardafwyking vanaf die gemiddelde is, m.a.w. **buite** die interval. Daar is 3 datawaardes buite die interval.

5. Die volgende datastel het 'n gemiddeld van $14{,}7$ en 'n variansie van $10{,}01$.

$$18\ ;\ 11\ ;\ 12\ ;\ a\ ;\ 16\ ;\ 11\ ;\ 19\ ;\ 14\ ;\ b\ ;\ 13$$

Bereken die waardes van a en b.

Oplossing:

Uit die formule vir die gemiddeld volg

$$\begin{aligned} 14{,}7 &= \frac{114 + a + b}{10} \\ \therefore a + b &= 147 - 114 \\ \therefore a &= 33 - b \end{aligned}$$

Uit die formule vir die variansie volg

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} \\ \therefore 10{,}01 &= \frac{69{,}12 + (a - 14{,}7)^2 + (b - 14{,}7)^2}{10} \end{aligned}$$

Vervang $a = 33 - b$ in hierdie vergelyking om

$$\begin{aligned} 10{,}01 &= \frac{69{,}12 + (18{,}3 - b)^2 + (b - 14{,}7)^2}{10} \\ \therefore 100{,}1 &= 2b^2 - 66b + 620{,}1 \\ \therefore 0 &= b^2 - 33b + 260 \\ &= (b - 13)(b - 20) \end{aligned}$$

te kry. Daarom is $b = 13$ of $b = 20$.

Aangesien $a = 33 - b$ het ons dat $a = 20$ of $a = 13$. So, die twee onbekende waardes in die datastel is 13 en 20.

Ons weet nie watter van hierdie is a, en watter is b nie, aangesien die gemiddeld en variansie vir ons niks sê van die volgorde van die data nie.

11.5 Simmetriese en skewe data

Oefening 11 – 5: Simmetriese en skewe data

1. Is die volgende datastel simmetries, skeef na regs, of skeef na links? Motiveer jou antwoord.

$27\ ;\ 28\ ;\ 30\ ;\ 32\ ;\ 34\ ;\ 38\ ;\ 41\ ;\ 42\ ;\ 43\ ;\ 44\ ;\ 46\ ;\ 53\ ;\ 56\ ;\ 62$

Oplossing:

Die statistieke van die dataversameling is

- gemiddeld: $41{,}1$;

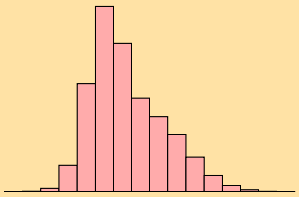
- eerste kwartiel: 33;
- mediaan: $41{,}5$;
- derde kwartiel: 45.

Ons kom tot die slotsom dat die dataversameling skeef na links is om twee redes.

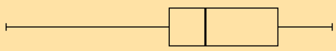
- Die gemiddeld is kleiner as die mediaan. Daar is net 'n baie klein verskil tussen die mediaan end die gemiddeld, so dít is nie 'n baie goeie rede nie.
- 'n Beter rede is dat die mediaan nader is aan die derde kwartiel as die eerste kwartiel.

2. Stel vas of elk van die volgende datastelle simmetries, skeef na links, of skeef na regs is.

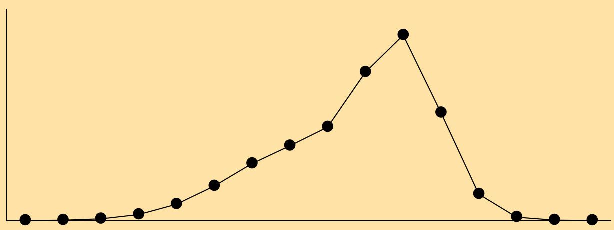
   a) 'n Datastel met 'n histogram:



   b) 'n Datastel met hierdie mond-en-snor grafiek.



   c) 'n Datastel met hierdie frekwensie veelhoek:



   d) Die volgende datastel:
   $11{,}2$; 5 ; $9{,}4$; $14{,}9$; $4{,}4$; $18{,}8$; $-0{,}4$; $10{,}5$; $8{,}3$; $17{,}8$

Oplossing:

a) skeef na regs

b) skeef na regs

c) skeef na links

d) Die statistieke van hierdie dataversameling is

- gemiddeld: $9{,}99$;
- eerste kwartiel: $6{,}65$;
- mediaan: $9{,}95$;
- derde kwartiel: $13{,}05$.

Let op dat ons teenstrydige aanwysings kry vanaf die verskillende maniere om te bepaal of die data skeef is na links of regs.

- Die gemiddeld is effens groter as die mediaan, wat aandui dat die data skeef is na regs.

- Die mediaan is effens nader aan die derde kwartiel as die eerste, wat aandui dat die data skeef is na links.

Aangesien hierdie verskille so klein is en aangesien hulle teenstrydig is, kom ons tot die slotsom dat die dataversameling simmetries is.

3. Twee datastelle het dieselfde reikwydte en inter-kwartiel variasiewydte, maar die een is skeef na regs en die ander is skeef na links. Teken die mond-en-snor grafiek vir elk van die datastelle. Dink daarna data uit (6 punte in elke datastel) wat inpas by die beskrywing van die twee datastelle.

Oplossing:

Leerder-afhanklike antwoord.

11.6 Identifisering van uitskieters

Oefening 11 – 6: Uitskieters

1. Vir elk van die volgende datastelle, teken 'n mond-en-snor diagram en bepaal of daar enige uitskieters in die data is.

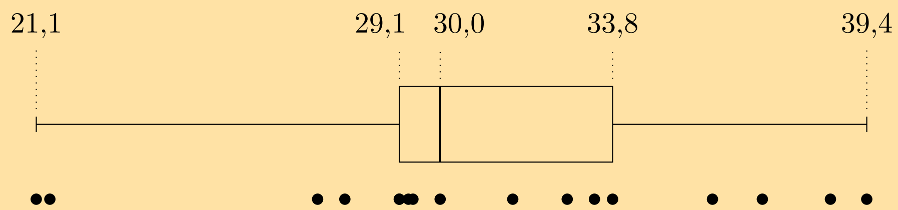
   a) 30 ; $21{,}4$; $39{,}4$; $33{,}4$; $21{,}1$; $29{,}3$; $32{,}8$; $31{,}6$; 36 ; $27{,}9$; $27{,}3$; $29{,}4$; $29{,}1$; $38{,}6$; $33{,}8$; $29{,}1$; $37{,}1$

   b) 198 ; 166 ; 175 ; 147 ; 125 ; 194 ; 119 ; 170 ; 142 ; 148

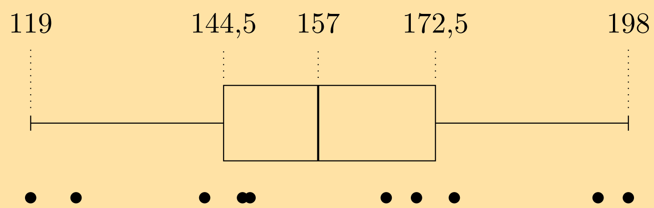
   c) $7{,}1$; $9{,}6$; $6{,}3$; $-5{,}9$; $0{,}7$; $-0{,}1$; $4{,}4$; $-11{,}7$; 10 ; $2{,}3$; $-3{,}7$; $5{,}8$; $-1{,}4$; $1{,}7$; $-0{,}7$

Oplossing:

a) Hieronder is die mond-en-snor diagram van die data en punte wat die data self aantoon. Let op dat leerders nie die datapunte hóéf te teken nie, maar dit help ons om te bepaal dat daar twee uitskieters aan die linkerkant is.

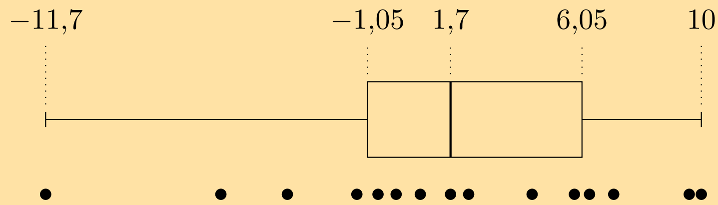


b)



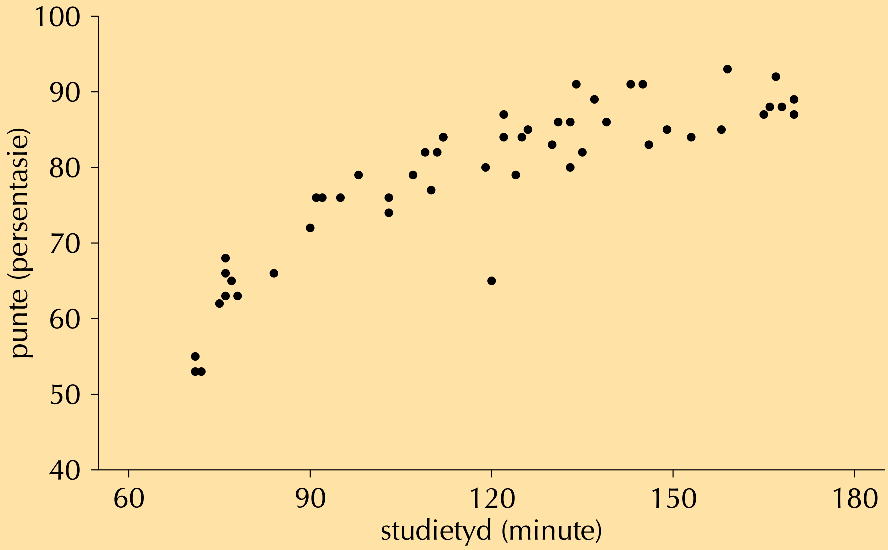
Daar is geen uitskieters nie.

c)



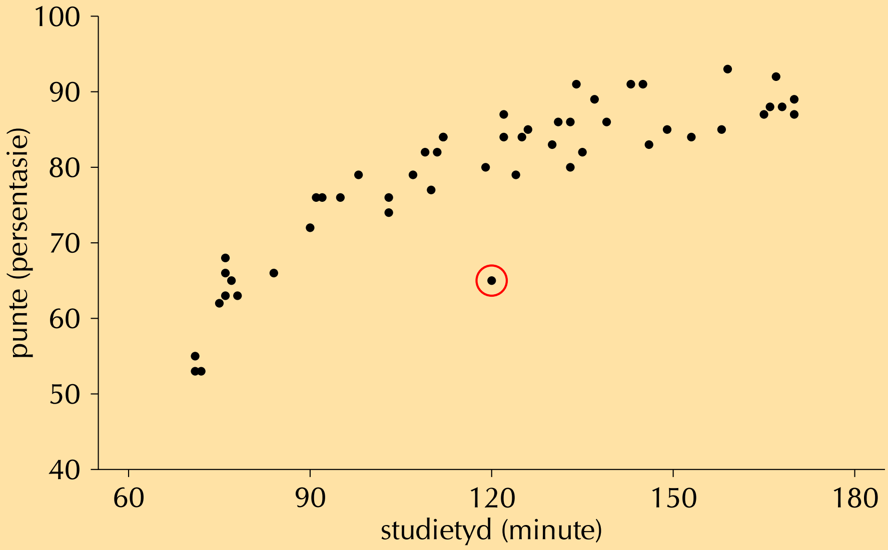
Daar is een uitskieter aan die linkerkant.

2. Die punte wat 'n klas in 'n toets verwerf het, is tesame met die hoeveelheid voorbereidingstyd aangeteken. Die resultate word hieronder weergegee. Identifiseer enige uitskieters in die data.



Oplossing:

Daar is een uitskieter, gemerk in rooi in die figuur.



Oefening 11 – 7: Einde van die hoofstuk oefeninge

1. Teken 'n histogram, frekwensiepoligoon en ogief van die volgende datastel. Om die data te tel, gebruik intervalle met 'n wydte van 1, beginnende by 0.

   $0{,}4$; $3{,}1$; $1{,}1$; $2{,}8$; $1{,}5$; $1{,}3$; $2{,}8$; $3{,}1$; $1{,}8$; $1{,}3$;

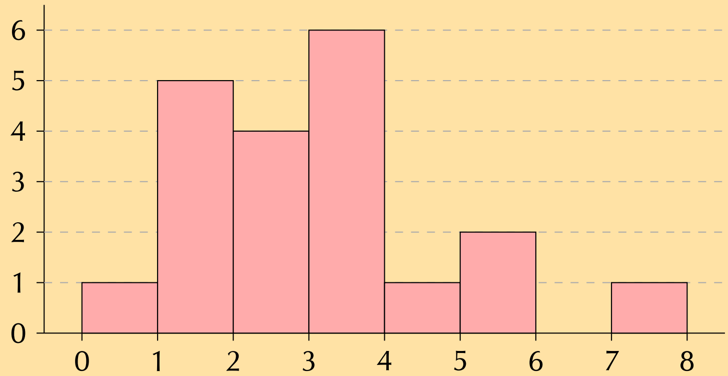
   $2{,}6$; $3{,}7$; $3{,}3$; $5{,}7$; $3{,}7$; $7{,}4$; $4{,}6$; $2{,}4$; $3{,}5$; $5{,}3$

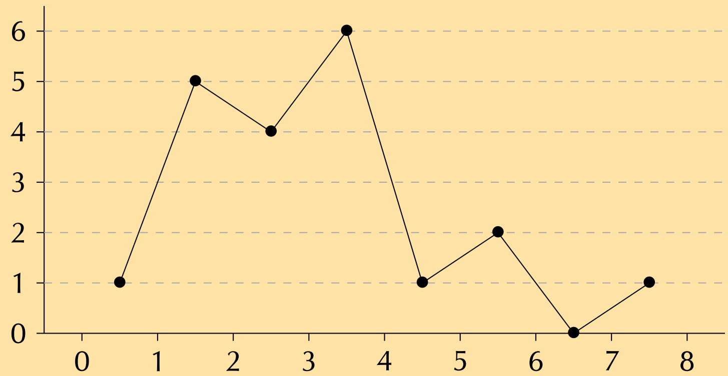
   Oplossing:

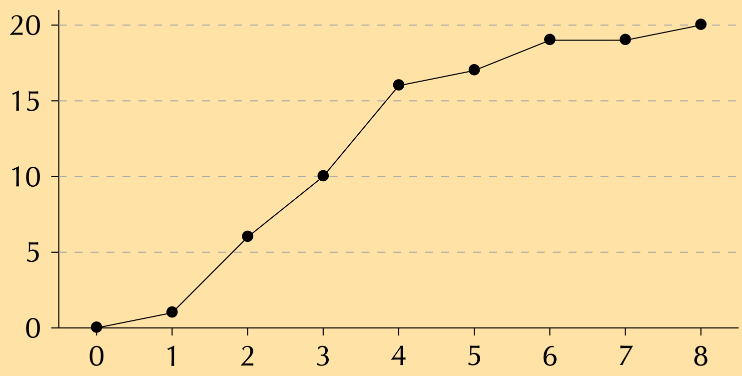
   Ons organiseer eers die data op 'n tabel deur 'n intervalbreedte van 1 te gebruik en die telling in elke interval asook die kumulatiewe telling oor alle intervalle te wys.

Interval	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$
Telling	1	5	4	6	1	2	0	1
Kumulatief	1	6	10	16	17	19	19	20

   Vanaf die tabel hierbo kan ons 'n histogram, frekwensieveelhoek en ogief teken.







2. Teken 'n mond-en-snor diagram van die volgende datastel en verduidelik hoekom dit simmetries, positief skeef of negatief skeef is.

   $-4{,}1$; $-1{,}1$; -1 ; $-1{,}2$; $-1{,}5$; $-3{,}2$; -4 ; $-1{,}9$; -4 ;

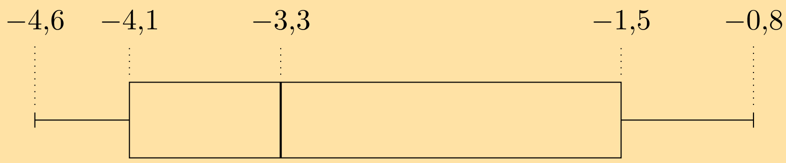
   $-0{,}8$; $-3{,}3$; $-4{,}5$; $-2{,}5$; $-4{,}4$; $-4{,}6$; $-4{,}4$; $-3{,}3$

   Oplossing:

   Die statistieke van die data is

   - minimum: $-4{,}6$;
   - eerste kwartiel: $-4{,}1$;
   - mediaan: $-3{,}3$;
   - derde kwartiel: $-1{,}5$;
   - maksimum: $-0{,}8$.

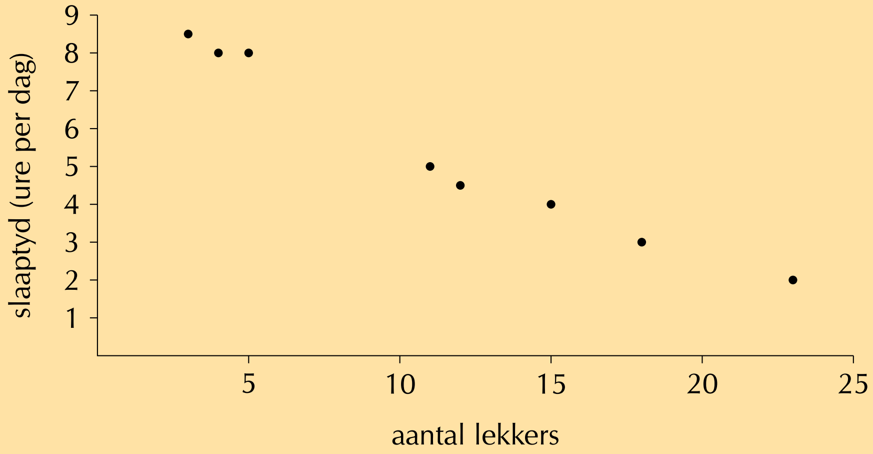
   Vanaf hierdie inligting kan ons die mond-en-snor diagram teken.



   Aangesien die mediaan nader is aan die eerste as die derde kwartiel, is die data skeef na regs.

3. Agt kinders se lekkergoed konsumpsie en slaapgewoontes is opgeteken. Die data word gegee in die volgende tabel en strooiingsdiagram.

Aantal lekkers per week	15	12	5	3	18	23	11	4
Gemiddelde slaaptyd (ure per dag)	4	4,5	8	8,5	3	2	5	8



a) Wat is die gemiddeld en standaardafwyking van die aantal lekkers wat per dag geëet word?

b) Wat is die gemiddeld en standaardafwyking van die aantal ure wat per dag geslaap word?

c) Maak 'n lys van al die uitskieters in die datastel.

Oplossing:

a) Gemiddeld $= 11\frac{3}{8}$. Standaardafwyking $= 6{,}69$.

b) Gemiddeld $= 5\frac{3}{8}$. Standaardafwyking $= 2{,}33$.

c) Daar is geen uitskieters nie.

4. Die maandelikse inkomste van agt onderwysers is as volg:

R 10 050; R 14 300; R 9800; R 15 000; R 12 140; R 13 800; R 11 990; R 12 900.

a) Wat is die gemiddelde en standaardafwyking van hulle inkomstes?

b) Hoeveel van die salarisse is minder as een standaardafwyking weg van die gemiddeld?

c) Indien daar 'n bonus van R 500 by elke onderwyser se salaris gevoeg word, wat is die nuwe gemiddeld en standaardafwyking?

d) Indien elke onderwyser 'n bonus van 10% op hul salaris kry, wat is die nuwe gemiddeld en standaardafwyking?

e) Bepaal vir elk van die gevalle hierbo hoeveel salarisse minder as een standaardafwyking weg van die gemiddelde af is.

f) Deur van die bostaande informasie gebruik te maak, bereken watter bonus finansieel gesproke meer voordelig vir die onderwysers is.

Oplossing:

a) Gemiddeld = R 12 497,50. Standaardafwyking = R 1768,55.

b) Alle salarisse in die interval $(10\ 728{,}95\ ;\ 14\ 266{,}05)$ is kleiner as een standaardafwyking vanaf die gemiddeld. Daar is 4 salarisse binne hierdie interval.

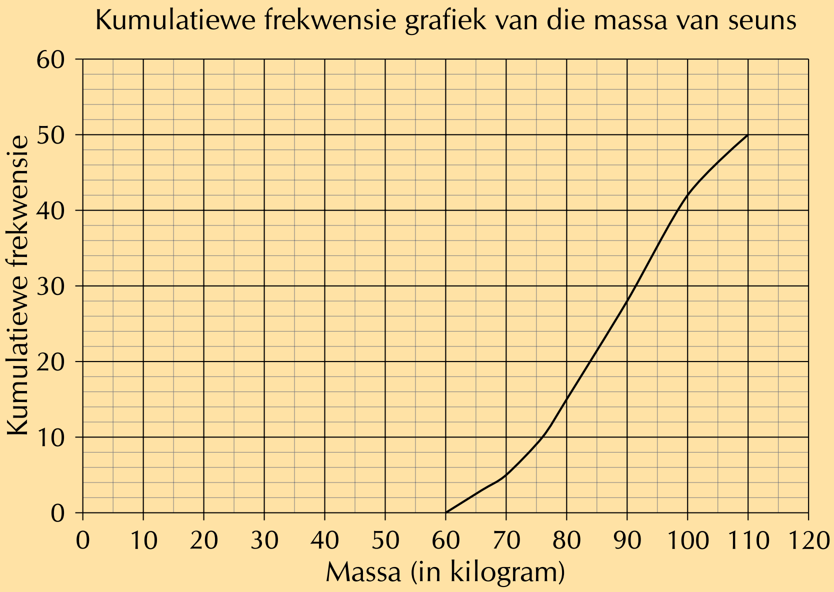
c) Siende dat die verhoging van elke salaris dieselfde is as die absolute hoeveelheid, verhoog die gemiddeld eenvoudig met die grootte van die bonus. Die standaardafwyking verander nie, siende dat elke waarde vermeerder word met presies dieselfde hoeveelheid. Gemiddeld = R 12 997,50. Standaardafwyking = R 1768,55.

d) Met 'n relatiewe verhoging word die gemiddeld en standaardafwyking albei met dieselfde faktor vermenigvuldig. Met 'n verhoging van 10% is die faktor $1{,}1$. Gemiddeld = R 13 747,25. Standaardafwyking = R 1945,41.

e) Deur die waardes met 'n konstante hoeveelheid te vermeerder of 'n konstante faktor te vermenigvuldig (d.w.s. deur 'n lineêre transformasie toe te pas) verander die aantal waardes wat binne een standaardafwyking vanaf die gemiddeld val nie. Dus is die antwoord steeds 4.

f) Siende dat die gemiddeld groter is in die tweede geval, beteken dit dat onderwysers gemiddeld beter salarisse ontvang wanneer die verhoging 10% is.

5. Die massa van 'n ewekansige steekproef van seuns in Graad 11 is aangeteken. Die kumulatiewe frekwensiegrafiek (ogief) verteenwoordig hierdie massa.



a) Hoeveel seuns het tussen 90 en 100 kilograms geweeg?

b) Skat die mediaanmassa van die seuns.

c) Gestel daar was 250 seuns in Graad 11, skat die aantal seuns wat minder as 80 kilogram weeg.

Oplossing:

a) $42 - 28 = 14$

b) Daar is 50 seuns, dus is die mediaanmassa dié van die 25^{de} seun. Die massa wat ooreenstem met 'n kumulatiewe frekwensie van 25 is ongeveer 88 kg.

Nota: Aanvaar 'n variasie van 86 tot 89 kg

c) 15 leerders in die steekproef het 'n massa van minder as 80 kg. 'n Mens kan verwag dat $\frac{15}{50} \times 250 = 75$ leerders in die graad 'n massa van minder as 80 kg sal hê.

6. Drie stelle van 12 leerders elk se toetspunte is aangeteken. Die toets het uit 50 getel. Gebruik die gegewe data om die volgende vrae te beantwoord.

Stel A	Stel B	Stel C
25	32	43
47	34	47
15	35	16
17	32	43
16	25	38
26	16	44
24	38	42
27	47	50
22	43	50
24	29	44
12	18	43
31	25	42

a) Vir elke stel, bereken die gemiddeld en die vyf-getal opsomming.

b) Teken mond-en-snor diagramme van die drie datastelle op dieselfde stel asse.

c) Sê, met redes, vir elkeen van die drie datastelle of dit simmetries, positief skeef of negatief skeef is.

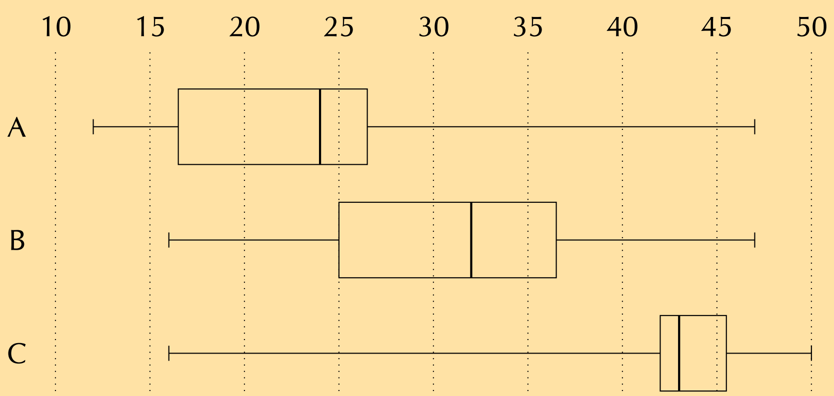
Oplossing:

a) A. Gemiddeld $= 23{,}83$. Vyf-getal opsomming $=$ [12 ; $16{,}5$; 24 ; $26{,}5$; 47].

B. Gemiddeld $= 31{,}17$. Vyf-getal opsomming $=$ [16 ; 25 ; 32 ; $36{,}5$; 47].

C. Gemiddeld $= 41{,}83$. Vyf-getal opsomming $=$ [16 ; 42 ; 43 ; $45{,}5$; 50].

b)



c) Versameling A: skeef na links. Versameling B: effens skeef na links. Versameling C: skeef na regs.

HOOFSTUK 12

Lineêre programering

- Dit is ingesluit vir verryking/projekte.

12.1 Inleiding

Oefening 12 – 1: Optimering

1. Meubelwinkel spesiale openingsaanbod:

   As deel van hulle spesiale openingsaanbod, het 'n meubelwinkel belowe om ten minste 40 pryse weg te gee, met 'n totale waarde van ten minste R 4000. Hulle is van voornemens om ketels en broodroosters weg te gee. Hulle besluit dat daar ten minste 10 eenhede van elke prys sal wees. 'n Ketel kos die maatskappy R 120 en 'n broodrooster kos R 100.

   Bepaal hoeveel van elke prys die goedkoopste opsie vir die maatskappy sal wees. Bereken hoeveel dié kombinasie van ketels en broodroosters sal kos.

   Gebruik 'n gepaste strategie om die inligting te organiseer en die probleem op te los.

   Oplossing:

   In hierdie situasie is daar twee veranderlikes wat ons in aanmerking moet neem. Laat die aantal ketels K wees en die aantal broodroosters T.

   Skryf 'n opsomming neer van al die inligting in die probleem sodat ons al die verskillende komponente van die situasie kan oorweeg.

   $$\begin{aligned}
   \text{minimumwaarde vir } K &= 10 \\
   \text{minimumwaarde vir } T &= 10 \\
   \text{koste van } K &= \text{R } 120 \\
   \text{koste van } T &= \text{R } 100 \\
   \text{minimum aantal pryse} &= 40 \\
   \text{minimum totale waarde van pryse} &= \text{R } 4000
   \end{aligned}$$

   Gebruik die opsomming om 'n tabel op te trek van die aantal ketels en broodroosters wat benodig word. Ons sal veelvoude van 5 oorweeg om die berekeninge te vereenvoudig:

K	T				
	10	15	20	25	30
10	$(10;10)$	$(10;15)$	$(10;20)$	$(10;25)$	$(10;30)$
15	$(15;10)$	$(15;15)$	$(15;20)$	$(15;25)$	$(15;30)$
20	$(20;10)$	$(20;15)$	$(20;20)$	$(20;25)$	$(20;30)$
25	$(25;10)$	$(25;15)$	$(25;20)$	$(25;25)$	$(25;30)$
30	$(30;10)$	$(30;15)$	$(30;20)$	$(30;25)$	$(30;30)$

   Ons moet ten minste 40 ketels en broodroosters altesaam hê.

   Met hierdie beperking kan ons alreeds sommige kombinasies in die tabel uitskakel, naamlik waar $K + T < 40$:

K	T				
	10	15	20	25	30
10	$\cancel{(10; 10)}$	$\cancel{(10; 15)}$	$\cancel{(10; 20)}$	$\cancel{(10; 25)}$	$(10; 30)$
15	$\cancel{(15; 10)}$	$\cancel{(15; 15)}$	$\cancel{(15; 20)}$	$(15; 25)$	$(15; 30)$
20	$\cancel{(20; 10)}$	$\cancel{(20; 15)}$	$(20; 20)$	$(20; 25)$	$(20; 30)$
25	$\cancel{(25; 10)}$	$(25; 15)$	$(25; 20)$	$(25; 25)$	$(25; 30)$
30	$(30; 10)$	$(30; 15)$	$(30; 20)$	$(30; 25)$	$(30; 30)$

Hierdie kombinasies kan uitgeskakel word as moontlik oplossings.

Ons kan die minimumkoste uitdruk as: $C = 120(K) + 100(T)$.

Deur die verskillende kombinasies vir K en T, kan ons die kombinasie vind wat die minimumkoste gee.

K	T				
	10	15	20	25	30
10	$\cancel{(10; 10)}$	$\cancel{(10; 15)}$	$\cancel{(10; 20)}$	$\cancel{(10; 25)}$	$(15; 30) \Rightarrow$ R 4200
15	$\cancel{(15; 10)}$	$\cancel{(15; 15)}$	$\cancel{(15; 20)}$	$(15; 25) \Rightarrow$ R 4300	$(15; 30) \Rightarrow$ R 4800
20	$\cancel{(20; 10)}$	$\cancel{(20; 15)}$	$(20; 20) \Rightarrow$ R 4400	$(20; 25) \Rightarrow$ R 4900	$(20; 30) \Rightarrow$ R 5400
25	$\cancel{(25; 10)}$	$(25; 15) \Rightarrow$ R 4500	$(25; 20) \Rightarrow$ R 5000	$(25; 25) \Rightarrow$ R 5500	$(25; 30) \Rightarrow$ R 6000
30	$(30; 10) \Rightarrow$ R 4600	$(30; 15) \Rightarrow$ R 5100	$(30; 20) \Rightarrow$ R 5600	$(30; 25) \Rightarrow$ R 6100	$(30; 30) \Rightarrow$ R 6600

Ons soek 'n getallepaar wat die minimumkoste gee. Ons kan maklik die getallepare vir ketels en broodroosters, wat nie veelvoude van 5 is nie, toets om te bevestig dat 10 ketels en 30 broodroosters aan die die minimumkoste sal voldoen.

Byvoorbeeld, as 11 ketels en 29 broodroosters weggegee word, sal die koste R 4220 wees. En as 12 ketels en 28 weggegee word, sal die koste R 4340 wees.

Die vereiste dat die koste van die geskenke nie minder nie as R 4000 moet wees, word verkry as 10 ketels en 30 broodroosters weggegee word. Dit sal neerkom op 'n koste van R 4200.

Oefening 12 – 2: Optimering

1. 'n Toets wat uit twee afdelings bestaan word aan jou gegee. Die eerste afdeling handel oor algebra en die tweede afdeling oor meetkunde. Jy word nie toegelaat om meer as 10 vrae in enige afdeling te beantwoord nie, maar jy moet ten minste 4 algebra vrae beantwoord. Die tyd toegelaat is nie meer as 30 minute nie. 'n Algebra probleem sal 2 minute en 'n meetkunde probleem sal 3 minute neem om op te los.

   Gebruik x algebra vrae en y meetkunde vrae in jou antwoord.

a) Formuleer die vergelykings en ongelykhede wat die bostaande beperkinge bevredig.

b) Die algebra vrae tel 5 elk en die meetkunde vrae tel 10 punte elk. As T die totale punte voorstel, skryf 'n uitdrukking neer vir T.

Oplossing:

a) Jy mag nie meer as 10 vrae van enige afdelinge beantwoord nie:

$$x \leq 10$$
$$y \leq 10$$

Jy moet ten minste 4 algebra vrae beantwoord:

$$x \geq 4$$

Die toegelate tyd is nie meer as 30 minute nie. 'n Algebra probleem sal 2 minute neem en 'n meetkunde probleem sal 3 minute neem om op te los:

$$2x + 3y \leq 30$$

b)

$$\begin{aligned} T =&(5 \text{ punte}) \times (\text{aantal algebra vrae beantwoord}) + \\ &(10 \text{ punte}) \times (\text{aantal meetkunde vrae beantwoord}) \\ T =&5x + 10y \end{aligned}$$

2. 'n Plaaslike kliniek wil 'n handleiding vir 'n gesonde leefstyl produseer. Hulle wil die gids in twee formate vervaardig: 'n kort video en 'n gedrukte boek. Die kliniek wil weet hoeveel van elke formaat hulle moet vervaardig om te verkoop. Skattings dui daarop aan dat nie meer as $10\ 000$ van albei formate gesamentlik verkoop sal kan word nie. Ten minste 4000 kopieë van die video en ten minste 2000 kopieë van die boek kan verkoop word maar daar word verwag dat nie meer as 4000 boeke verkoop sal word nie. Laat x die aantal videos wees wat verkoop word en y die aantal boeke.

   a) Skryf die beperkingsongelykhede neer wat uit die gegewe inligting afgelei kan word.

   b) Stel hierdie ongelykhede grafies voor en dui die gangbare gebied duidelik aan.

   c) Die kliniek wil die maksimum inkomste, I, verdien uit die verkope van die twee produkte. Elke video word verkoop vir R 50 en elke boek vir R 30. Skryf die doelfunksie vir die inkomste neer.

   d) Wat is die maksimum inkomste gegenereer deur die twee gidse?

Oplossing:

a) Volgens skatting sal nie meer as $10\ 000$ kopieë van beide items saam verkoop word nie:

$$x + y \leq 10\ 000$$

Ten minste 4000 kopieë van die video kan verkoop word:

$$x \geq 4000$$

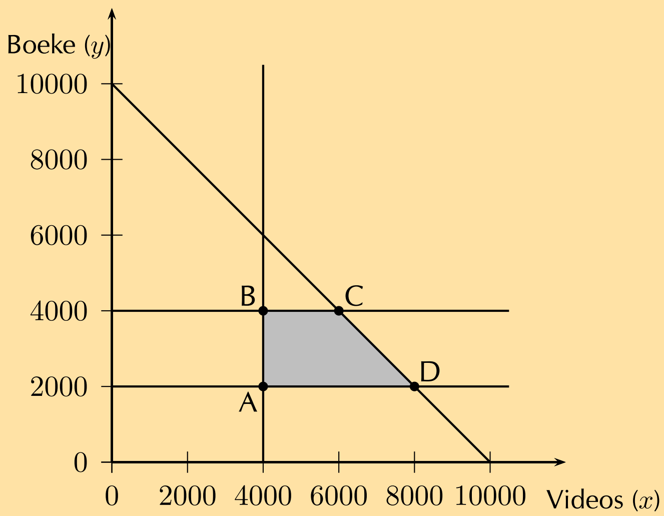
Ten minste 2000 kopieë van die boek kan verkoop word:

$$y \geq 2000$$

Dit word nie verwag dat verkope van die boek 4000 kopieë sal oortref nie.

$$y \leq 4000$$

b)



c)

$$\begin{aligned} I =& (\text{R } 50) \times (\text{videos verkoop}) \\ & + (\text{R } 30) \times (\text{gedrukte boeke verkoop}) \\ I =& 50x + 30y \end{aligned}$$

d) Die hoekpunte vir die gangbare gebied is die volgende:

$$\begin{aligned} \text{Punt A: } & (4000; 2000) \\ \text{Punt B: } & (4000; 4000) \\ \text{Punt C: } & (6000; 4000) \\ \text{Punt D: } & (8000; 2000) \end{aligned}$$

Die koste by elke hoekpunt is die volgende:

$$\begin{aligned} \text{Punt A: } I &= 50(4000) + 30(2000) = 260\ 000 \\ \text{Punt B: } I &= 50(4000) + 30(4000) = 320\ 000 \\ \text{Punt C: } I &= 50(6000) + 30(4000) = 420\ 000 \\ \text{Punt D: } I &= 50(8000) + 30(2000) = 460\ 000 \end{aligned}$$

Die maksimum wins van R 460 000 kan gemaak word as 8000 videos en 2000 boeke verkoop word.

3. 'n Sekere motorfietsvervaardiger produseer twee basiese modelle, die Super X en die Super Y. Hierdie motorfietse word aan handelaars verkoop teen 'n wins van R 20 000 per Super X en R 10 000 per Super Y. 'n Super X neem 150 ure om te monteer, 50 ure om te verf en af te werk, en 10 ure vir kwaliteitsbeheer en toetsing. Die Super Y neem 60 ure om te monteer, 40 ure om te verf en af te werk, en 20 ure vir kwaliteitsbeheer en toetsing. Die totale aantal ure wat elke maand beskikbaar is, is $30\ 000$ in die monteringsafdeling, $13\ 000$ in die verf- en afwerkingsafdeling en 5000 in die kwaliteitsbeheer en toetsingsafdeling.

   Die bostaande inligting word deur die volgende tabel opgesom:

Afdeling	Ure vir Super X	Ure vir Super Y	Ure per maand beskikbaar
Montering	150	60	30 000
Verf en afwerking	50	40	13 000
Kwaliteitsbeheer en toetsing	10	20	5000

   Laat die aantal Super X modelle x en die aantal Super Y, wat per maand vervaardig word, y wees.

   a) Skryf die stel van beperkingsongelykhede neer.
   b) Gebruik grafiekpapier om die stel beperkingsongelykhede voor te stel.
   c) Kleur die gangbare gebied op die grafiekpapier in.
   d) Skryf die wins wat gemaak word neer in terme van x en y.
   e) Hoeveel motorfietse van elke model moet vervaardig word ten einde die maandelikse wins te maksimiseer?
   f) Wat is die maksimum maandelikse wins?

   Oplossing:

   a) Tel die monteringsure bymekaar:

   $$(150)x + (60)y \geq 30\ 000$$

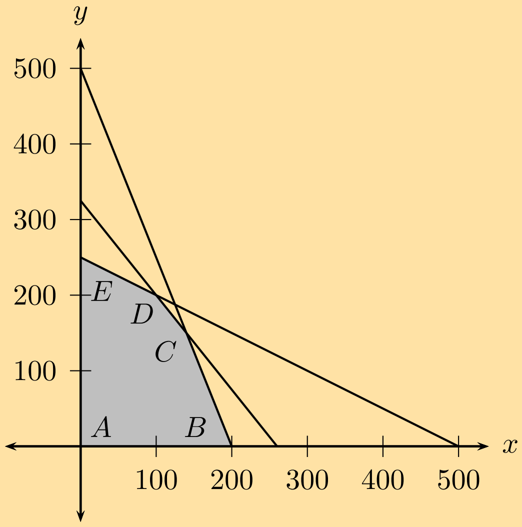
   Tel die verf- en afrondingstye bymekaar:

   $$(50)x + (40)y \geq 13\ 000$$

   Tel die kwaliteitsbeheer- en toetsingstye bymekaar:

   $$(10)x + (20)y \geq 5000$$

   b)



c) Sien bo

d)

$$
\begin{aligned}
E =& (\text{wins per Super X}) \times (\text{aantal Super X fietse verkoop}) \\
& + (\text{wins per Super Y}) \times (\text{aantal Super Y fietse verkoop}) \\
E =& (20\ 000)x + (10\ 000)y
\end{aligned}
$$

e) Die hoekpunte van die gangbare gebied is die volgende:

$$
\begin{aligned}
\text{Punt A: } & (0; 0) \\
\text{Punt B: } & (200; 0) \\
\text{Punt C: } & (140; 150) \\
\text{Punt D: } & (100; 200) \\
\text{Punt E: } & (0; 250)
\end{aligned}
$$

Die koste by elke hoekpunt is die volgende:

$$
\begin{aligned}
\text{Punt A: } E &= 20\ 000(0) + 10\ 000(0) = 0 \\
\text{Punt B: } E &= 20\ 000(200) + 10\ 000(0) = 4\ 000\ 000 \\
\text{Punt C: } E &= 20\ 000(140) + 10\ 000(150) = 4\ 300\ 000 \\
\text{Punt D: } E &= 20\ 000(100) + 10\ 000(200) = 4\ 000\ 000 \\
\text{Punt E: } E &= 20\ 000(0) + 10\ 000(250) = 2\ 500\ 000
\end{aligned}
$$

Om die maksimum van die doelfunksie te bepaal, kies dus **Punt C**.

Die maksimum wins kan gemaak word as **140** Super X motorfietse en **150** Super Y motorfietse verkoop word.

f) Die maksimum moontlike wins is R 4 300 000.

4. 'n Groep studente beplan om x hamburgers en y hoenderburgers by 'n rugbywedstryd te verkoop. Hulle het die vleis vir op die meeste 300 hamburgers en op die meeste 400 hoenderburgers. Elke burger, van beide soorte, word in 'n sakkie verkoop. Daar is 500 sakkies beskikbaar. Die aanvraag is waarskynlik sodanig dat daar ten minste die helfte soveel hoenderburgers as hamburgers verkoop sal word.

a) Skryf die beperkings-ongelykhede neer, en teken 'n grafiek van die gangbare gebied.

b) 'n Wins van R 3 word gemaak op elke hamburger wat verkoop word en R 2 op elke hoenderburger. Skryf 'n vergelyking neer wat die totale wins P in terme van x en y voorstel.

c) Die doel is om die wins te maksimiseer. Hoeveel van elke tipe hamburger moet verkoop word?

Oplossing:

a) Hulle het vleis vir op die meeste 300 hamburgers:

$$x \leq 300$$

Hulle het vleis vir op die meeste 400 hoenderburgers:

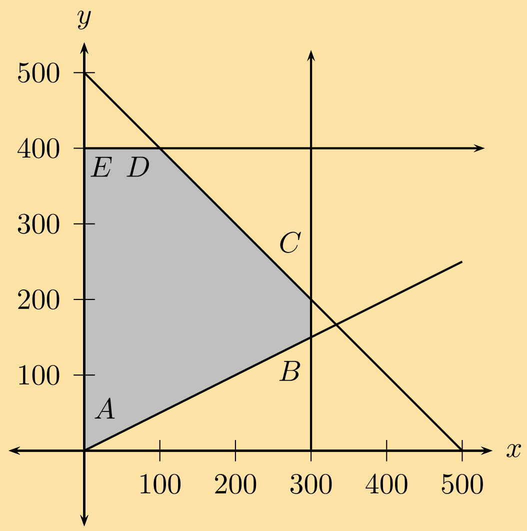
$$y \leq 400$$

Die aanvraag sal waarskynlik sodanig wees dat die aantal hoenderburgers wat verkoop word, ten minste die helfte sal wees van die aantal hamburger wat verkoop word:

$$y \geq (0.5)x$$

Elke burger van beide tipes, word verkoop in 'n sakkie. Daar is 500 sakkies beskikbaar:

$$x + y \leq 500$$



b)

$$P = (\text{wins per hamburger}) \times (\text{ aantal hamburgers verkoop })$$
$$+ (\text{ wins per hoenderburgers }) \times (\text{ aantal hoenderburgers verkoop })$$
$$P = (3)x + (2)y$$

c) Die hoekpunte van die gangbare gebied is die volgende:

$$\begin{aligned} \text{Punt A: } & (0;0) \\ \text{Punt B: } & (300;150) \\ \text{Punt C: } & (300;200) \\ \text{Punt D: } & (100;400) \\ \text{Punt E: } & (0;400) \end{aligned}$$

Die koste by elke hoekpunt is die volgende:

$$\begin{aligned} \text{Punt A: } & P = 3(0) + 2(0) = 0 \\ \text{Punt B: } & P = 3(300) + 2(150) = 1200 \\ \text{Punt C: } & P = 3(300) + 2(200) = 1300 \\ \text{Punt D: } & P = 3(100) + 2(400) = 1100 \\ \text{Punt E: } & P = 3(0) + 2(400) = 800 \end{aligned}$$

Om die maksimum van die doelfunksie te bepaal, kies dus **Punt C**.

Die maksimum moontlik wins van **R 1300** kan gemaak word as 300 hamburgers en 200 hoenderburgers verkoop word.

5. Fashion-Cards is 'n klein maatskappy wat twee tipes kaartjies maak: tipe X en tipe Y. Met die beskikbare arbeid en materiaal kan die maatskappy op die meeste 150 kaartjies van tipe X en op die meeste 120 kaartjies van tipe Y per week maak. Gesamentlik kan hulle nie meer as 200 kaartjies per week maak nie.

   Daar is 'n bestelling vir ten minste 40 tipe X kaartjies en 10 tipe Y kaartjies per week. Fashion-Cards maak 'n wins van R 5 op elke tipe X kaartjie wat verkoop word, en R 10 op elke tipe Y kaartjie.

   Laat die aantal tipe X kaartjies wat per week vervaardig word x wees en die aantal tipe Y kaartjies, y.

   a) Een van die beperkingsongelykhede wat die beperkings hierbo voorstel, is $0 \leq x \leq 150$. Skryf die ander beperkingsongelykhede neer.
   b) Stel die beperkings grafies voor en kleur die gangbare gebied in.
   c) Skryf die vergelyking neer van die wins P (die doelfunksie), in terme van x en y.
   d) Bereken die maksimum weeklikse wins.

   Oplossing:

   a) Die maatskappy kan nie meer as 150 tipe X kaartjies per week maak nie:

   $$x \leq 150$$

   Die maatskappy kan nie meer as 120 tipe Y kaartjies per week maak nie:

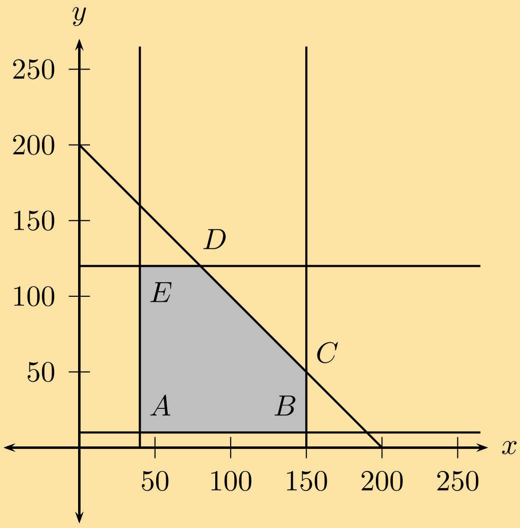
   $$y \leq 120$$

   Altesaam kan hulle nie meer as 200 kaartjies per week vervaardig nie:

   $$x + y \leq 200$$

Daar is 'n bestelling vir ten minste 40 tipe X kaartjies en 10 tipe Y kaartjies per week:

$$x \geq 40$$
$$y \geq 10$$

b) 

c)

$$\begin{aligned} P =&(\text{wins op kaartjie X}) \times (\text{aantal tipe X kaartjies verkoop}) \\ &+ (\text{wins op kaartjie Y}) \times (\text{aantal tipe Y kaartjies verkoop}) \\ P =&(5)x + (10)y \end{aligned}$$

d) Die hoekpunte van die gangbare gebied is die volgende:

$$\begin{aligned} \text{Punt A: } &(40; 10) \\ \text{Punt B: } &(150; 10) \\ \text{Punt C: } &(150; 50) \\ \text{Punt D: } &(80; 120) \\ \text{Punt E: } &(40; 120) \end{aligned}$$

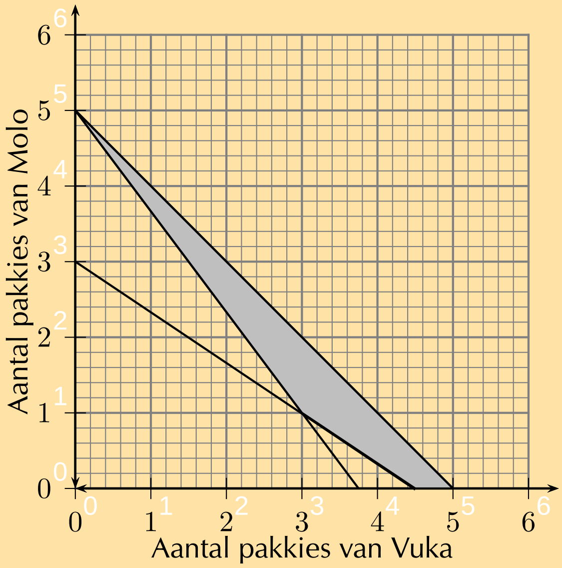
Die koste by elke hoekpunt is die volgende:

$$\begin{aligned} \text{Punt A: } &P = 5(40) + 10(10) = 300 \\ \text{Punt B: } &P = 5(150) + 10(10) = 850 \\ \text{Punt C: } &P = 5(150) + 10(50) = 1250 \\ \text{Punt D: } &P = 5(80) + 10(120) = 1600 \\ \text{Punt E: } &P = 5(40) + 10(120) = 1400 \end{aligned}$$

Om die doelfunksie te maksimeer, kies ons dus **Punt D**.
Die maksimum moontlike weeklikse wins van **R 1600** kan gemaak word as 80 van kaartjie X en 120 van kaartjie Y verkoop word.

6. Om te voldoen aan die vereistes vir 'n gespesialiseerde dieet, word 'n maaltyd berei deur twee tipes graankos, Vuka en Molo, te meng. Die mengsel bevat x pakkies van Vuka graankos en y pakkies van Molo. Die maaltyd vereis ten minste 15 g proteïne en 72 g koolhidrate. Elke pakkie Vuka bevat 4 g proteïne en

16 g koolhidrate. Elke pakkie Molo bevat 3 g proteïne en 24 g koolhidrate. Daar is op die meeste 5 pakkies graankos beskikbaar. Die gangbare gebied is gearseer op die gepaardgaande grafiek.



a) Skryf die beperkingsongelykhede neer.

b) As Vuka ontbytgraan R 6 per pakkie kos en Molo ontbytgraan ook R 6 per pakkie kos, gebruik die grafiek om te bepaal hoeveel pakkies van elke ontbytgraan gebruik moet word sodat die totale koste van die mengsel 'n minimum is.

c) Gebruik die grafiek om te bepaal hoeveel van elke ontbytgraan gebruik moet word sodat die totale koste van die mengsel 'n maksimum is (gee alle moontlikhede).

Oplossing:

a) Tel die proteïne bymekaar:

$$(4)x + (3)y \geq 15$$

Tel die koolhidate bymekaar:

$$(16)x + (24)y \geq 72$$

Daar is op die meeste 5 pakkies ontbytkos beskikbaar:

$$x + y \leq 5$$

b) Die doelfunksie kan as volg geskryf word:

$$\begin{aligned} P =& (\text{wins op 'n pakkie Vuka}) \times (\text{aantal pakkies Vuka}) \\ &+ (\text{wins op 'n pakkie Molo}) \times (\text{aantal pakkies Molo}) \\ P =& (6)x + (6)y \end{aligned}$$

Die hoekpunte van die gangbare gebied is die volgende:

$$\text{Punt A: } (3;1)$$
$$\text{Punt B: } (4{,}5;0)$$
$$\text{Punt C: } (5;0)$$
$$\text{Punt D: } (0;5)$$

Die koste by elke hoekpunt is die volgende:

$$\text{Punt A: } P = 6(3) + 6(1) = 24$$
$$\text{Punt B: } P = 6(4{,}5) + 6(0) = 27$$
$$\text{Punt C: } P = 6(5) + 6(0) = 30$$
$$\text{Punt D: } P = 6(0) + 6(5) = 30$$

Om die minimum van die doelfunksie te bepaal, kies ons dus **Punt A**. Die minimum moontlike koste sal R 24 wees as 3 pakkies Vuka en 1 pakkie Molo verkoop word.

c) Om die doelfunksie te maksimeer, kies ons punt C of punt D. Die maksimum koste sal R 30 wees indien of 5 pakkies Vuka en 0 pakkies Molo verkoop word, of 0 pakkies Vuka en 5 pakkies Molo.

WEERGAWE 1 CAPS

GRAAD 11
WISKUNDE

GESKRYF DEUR VRYWILLIGERS

ISBN 978-1-920423-83-4
9 781920 423834