Province of the
EASTERN CAPE
EDUCATION

NASIONALE SENIORSERTIFIKAAT

GRAAD 12

SEPTEMBER 2023

WISKUNDE V2

PUNTE: **150**

TYD: **3 uur**

Hierdie vraestel bestaan uit 13 bladsye, insluitend 'n 1-bladsy inligtingsblad en 'n antwoordeboek van 25 bladsye.

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies noukeurig deur voordat die vrae beantwoord word.

1. Hierdie vraestel bestaan uit 10 vrae.
2. Beantwoord AL die vrae in die SPESIALE ANTWOORDEBOEK wat voorsien is.
3. Toon ALLE berekeninge, diagramme, grafieke, ens. aan, wat jy gebruik het om antwoorde te bepaal, duidelik aan.
4. Volpunte sal NIE noodwendig aan slegs antwoorde toegeken word NIE.
5. Jy mag ŉ goedgekeurde wetenskaplike sakrekenaar (nieprogrammeerbaar en niegrafies) gebruik, tensy anders vermeld.
6. Indien nodig, rond antwoorde af tot TWEE desimale plekke, tensy anders vermeld.
7. Diagramme is NIE noodwendig volgens skaal geteken NIE.
8. ŉ Inligtingblad met formules is aan die einde van die vraestel ingesluit.
9. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

1.1 ʼn Skool se hokkiespan het die aantal opstote wat elke speler in een minuut voltooi aangeteken. Die getalle vir sewe spelers was:

29 27 24 31 22 19 30

1.1.1 Bereken die:

(a) Gemiddelde (2)

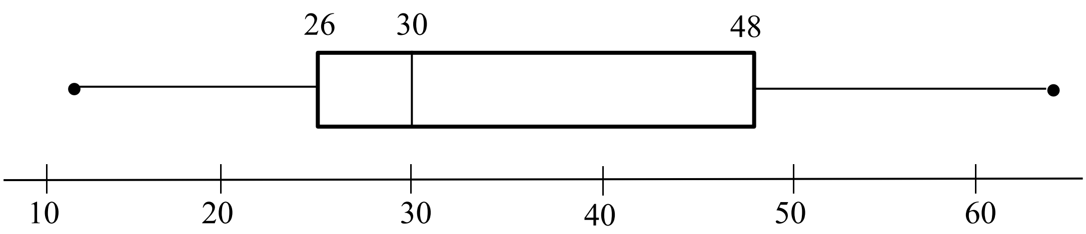
(b) Standaardafwyking (1)

1.1.2 Hoeveel spelers was binne een standaardafwyking vanaf die gemiddelde? (3)

1.1.3 Sewe spelers in die skool se rugbyspan het ook die aantal opstote wat hulle in een minuut voltooi aangeteken. Hulle getalle het ʼn gemiddelde van 26 en ʼn standaardafwyking van 3,2 gegee.

Gebruik die standaardafwykings en die gemiddeldes om die aantal opstote van die spelers in die rugby- en hokkie-spanne te vergelyk. (2)

1.2 Die aantal punte aangeteken deur ʼn rugbyspan in elk van 10 wedstryde word deur die mond-en-snor diagram hieronder voorgestel. Die tellings van die 10 wedstryde was verskillend.



1.2.1 In watter persentasie van die wedstryde het die span meer as 30 punte aangeteken? (1)

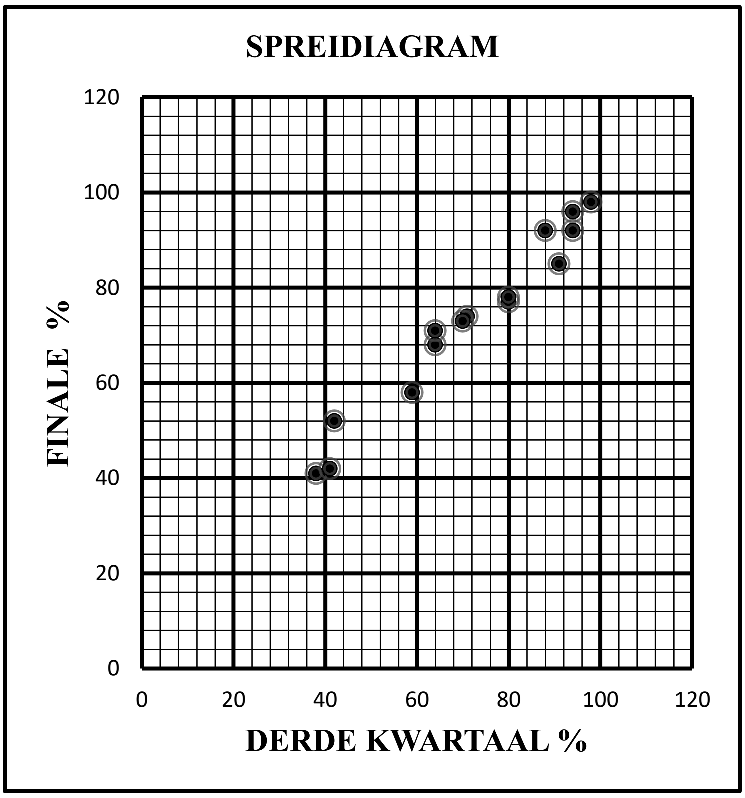
1.2.2 Watter een van die gemiddelde of mediaan is moontlik groter? Gee ʼn rede vir jou antwoord. (2)

[11]

VRAAG 2

Die tabel toon die persentasies deur ŉ steekproef van 15 kandidate in die derde kwartaal en finale eksamens van 2022 behaal. Die tabel en spreidiagram hieronder stel hierdie punte voor.

Derde	71	80	59	38	41	98	80	88	91	94	64	94	70	42	64
Finale	74	77	58	41	42	98	78	92	85	92	68	96	73	52	71



2.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn vir die data, rond jou antwoorde tot 3 desimale plekke af. (3)

2.2 Skryf die waarde van die korrelasiekoëffisiënt, *r*, tussen die derde kwartaal en die finale eksamen persentasies, neer. (1)

2.3 ŉ Kandidaat het 48% in die derde kwartaal behaal.

2.3.1 Gebruik die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn om sy finale persentasie te beraam. Rond jou antwoord tot die naaste heelgetal af. (2)

2.3.2 Gee ŉ rede waarom die beraming as betroubaar beskou kan word. (1)

2.4 Die kleinstekwadrate-regressielyn word gebruik om die finale persentasie van ŉ kandidaat, wie 50% in die derde kwartaal behaal het, te beraam en is 80%.

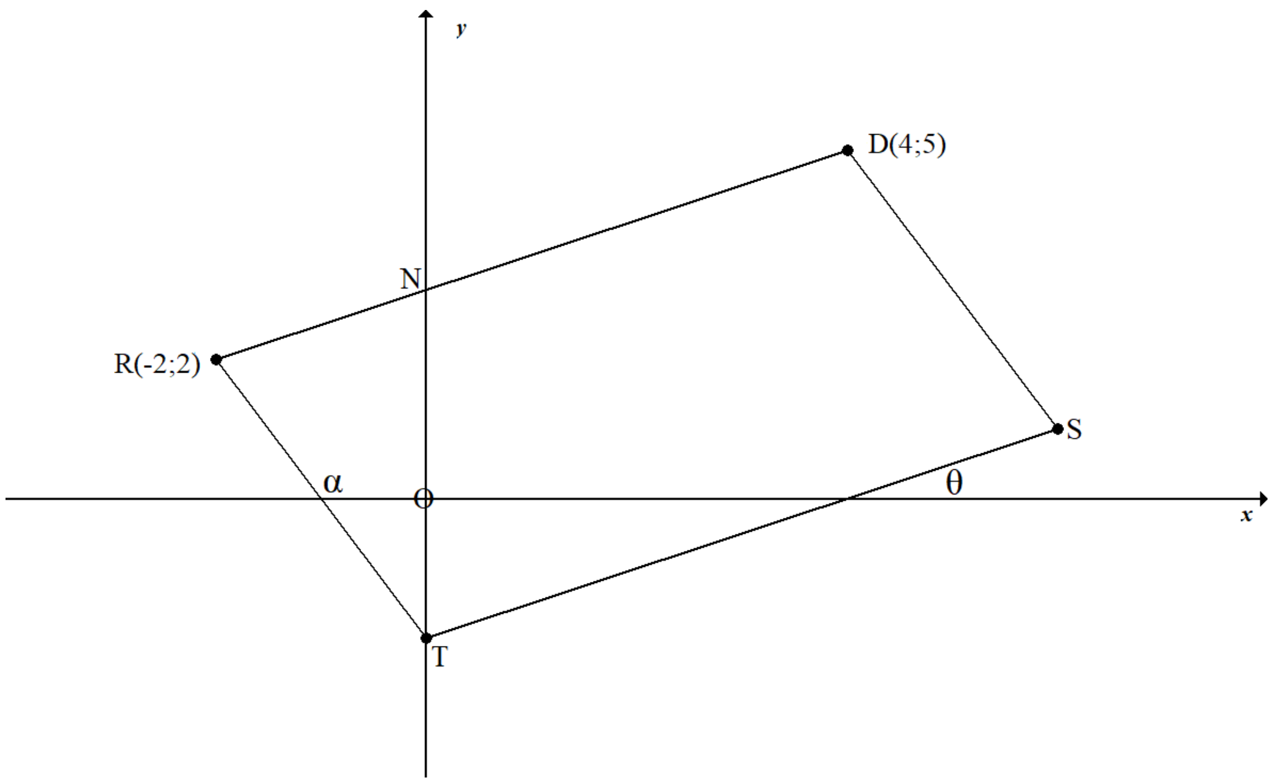
2.4.1 Waarom sou hierdie beraming onbetroubaar wees? (1)

2.4.2 Sal die byvoeging van die punt (20;10) tot die oorspronklike datastel die gradiënt van die kleistekwadrate-regressielyn vermeerder of verminder? (1)

[9]

VRAAG 3

In die diagram hieronder vorm, D(4; 5), R(-2; 2), T en S ʼn vierhoek. RD sny die y-as by N en T is ʼn punt op die y-as. Die inklinasies van RT en TS is onderskeidelik α en θ. RD∥TS en die vergelyking van TS is $y = \frac{1}{2}x - 2$.



3.1 Skryf die koördinate van T neer. (1)

3.2 Bereken:

3.2.1 Die gradiënt van RT (2)

3.2.2 Die grootte van $R\hat{T}S$ (5)

3.3 Bepaal die vergelyking van RD in die vorm $y = mx + c$. (3)

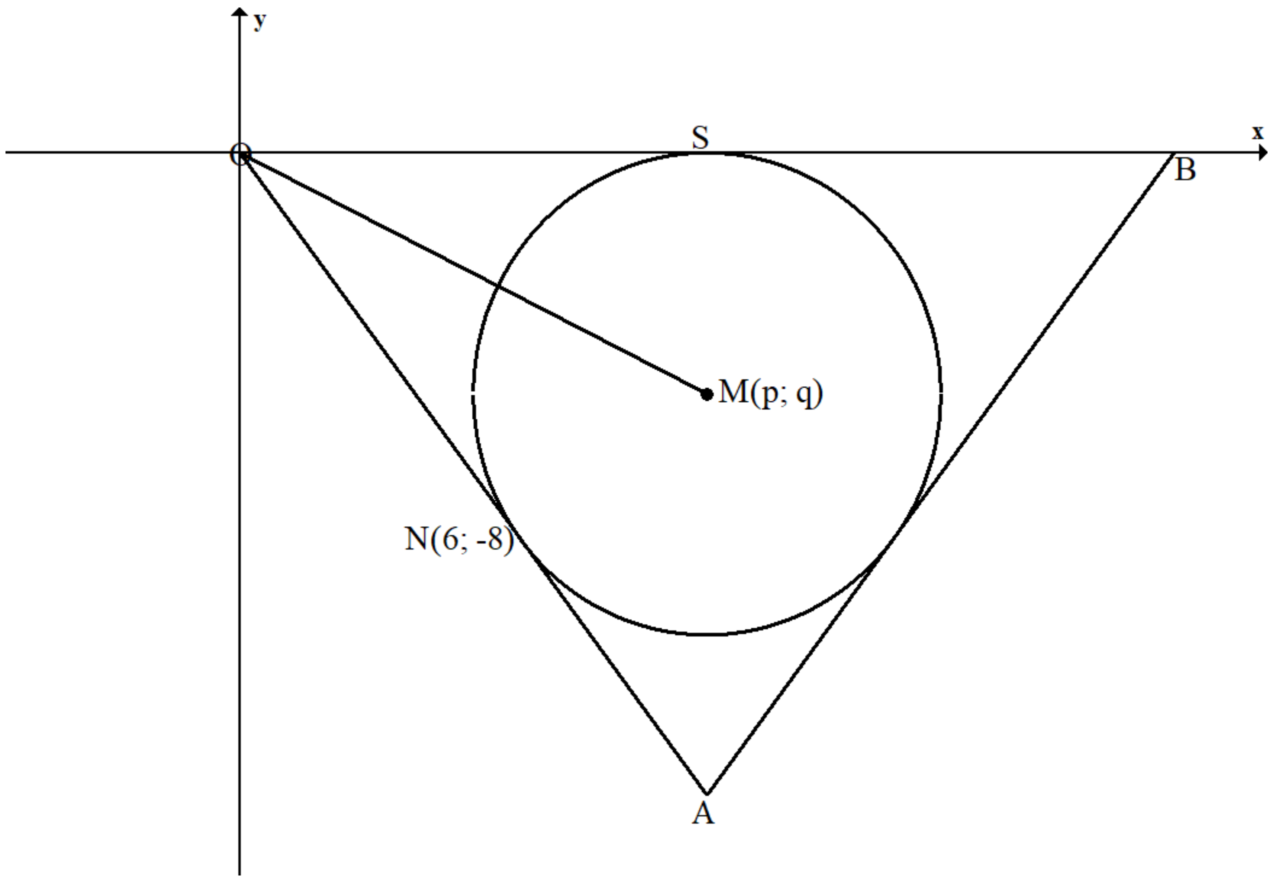
3.4 As RT∥DS, bereken die koördinate van M, die middelpunt van RS. (3)

3.5 Bereken die oppervlakte van ΔRTN. (4)

[18]

VRAAG 4

In die diagram hieronder, raak 'n sirkel met middelpunt by $M(p;q)$, die x-axis by S en die lyn OA is 'n raaklyn aan die sirkel by $N(6;-8)$.



4.1 Bereken die:

4.1.1 Lengte van ON (2)

4.1.2 Die waarde van p (2)

4.1.3 Die gradiënt van NM (3)

4.1.4 Die waarde van q (2)

4.2 Bepaal die vergelyking van die sirkel in die vorm: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. (3)

4.3 $x=k$ is 'n raaklyn aan die sirkel. Skryf die waarde(s) van k neer. (2)

4.4 Die lyn $y=-\frac{4}{3}x+t$ sny die sirkel by twee verskillende punte. Bepaal die waardes van t. (6)

4.5 'n Ander sirkel met vergelyking $(x-10)^2+(y-6)^2=25$ word gegee.

Sal die twee sirkels raak, sny of nie? Gee 'n rede vir jou antwoord. (2)

[22]

VRAAG 5

5.1 As $\sin 54° = p$, druk elk van die volgende, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar,** in terme van p uit.

5.1.1 sin 594° (2)

5.1.2 cos 36° (2)

5.1.3 cos 18° (4)

5.2 Vereenvoudig die volgende **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**.

$$\frac{\cos 140° - \sin(90 - \theta)}{\sin 410° + \cos(-\theta)}$$ (6)

5.3 Bepaal, **sonder die gebruik van 'n sakrekenaar**, die waarde van die volgende trigonometriese uitdrukking.

$$\cos(x + 65°).\cos(x + 20°) - \sin(x + 245°).\sin(x + 20°)$$ (4)

5.4 Bepaal die algemene oplossing van: $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$ (4)

5.5 Gegee die identiteit:

$$\frac{\sin 2\theta.\tan\theta}{\cos 2\theta + 1} = \tan^2\theta$$

5.5.1 Bewys die identiteit. (4)

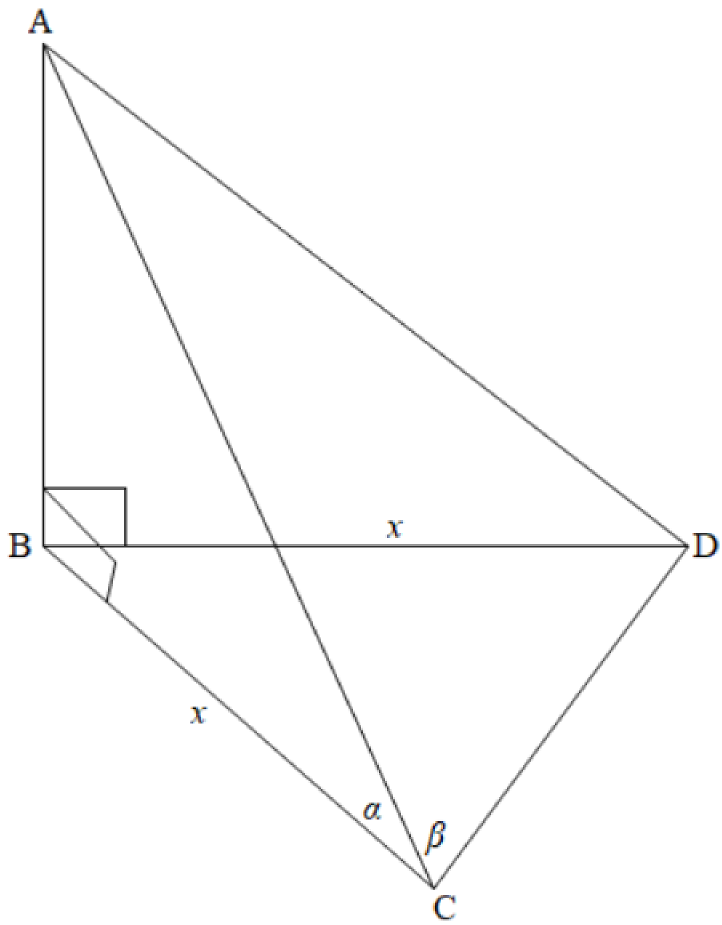
5.5.2 Bepaal die waardes van θ waarvoor die identiteit ongedefinieerd is, as $0° \leq \theta \leq 180°$. (4)

[30]

Kopiereg voorbehou

VRAAG 6

In die figuur hieronder, is B, C en D punte op dieselfde horisontalevlak. AB is 'n vertikale toring met hoogtehoek vanaf C na A gelyk aan α en $\mathrm{A\hat{C}D} = \beta$. $\mathrm{BD} = \mathrm{BC} = x$.



6.1 Waarom is AC = AD? (1)

6.2 Skryf AC in terme van x en α. (2)

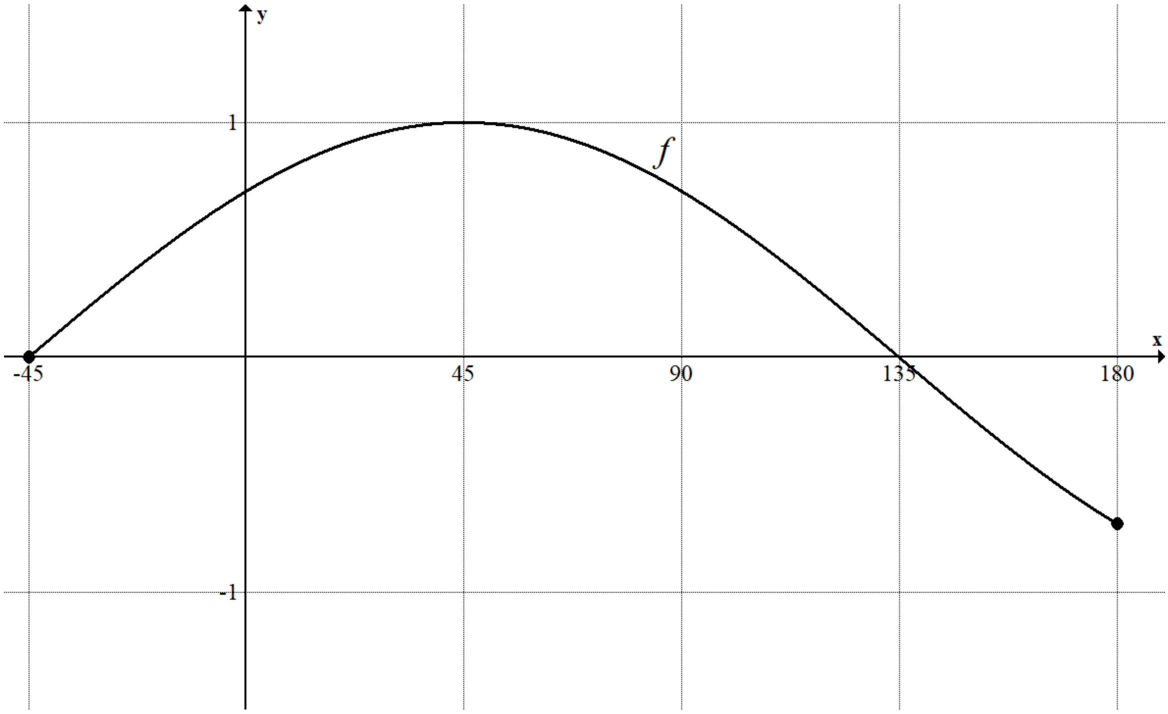
6.3 Toon aan dat $\mathrm{CD} = \frac{2x\cos\beta}{\cos\alpha}$ (4)

6.4 Bepaal, vervolgens, die lengte van CD as $x = 25\ cm,\ \alpha = 30°$ en $\beta = 65{,}62°$. (2)

[9]

VRAAG 7

Geskets hieronder is 'n grafiek van $f(x) = \cos(x - 45°)$ vir $-45° \leq x \leq 180°$. Gebruik die grafiek om die vrae wat volg te beantwoord.



7.1 Skryf die waardeversameling/terrein van f, vir die gegewe interval, neer. (2)

7.2 Teken die grafiek van $h(x) = \sin 2x$, vir $x \in$ [-45°;180°] op dieselfde assestelsel as f in die ANTWOORDEBOEK. Dui aan die koördinate van al die draaipunte en die afsnitte met die asse. (3)

7.3 Meld die periode van h. (1)

7.4 Gebruik jou grafiek om die waardes van x te bepaal waarvoor f en h albei toenemend/stygend is. (2)

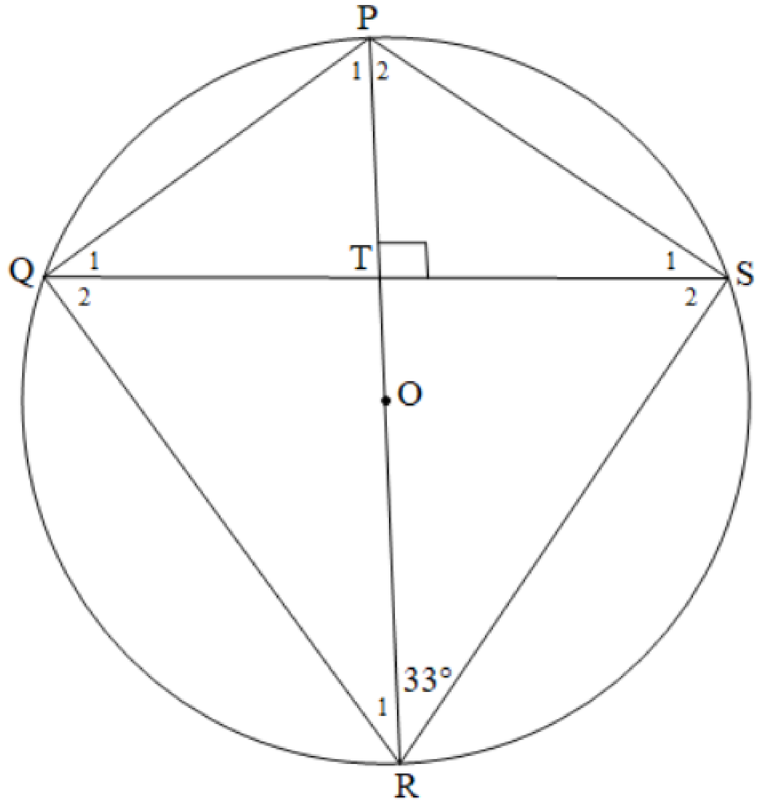
7.5 Bepaal die waardes van x waarvoor $f(x) - h(x) = 1$. (2)

7.6 Die grafiek van f word 60° na links verplaas/geskuif om die grafiek van g te vorm. Skryf die vergelyking van g in die vorm $g(x) =$ ____ neer. (1)

[11]

VRAAG 8

In die diagram hieronder, is PR die middellyn van sirkel PQRS met middelpunt O.
PR sny koord QS by T sodat $P\hat{T}S = 90°$. $P\hat{R}S = 33°$.



8.1 Bepaal, met redes, die grootte van:

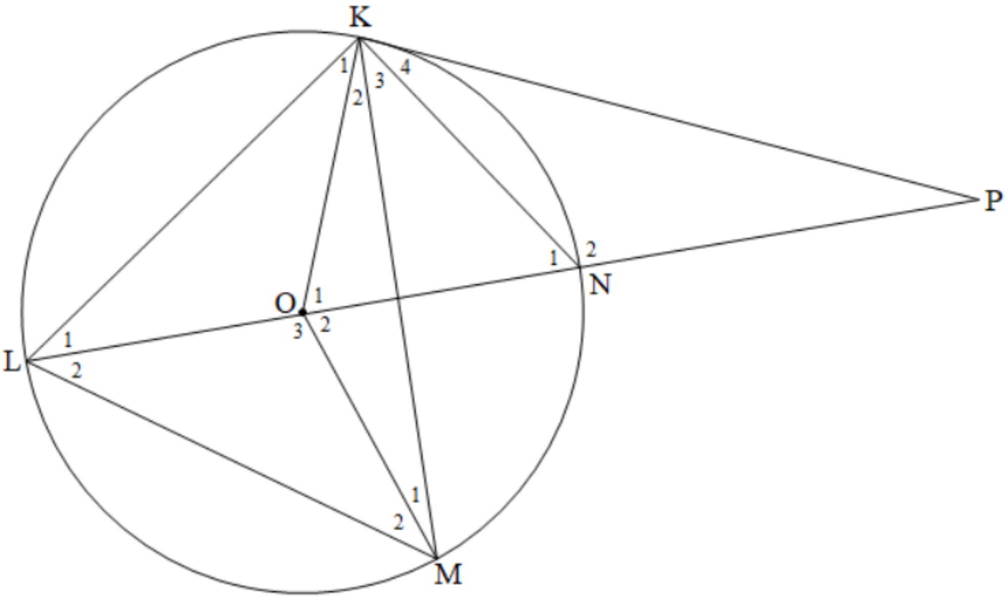
8.1.1 $\hat{P}_1$ (3)

8.1.2 $\hat{Q}_2$ (2)

8.2 As QS = 16 cm en PR = 20 cm, bepaal, met redes, die lengte van TO. (4)
[9]

VRAAG 9

In die diagram hieronder, is O die middelpunt van die sirkel en KP is ŉ raaklyn aan die sirkel. LN, die middellyn van die sirkel, is verleng en ontmoet KP by P. Reguitlyne OK, OM, KM en KN is geteken.



9.1 Skryf twee hoeke, elk gelyk aan $90°$ neer. (2)

9.2 As $\hat{K}_4 = x$, skryf, met redes, die volgende hoeke in terme van x neer.

9.2.1 $\hat{L}_1$ (2)

9.2.2 $\hat{K}_1$ (2)

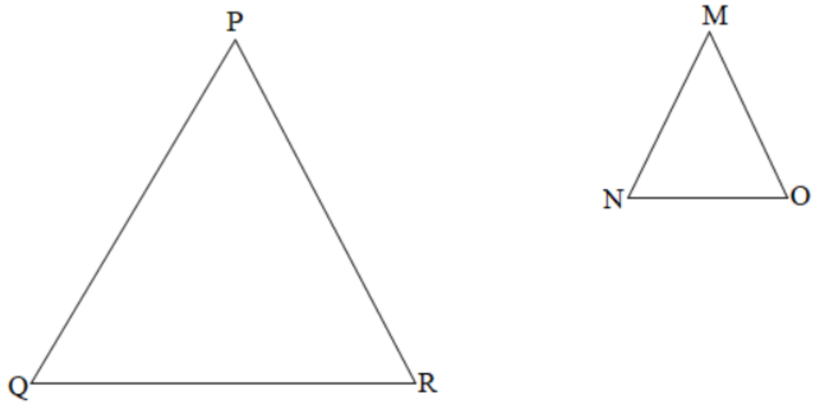
9.2.3 $\hat{P}$ (2)

9.3 Verbind MP, wat ŉ raaklyn aan die sirkel is, en bewys vervolgens dat KOMP ŉ koordevierhoek is. (3)

[11]

VRAAG 10

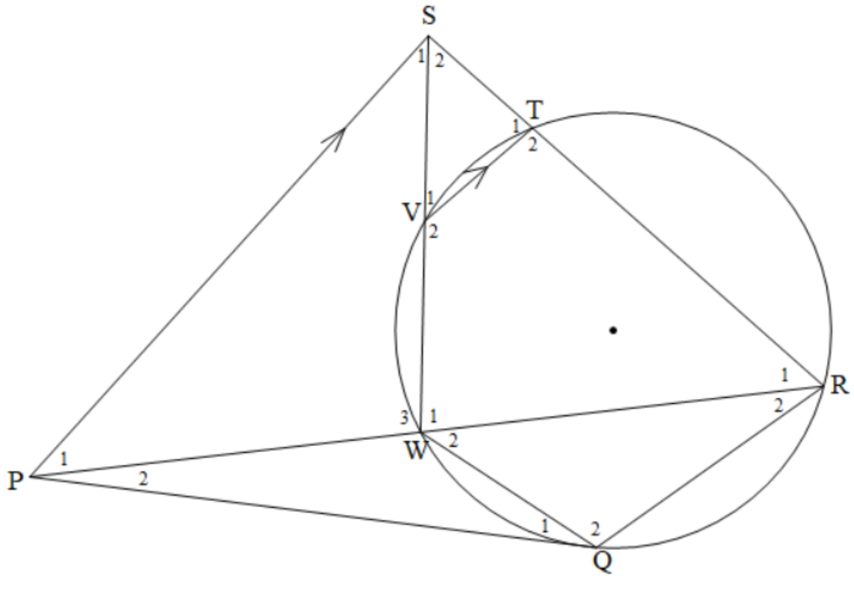
10.1 In die diagram hieronder, is ΔPQR en ΔMNO gegee met $\hat{P} = \hat{M}$, $\hat{Q} = \hat{N}$ en $\hat{R} = \hat{O}$.



Gebruik die diagram in jou antwoordeboek om die Stelling te bewys wat meld dat:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{MO}{PR}$$ (6)

10.2 In die diagram hieronder, is PQ ŉ raaklyn aan die sirkel by Q. R is ŉ punt op die sirkel en S lê buite die sirkel. PR sny die sirkel by W en RS sny die sirkel by T. SW sny die sirkel by V. $VT \parallel PS$.



Bewys dat:

10.2.1 $\hat{S}_1 = \hat{R}_1$ (3)

10.2.2 $\Delta PWS \, ||| \, \Delta PSR$ (3)

10.2.3 $PQ^2 = PW.PR$ (5)

10.2.4 $PQ = PS$ (3)

[20]

TOTAAL: 150

INLIGTINGSBLAD: WISKUNDE

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$A = P(1 + ni)$ $\quad A = P(1 - ni)$ $\quad A = P(1 - i)^n$ $\quad A = P(1 + i)^n$

$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$ $\quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad T_n = a + (n-1)d$ $\quad S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right)$

$T_n = ar^{n-1}$ $\quad S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r-1}$; $\quad r \neq 1$ $\quad S_\infty = \frac{a}{1-r}$; $-1 < r < 1$

$F = \frac{x\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$ $\quad P = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\quad \text{M}\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$y = mx + c$ $\quad y - y_1 = m(x - x_1)$ $\quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad m = \tan\theta$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

In ΔABC: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$ $\quad area\,\Delta ABC = \frac{1}{2}ab.\sin C$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta$ $\quad \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \cos\alpha.\sin\beta$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha.\cos\beta - \sin\alpha.\sin\beta$ $\quad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta$

$\cos 2\alpha = \begin{cases} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 1 - 2\sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$ $\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha$

$\bar{x} = \frac{\sum fx}{n}$ $\quad \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ $\quad P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$

$\hat{y} = a + bx$ $\quad b = \frac{\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sum(x - \bar{x})^2}$

Kopiereg voorbehou